FONDO PIZZOFALCONE

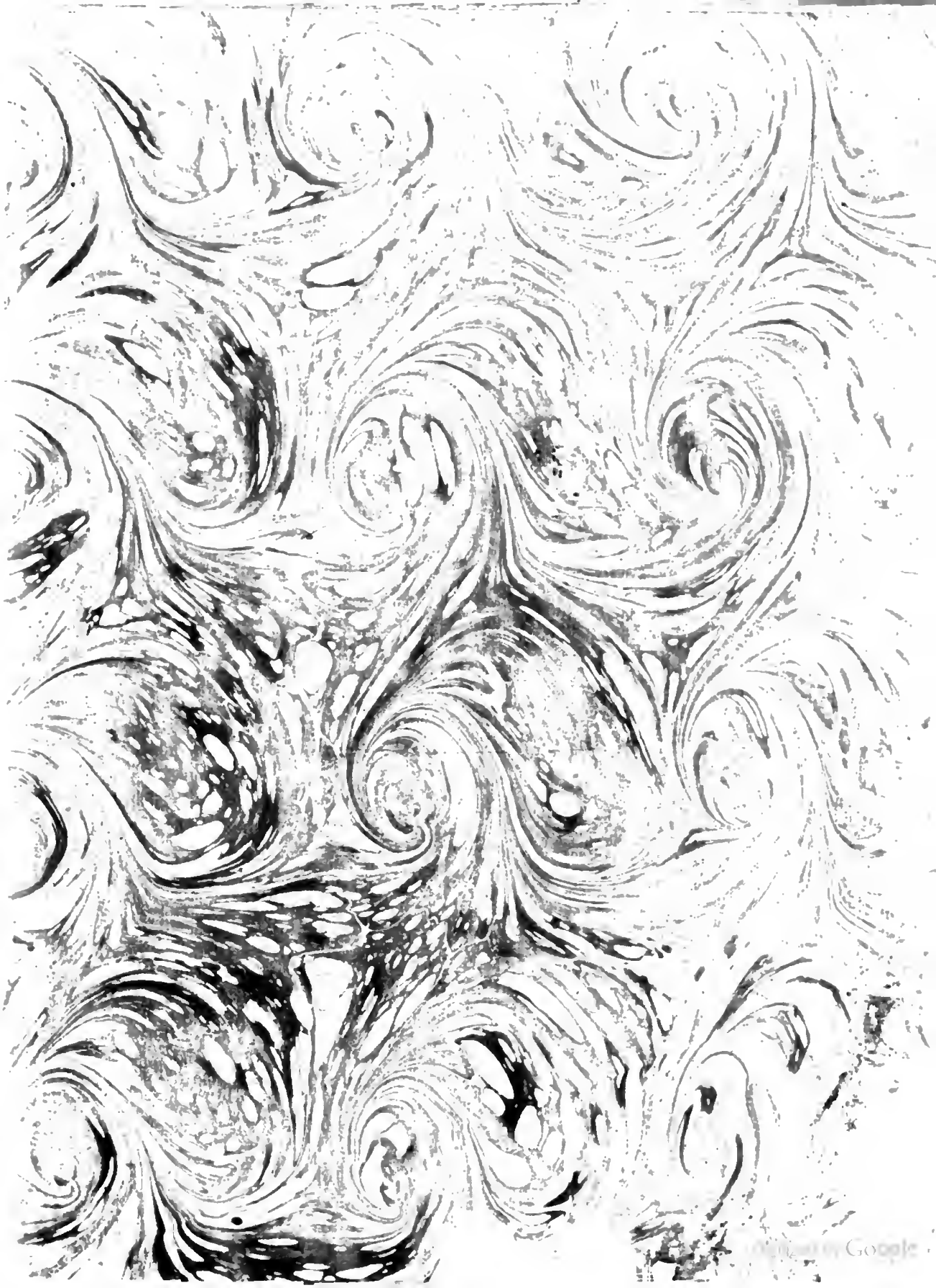
BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XIX

Palchetto

Num.° d' ordine 62

NAZIONALE
B. Prov.
11
VITT. EM. III
919
NAPOLI



83-Cuba
II
323-910
1

Digitized by Google

ELEMENS D'ALGEBRE

DE

Mr SAUNDERSON.

TOME PREMIER.

01

Digitized by Google

NICOLAS SAUNDERSON

Profeſſeur en Mathematiques
dans l'Université de Cambridge
mort le 19 Avril 1739 *âgé de 56 ans*

I. Vanderbank pinx. *C.E. Fritzsch Sculp.*

610092

ELEMENS D'ALGEBRE

DE

Mr SAUNDERSON,

DOCTEUR EN DROIT ET PROFESSEUR EN MATHEMATIQUES DANS L'UNIVERSITE DE CAMBRIDGE,

TRADUITS DE L'ANGLOIS ET AUGMENTÉS DE QUELQUES REMARQUES

PAR Mr DE JONCOURT,

DOCTEUR ET PROFESSEUR EN PHILOSOPHIE.

TOME PREMIER.

BIBLIOTECA PROVINCIALE DI NAPOLI

A PARIS, RUE DAUPHINE,

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Genie, à l'Image Notre-Dame.

M D C C L V I.

Digitized by Google

A

MONSIEUR

LE COMTE

DE

BENTINCK,

SEIGNEUR DE RHOON,

&c. &c. &c.

MONSIEUR,

LE mérite de cet Ouvrage, dont le caractére distinctif est la clarté, & que son titre modeste d'*Elémens d'Algébre* n'empêche pas d'être profond, m'a déterminé à vous l'offrir.

J'eſpére, Monſieur, que cette liberté ne vous déplaîra point, & que le goût que je vous connois pour les Sciences, & en particulier pour celle-ci, me ſervira d'excuſe. J'ai l'honneur d'être avec le plus profond reſpect

MONSIEUR,

Votre très-humble & très-obéiſſant Serviteur

E. DE JONCOURT.

AVER-

AVERTISSEMENT.

Le ſavant Auteur de ce Traité, ayant, dans ſon Projet de ſouſcription, donné en peu de mots une idée générale de ſon Ouvrage, on a cru devoir réimprimer ici cette eſpéce d'Abrégé, pour exciter ou ſatisfaire la curioſité du Lecteur.

CEt Ouvrage (*dit l'Auteur*) eſt principalement deſtiné à l'inſtruction des Jeunes-gens qui ſouhaitent d'étudier l'Algébre, & à l'uſage de ceux qui voudroient la leur enſeigner. Il eſt partagé en dix Livres précédés d'une Introduction, dont les Fractions vulgaires & décimales forment le ſujet : la connoiſſance des premiéres étant abſolument néceſſaire à un Algébriſte. Dans cette Introduction, les raiſons de toutes les opérations différentes ſur les Fractions ſont ſi clairement expliquées, que l'apprentif Analyſte peut en tirer des règles applicables à tous les cas poſſibles, où quelque fraction ſe trouve ſeule, ou mêlée avec d'autres quantités. Le premier Livre traite de la nature de l'Algébre & des Quantités Algébraïques ; de leur addition, ſouſtraction, multiplication & diviſion ; de la proportion, des fractions, & de l'extraction des racines en Algébre ; enfin, de la maniére de réſoudre des équations ſimples : & cette maniére y eſt éclaircie par un grand nombre d'exemples. Ce Livre, ſous le chef de la Multiplication, fait voir, comment par la ſeule multiplication il y a moyen d'inventer pluſieurs utiles Théorêmes, tant en Arithmétique qu'en Géométrie. Dans les articles qui concernent la diviſion & l'extraction des Racines, il eſt parlé de l'origine & de la continuation des Suites infinies.

Mais on a eu ſoin de mettre ce qu'on en dit à la por-

tée des esprits les plus bornés, toutes les autres considérations rélatives à ce sujet étant réservées pour d'autres parties de ce Traité, où les commençans auront moins de peine à les comprendre.

Le second Livre contient quantité de questions formant des équations simples, & dont on peut résoudre les unes par une seule supposition, & les autres par un plus grand nombre. Les meilleures méthodes d'exterminer des quantités inconnues sont expliquées dans ce Livre.

Le troisiéme Livre traite des Equations du second degré, & de la maniére de les résoudre : le tout accompagné d'exemples, entremêlés d'observations curieuses concernant les racines possibles & impossibles des équations.

Le quatriéme Livre traite de l'Algébre pure, c'est-à-dire, où les lettres de l'Alphabet sont employées, non seulement pour représenter des quantités inconnues, mais aussi celles qui sont connues. On raméne ici plusieurs des problêmes précédens, proposés indéfiniment, & l'on en donne des solutions générales au moyen de divers Théorêmes généraux, prouvés d'abord analytiquement, & puis par la méthode synthétique, pour que l'apprentif Algébriste puisse se bien mettre au fait de l'une & de l'autre sorte de ces démonstrations.

Le cinquiéme Livre donne les solutions de divers Problêmes curieux, appartenant à la classe de ceux dont quelques-uns sont susceptibles de plus d'une réponse, & d'autres d'un nombre infini de réponses, le tout par une méthode générale très-facile à comprendre, & nouvelle (suivant l'Auteur.) On démontre ici plusieurs problêmes élégans & utiles, qui ont rapport tant aux nombres entiers qu'aux fractions; particuliérement celui de Mr. *Cotes*, pour trou-

trouver les plus petits nombres qui expriment une raiſon donnée avec le degré d'exactitude requis. A cette occaſion la partie la plus intéreſſante de la doctrine des Incommenſurables, telle qu'*Euclide* l'a donnée, eſt offerte aux yeux du Lecteur, qui y trouvera des raiſonnemens plus ſubtils qu'il n'en pourra peut-être rencontrer dans aucune autre partie des Mathématiques, & cependant à la portée des eſprits les plus bornés.

Le ſixiéme Livre eſt une collection choiſie de pluſieurs Problêmes connus ſous le nom de *Problêmes de Diophante*; les ſolutions qu'on en donne ici ſont aiſées & claires, & quelques-unes d'elles méritent peut-être la préférence ſur celles des mêmes problêmes dans *Diophante*, ou dans quelqu'un de ſes Commentateurs ou Imitateurs: car les Poriſmes de *Diophante* étant abſolument perdus, cet habile Ecrivain eſt, en plus d'un cas, livré à la merci de ſes Commentateurs.

Le ſeptiéme Livre traite de la doctrine de la Proportion telle qu'elle eſt enſeignée dans le cinquiéme Livre d'*Euclide*. On y fait voir que l'idée ordinaire de la proportionalité peut, ſans l'altérer, être étendue aux incommenſurables; & après avoir aſſigné ainſi une marque caractériſtique & ſûre de la proportionalité, la cinquiéme définition & la ſeptiéme du cinquiéme Livre des Élémens, n'en ſont plus que des conſéquences aiſées, naturelles, & parfaitement adaptées au but qu'*Euclide* ſe propoſoit dans ſon Syſtême de Géométrie. Toutes les propoſitions du cinquiéme Livre des Élémens ſont démontrées enſuite clairement & ſuccinctement dans leur ordre, & d'une maniére qui s'éloigne auſſi peu qu'il eſt poſſible de celle d'*Euclide*, afin de ne rien perdre de la force & de l'élégance de ſes démonſtrations;

& avec cela le tout eſt rendu ſi aiſé à comprendre, qu'il y a lieu de ſe flatter que ceux qui ont été arrêtés par ce Livre, en voulant parcourir juſqu'au bout les ſix premiers Livres des Elémens, ne trouveront plus d'obſtacle en leur chemin. La derniére partie de ce Livre donne une idée claire & diſtincte de la compoſition & de la réſolution des Raiſons, & de leur uſage dans la Phyſique & dans la Méchanique: deſorte que cette partie de la doctrine de la proportion ne ſauroit plus être un myſtére pour tout homme qui la lira avec le moindre degré d'attention.

Dans le huitiéme Livre on applique l'Algébre à la Géométrie; & par le moyen de quelques problêmes ſimples & faciles, on initie l'apprentif Analyſte aux plus ſublimes myſtéres de cette Science. Ici la compoſition des Problêmes Géométriques eſt déduite premiérement de l'Analyſe, après quoi les démonſtrations ſynthétiques ſont formées à l'aide des conſtructions qui y ſont données, ſans aucun égard à l'Analyſe. La ſeconde partie de ce Livre contient la doctrine des Solides, pour autant qu'elle eſt rélative aux prismes, aux cylindres, aux pyramides, aux cones, aux ſphéres, aux ſphéroïdes, &c.; dont les principales propriétés ſont tirées d'*Euclide*, d'*Archiméde*, & autres, & démontrées de la maniére la plus ſimple, ſans que l'imagination ſoit obligée au moindre effort.

Le neuviéme Livre roule ſur divers ſujets. Il y eſt parlé premiérement, des Puiſſances & de leurs Expoſans; 2. de la méthode de *Newton* de décompoſer un binôme, conſidérée dans toute ſon étendue; 3. des Logarithmes, de leur nature, & en particulier des logarithmes de *Briggs*; 4. de la Logarithmotechnie, ou de la méthode de calculer les logatithmes, fondée ſur les plus ſimples de leurs propriétés;

5. de

5. de l'invention des Diviſeurs, telle qu'elle eſt enſeignée dans l'Arithmétique Univerſelle de *Newton*; & 6. du calcul des Quantités ſourdes.

Le Livre dixiéme & dernier traite premiérement des Equations en général, & enſuite des Equations cubiques & de celles du quatriéme degré en particulier; indique les meilleures méthodes de les réſoudre quand elles ſont ſuſceptibles d'une ſolution exacte, & des règles d'approximation quand elles ne le ſont pas. La méthode de *Newton* eſt décrite & expliquée ici d'une maniére détaillée.

Il paroît clairement par ce qu'on vient de dire, que le but de notre Auteur dans ce Traité n'étoit pas ſeulement de donner un Cours d'Algébre, mais auſſi d'exciter ſes Lecteurs à l'étude de la Géométrie, en écartant ou réſolvant toutes ces difficultés, qu'une longue expérience lui avoit appris être les principaux obſtacles qui arrêtent les Jeunes-gens dans la carriére des Elémens.

SE-

SECOND AVERTISSEMENT.

PArmi les Queſtions que le Profeſſeur SAUNDERSON propoſe rélativement à la Règle de Trois, *il y en a quelques-unes qui appartiennent à la Double Règle de Trois, dans laquelle cinq nombres ſont donnés pour en trouver un ſixiéme, comme dans la trente-deuxiéme queſtion, pag.* 13. Si deux hommes gagnent en trois jours quatre ſchellings, combien gagneront cinq hommes en ſix jours? *Où les nombres donnés ſont* 2, 3, 4, 5, 6; *dont les trois premiers forment toujours la partie conditionelle de la queſtion, & les trois autres la partie abſolue, qu'on ſouhaite de connoître. Il eſt à noter auſſi, que dans toutes les queſtions appartenant à la Double Règle de Trois, les nombres doivent être rangés de façon, que le premier & le quatriéme, le ſecond & le cinquiéme, le troiſiéme & le nombre cherché, ſoient de même dénomination reſpectivement; comme dans la queſtion propoſée*: 2 hommes, 3 jours, 4 ſchellings; 5 hommes, 6 jours, ſchellings requis.

Cet éclairciſſement étant donné, voici la premiére règle du Profeſſeur, pag. 14. Dans toutes les queſtions de cette nature, ſi les trois derniers nombres ſont multipliés l'un par l'autre, & que le produit ſoit diviſé par le produit des deux premiers nombres, le quotient ſera le nombre cherché. *Comme dans la queſtion propoſée* $\frac{4\times5\times6}{2\times3}=20$, *nombre cherché. De-même, dans la trente-troiſiéme queſtion.* Si pour charrier un poids de 300 livres, à la diſtance de 40 milles, je dois payer 7 ſchellings & 6 ſous, combien dois-je payer pour charrier un poids de 500 livres à la diſtance de 60 milles? *Les termes ſont un poids de* 300 livres, 40 milles, $7\frac{1}{2}$ ſchellings; 500 livres,

livres, 60 milles. *Rép.* $\frac{7\frac{1}{2} \times 5 \times 60}{3 \times 40} = 18\frac{3}{4}$, *c'eſt-à-dire*, 18 *ſchellings & 9 ſous.*

Il y a un autre cas, qui appartient en partie à la Règle de Trois inverſe, comme dans la trente-neuviéme queſtion, pag. 16. Si 2 acres de pré peuvent nourrir 3 chevaux pendant 4 jours, combien de tems 5 acres nourriront-ils 6 chevaux? *Ici il eſt clair, que la Règle de Trois inverſe a lieu; car la même quantité de pré nourrira 6 chevaux ſeulement la moitié du tems qu'elle en nourriroit* 3. *Ainſi pour réſoudre des queſtions de cette nature, le Profeſſeur donne une ſeconde règle, pag.* 18. Dans toutes les queſtions qui appartiennent à la Double Règle de Trois inverſe, où les nombres ſont ſuppoſés rangés comme dans la Double Règle de Trois directe, ſi les trois nombres du milieu ſont multipliés l'un par l'autre, & le produit diviſé par le produit des deux extrêmes, le quotient de cette diviſion ſera le nombre cherché. *Comme dans la trente-neuviéme queſtion, l'ordre des termes étant* 2 acres, 3 chevaux, 4 jours; 5 acres, 6 chevaux; *donc* $\frac{3 \times 4 \times 5}{2 \times 6} = 5$, *nombre des jours cherché.*

Mais il faut obſerver ici, que les termes de cette queſtion peuvent être rangés dans un ordre différent, de la maniére ſuivante: Si trois chevaux mangent l'herbe de deux acres en quatre jours, combien de tems ſix chevaux mettront-ils à manger celle de cinq acres? *Ici l'ordre des termes donnés eſt,* 3 chevaux, 2 acres, 4 jours; 6 chevaux, 5 acres: *& ſuivant cet ordre, ni cette règle, ni la précédente ne réſoudront point la queſtion.*

Pour lever cette difficulté, & trouver en quel ordre la règle du Profeſſeur demande que les nombres ſoient placés, nous propoſerons un Théorême général, au moyen duquel on peut réſoudre

toutes les queſtions qui appartiennent à la Double Règle de Trois. C'eſt ce que je ferai ſuivant la méthode de feu Mr. WARD *de* Cheſter, *dans ſon* Introduction aux Mathématiques, Part. 1. Chap. 7. Sect. 3. pag. 96, *où il déſigne les ſix quantités qui ſe trouvent dans les queſtions appartenant à la Double Règle de Trois, par ces ſix lettres*, P, T, G, p, t, g: *les lettres capitales* P, T, G *marquant les termes de la partie conditionelle de la queſtion, comme les petites lettres* p, t, g *ſont les autres termes, de même dénomination que leurs lettres capitales reſpectives.* P *&* p *ſignifient les termes principaux ou cauſes du gain, de la perte, ou de la dépenſe dont il s'agit dans la queſtion*; T, t *les tems (comme dans les queſtions* 32 *&* 39*) ou les eſpaces (comme dans la queſtion* 33*) requis pour produire ce gain, cette perte, ou cette dépenſe*; *&* G, g *le gain, la perte, ou la dépenſe même, naiſſant des termes principaux dans les dits tems ou eſpaces.*

Pour former donc un Théorême propre à réſoudre les queſtions qui appartiennent à la Double Règle de Trois directe, prenons quelque queſtion particuliére, comme, par exemple, la trente-deuxiéme: Si 2 hommes en 3 jours gagnent 4 ſchellings, combien 5 hommes gagneront-ils en 6 jours? *où* $2 = P$, $3 = T$, $4 = G$, $5 = p$, $6 = t$, *&* g *eſt le nombre cherché. Cette queſtion peut ſe réſoudre en deux analogies, ainſi*: Si 2 (*P*) hommes gagnent 4 (*G*) ſchellings dans un tems donné, 5 (*p*) hommes gagneront 10 $\left(\frac{Gp}{P}\right)$ ſchellings dans le même tems. *De-plus*, ſi en 3 (*T*) *jours* 10 $\left(\frac{Gp}{P}\right)$ ſchellings ſont gagnés, on gagnera en 6 (*t*) jours 20 $\left(\frac{Gpt}{PT}\right)$ *partant* $\frac{Gpt}{PT} = g$; *& multipliant les deux membres par* PT, *nous avons le Théorême* $Gpt = gPT$. *Et puiſque la trente-deuxiéme queſtion nous donne cinq termes rangés dans cet ordre*, P, T, G, p, t, *le*

le terme cherché étant $g = \frac{Gpt}{PT}$, *il eſt manifeſte que le terme cherché ſe trouve, en diviſant le produit des trois derniers termes donnés, par le produit des deux premiers, conformément à la premiére règle du Profeſſeur.*

Prenons préſentement la trente-neuviéme queſtion, pour en déduire un Théorême propre à réſoudre les queſtions de même nature, qui appartiennent à la Double Règle de Trois inverſe. Si 2 (*G*) acres de pré nourriſſent 3 (*P*) chevaux 4 (*T*) jours, combien 5 (*g*) acres nourriront 6 (*p*) de chevaux? *Cette queſtion doit être décompoſée en deux règles de trois: premiérement en cette règle inverſe.* Si une certaine étendue de pré nourrit 3 (*P*) chevaux 4 (*T*) jours, elle nourrira 6 (*p*) nombre double de chevaux ſeulement la moitié du tems, c'eſt-à-dire, 2 $\left(\frac{PT}{p}\right)$ jours: *Secondement, en cette règle de proportion directe,* ſi 2 (*G*) acres nourriſſent ce nombre double de chevaux 2 $\left(\frac{PT}{p}\right)$ jours, 5 (*g*) acres les nourriront 5 $\left(\frac{gPT}{Gp}\right)$ jours. *Donc* t, *le nombre cherché, eſt* $\frac{gPT}{Gp}$, *& multipliant ces deux quantités égales par* Gp, *nous avons le même Théorême que ci-deſſus,* $Gpt = gPT$, *ce qui marque que c'eſt un Théorême général propre à réſoudre toutes les queſtions qui appartiennent à la Double Règle de Trois, tant inverſe que directe. Et puiſque l'ordre des termes donnés dans la trente-neuviéme queſtion eſt* G, P, T, g, p; *& que d'un autre côté* t, *le nombre cherché, eſt trouvé égal à* $\frac{gPT}{Gp}$, *il s'enſuit que, conformément à la ſeconde règle du Profeſſeur, ſi le produit des trois termes du milieu eſt diviſé par le produit des deux extrêmes, le quotient ſera le terme cherché.*

Mais dans la pratique de cette ſeconde règle, il faut bien

avoir ſoin d'aſſigner la premiére place au terme G : *& puis, ſi* t *eſt le terme cherché, comme dans la trente-neuviéme queſtion, l'ordre des termes donnés ſera* G, P, T, g, p, *comme ci-deſſus; mais ſi* p *eſt le terme cherché, l'ordre ſera* G, T, P, g, t. *Et enfin, ſi* g *eſt le terme cherché, l'opération doit toujours ſe faire ſuivant la premiére règle du Profeſſeur, dans laquelle l'ordre des termes eſt* P, T, G, p, t, *comme dans les queſtions* 32 *&* 33; *ou bien* T, P, G, t, p, *ce qui revient au même.*

MEMOIRES
CONCERNANT
LA VIE
ET LE
CARACTERE
DU
DOCTEUR SAUNDERSON,

Profeſſeur en Mathématiques dans l'Univerſité de CAMBRIDGE.

NICOLAS SAUNDERSON nâquit au mois de Janvier de l'an 1682, à *Thurſton* près de *Penniſton* en *Yorkshire*. Son Pére, avec un bien aſſez médiocre, avoit une Charge, qu'il remplit ſans reproche durant l'eſpace de plus de quarante ans. Son fils aîné dont il eſt ici queſtion, perdit à l'âge de douze mois par la petite-vérole, non ſeulement l'uſage de la vue, mais ſes yeux mêmes. Un ſens, dont il avoit ſi peu joüi, fut bientôt oublié, & il ne conſerva pas plus d'idée de la lumiére & des couleurs qu'un Aveugle-né.

Il fit ſes Humanités à *Penniſton* ſous Mr. STANIFORTH, dont les inſtructions lui aidérent à faire de ſi grands progrès dans la connoiſſance de la Langue Latine & Grecque, qu'il ſe trouva dans la ſuite en état de comprendre les Ouvrages d'*Euclide*, d'*Archiméde* & de *Diophante*, quand on les lui liſoit en Grec. *Virgile* & *Horace* étoient ſes Auteurs favoris parmi les Poëtes Romains; ſa mémoire étoit ornée de leurs plus beaux paſſages, & il les citoit ſouvent en converſation fort à propos. Il faiſoit grand cas des Ouvrages de *Cicéron*, & s'étoit rendu cet Auteur familier au point de parler Latin avec une facilité &

une élégance peu communes. Il apprit dans la ſuite paſſablement bien la Langue Françoiſe.

Après qu'il eut donné quelques années à l'étude des Langues, ſon Pére, dont la Charge exigeoit quelque connoiſſance des propriétés des Nombres, commença à lui enſeigner les règles ordinaires d'Arithmétique; ce fut à cette occaſion que ſon génie ſe développa; bientôt il ſe trouva en état de faire toutes les opérations communes, de réuſſir dans de longs calculs par la ſeule force de ſa mémoire, & de ſe former de nouvelles règles à lui-même, pour réſoudre plus aiſément ces ſortes de problêmes, qu'on a accoutumé de propoſer aux commençans, moins pour les inſtruire que pour les embarraſſer; deſorte que ſes camarades d'école, quand quelque difficulté les arrêtoit, le conſultoient préférablement à leur Maître.

A l'âge de dix-huit ans il fut préſenté à Mr. RICHARD WEST, qui, joignant à une fortune aiſée un goût diſtingué pour les Mathématiques, lui enſeigna les Elémens de la Géométrie & de l'Algébre. Peu de tems après il fit connoiſſance avec le Dr. NETTLETON, & ce fut au plaiſir que ces Meſſieurs eurent à l'inſtruire qu'il dût ſes premiers progrès dans les Sciences Mathématiques. Ils lui fournirent des Livres, & eurent la bonté de les lui expliquer. Mais bientôt le diſciple ſe trouva plus en état de donner des leçons à ſes Maîtres, que dans la néceſſité d'en recevoir d'eux.

Le déſir d'apprendre crût avec notre Auteur, & détermina ſon Pére, qui ſouhaitoit d'encourager une diſpoſition ſi louable, à l'envoyer à la petite Académie d'*Attercliff* près de *Sheffield*. La Logique & la Métaphyſique étoient à peu près tout ce qu'on enſeignoit dans cette Académie; & comme la premiére de ces Sciences ne ſe réduit aſſez ſouvent qu'à l'art de diſputer en mode & en figure, & que l'autre ne roule que ſur des idées abſtraites, notre Auteur, que ſon génie portoit à tout ce qui eſt réel & utile, ne fit que très-peu de ſéjour en cet endroit.

Après qu'il eut quitté *Attercliff*, il continua durant quelque tems ſes études à ſa maniére, ſans autre aide ou guide que lui-même: à-la-vérité il ne lui falloit autre choſe qu'un bon Auteur, & quelqu'un qui fût capable de lui en faire la lecture, la force de ſon génie ſuffiſant pour lui faire réſoudre toutes les difficultés à meſure qu'elles s'offroient à ſon eſprit. Juſqu'alors ſon Pére ſeul avoit fourni aux frais de ſon éducation; mais comme

me il avoit une nombreuſe famille, ce fardeau devint trop peſant pour lui. Les Amis de notre Auteur ſongérent donc à lui procurer quelque occupation qui ſervît à l'entretenir. Son inclination le portoit fortement vers l'Univerſité de *Cambridge*, où il comptoit d'avoir occaſion plus qu'en aucun autre lieu de faire des progrès dans ſon étude favorite. Mais ce que ſon éducation avoit couté, & le tems qu'il faudroit y paſſer avant d'obtenir ſes degrés, afin d'être en droit d'enſeigner publiquement, lui parurent des obſtacles inſurmontables. A la fin cependant il réſolut de faire une tentative, & de ſe rendre à *Cambridge*, non pour y apprendre quelque choſe, mais pour y enſeigner; car ſes Amis conſidérant l'étendue de ſes connoiſſances Mathématiques, & ſon heureuſe facilité à communiquer ſes idées aux autres, ſe flattoient qu'il pourroit enſeigner les Mathématiques avec ſuccès, même dans l'Univerſité; ou ſi ce deſſein venoit à manquer, ils eſpéroient que la même entrepriſe réuſſiroit à *Londres*.

Il fut donc mené à *Cambridge* l'année 1707, qui étoit la vingt & cinquiéme de ſon âge, par Mr. DUNN, qui le fit manger avec lui au Collége de *Chriſt*; les membres de ce Collége furent charmés du nouveau convive, lui donnérent une chambre, & ajoûtérent à la permiſſion de ſe ſervir de leur Bibliothéque, tous les autres agrémens qu'il pouvoit raiſonnablement ſouhaiter. Mais l'exécution de ſon projet rencontra quantité d'obſtacles; il ſe trouvoit loin de ſes parens, à l'étroit & bien jeune pour enſeigner la Philoſophie dans une Univerſité où cette Science paroiſſoit alors dans tout ſon éclat. Le célébre WHISTON y rempliſſoit une Chaire de Profeſſeur en Mathématiques, & y donnoit des leçons préciſément telles que Mr. SAUNDERSON les propoſoit. Ce contraſte, bien loin de faire de la peine à WHISTON, lui fournit l'occaſion de donner une nouvelle preuve de la bonté de ſon caractére: il ſe rendit de bonne grace & d'abord aux ſollicitations que les amis d'un homme auſſi extraordinaire lui faiſoient en ſa faveur. Mr. DUNN n'avoit négligé aucun moyen de le faire connoître, & s'y étoit ſi bien pris, qu'au bout de quelques mois divers Savans témoignérent vouloir former des liaiſons particuliéres avec lui. Ses leçons attirérent bientôt tant de monde, que le jour entier ſuffiſoit à peine pour contenter tous ceux qui déſiroient d'avoir part à ſes inſtructions. Il y en eut même quelques-uns dont les études

étoient

étoient tournées d'un tout autre côté, qui profitérent avec empreſſement de l'occaſion d'acquérir à l'aide d'un ſi grand Maître quelques idées en Mathématiques & en Philoſophie.

Le Chevalier NEWTON avoit quitté *Cambridge* pluſieurs années avant que Mr. SAUNDERSON vînt s'y établir. Ses *Principes Mathématiques*, quoique déjà publiés depuis du tems, n'étoient encore compris que de bien peu de gens. Entre pluſieurs autres deſſeins qu'il ſe propoſoit dans cet admirable Ouvrage, il vouloit détruire les tourbillons & quelques autres chiméres favorites de DES CARTES; & la choſe lui réuſſit au point qu'il porta par-là un coup mortel à une Philoſophie, qui jusqu'alors n'avoit été fondée que ſur des principes erronés, & ſur des hypothéſes imaginées dans le cabinet, ſans qu'on pût dire avec certitude qu'elles euſſent quelque objet réel qui leur répondît dans la Nature. NEWTON, qui n'employoit jamais plus de mots qu'il ne falloit, avoit exprimé ſes démonſtrations de la maniére la plus conciſe, laiſſant le ſoin à ſes Lecteurs de puiſer ailleurs les connoiſſances dont ils pourroient avoir beſoin. Son *Optique* & ſon *Arithmétique Univerſelle* ſont toutes deux écrites dans ce même ſtile, & contiennent toutes deux de grandes & étonnantes découvertes. Mr. SAUNDERSON expliqua dans ſes leçons ces differens Ouvrages, qui ouvrirent un vaſte champ à ſon génie; & les diſputes publiques marquérent ſuffiſamment le ſuccès de ſes leçons. Car ces merveilleux phénoménes de la Nature, dont la ſolution avoit jusqu'alors paru ſi difficile aux premiers Mathématiciens, devinrent des théſes que de Jeunes-gens défendoient pour obtenir le premier degré de Maître-ès-Arts. Chaque année quelques-uns de ceux qui avoient le plus profité de ſes leçons ſoutenoient en public le ſyſtême de NEWTON au ſujet de la Théorie du Flux & du Réflux, des phénoménes de l'Arc-en-ciel, & du mouvement des Corps qui compoſent le Syſtême Planétaire, entant qu'il eſt l'effet des loix de la Gravité.

On ſera peut-être ſurpris que notre Auteur ait donné des leçons ſur l'Optique, & ait expliqué la nature des Couleurs, la maniére dont ſe fait la viſion, & en général tout ce qui a rapport à la réfraction & à la réflexion des rayons de lumiere: mais ſi l'on conſidére que la Science dont il s'agit s'explique entiérement par le moyen des lignes, & eſt ſoumiſe aux règles de la Géométrie, on concevra aiſément qu'il a pu entendre à fond ces ſortes de ſujets.

Com-

Comme Mr. SAUNDERSON enſeignoit les principes de la Philoſophie *Newtonienne* à la Jeuneſſe de l'Univerſité, il fit bientôt connoiſſance avec l'immortel Auteur de cette Philoſophie, & eut l'avantage de l'entretenir fréquemment ſur les endroits les plus difficiles de ſes Ouvrages. Le Dr. HALLEY, Mr. DE MOIVRE, & pluſieurs autres fameux Mathématiciens de *Londres*, faiſoient un cas extrême de ſon amitié, & avoient des idées ſi avantageuſes de la force de ſa raiſon & de ſon jugement, qu'ils le conſultoient très-ſouvent ſur leurs écrits & ſur leurs deſſeins.

Mr. WHISTON ayant abdiqué ſa charge de Profeſſeur, le mérite Mathématique de Mr. SAUNDERSON ſe trouva ſi généralement reconnu, & ſi ſupérieur a celui de tout compétiteur qui auroit pu ſe mettre ſur les rangs, que les Chefs des Colléges & quelques autres Perſonnes de diſtinction s'adreſſérent au Duc de SOMERSET, Chancelier de l'Univerſité, & le ſollicitérent de vouloir contribuer à faire obtenir à Mr. SAUNDERSON le grade de Maître-ès-Arts. Ce Seigneur y conſentit, & agit ſi efficacement que la Reine fit expédier d'abord l'Acte néceſſaire pour cela. Immédiatement après, c'eſt-à-dire, au mois de Novembre de l'an 1711, il fut élu Profeſſeur en Mathématiques. Pour lui faire avoir l'un & l'autre de ces deux titres, le Chevalier NEWTON s'étoit puiſſamment intéreſſé en ſa faveur.

Dans ce même tems Mr. COTES rempliſſoit à *Cambridge* une Chaire de Profeſſeur en Aſtronomie & en Philoſophie expérimentale. C'étoit un homme aimable, & ami intime de notre Auteur, avec lequel il avoit divers traits de conformité. Leur âge, leur génie, & leur inclination pour les Mathématiques étoient les mêmes, & quand il s'étoit agi de leur faire avoir le poſte qu'ils occupoient, ils avoient été l'un & l'autre puiſſamment recommandés par le Chevalier NEWTON.

Jamais Univerſité n'a pu ſe vanter de poſſéder à la fois deux hommes auſſi capables d'étendre les progrès de la Philoſophie, & d'augmenter le nombre de ſes partiſans. S'ils avoient atteint un âge plus avancé, en s'aidant mutuellement, & en s'animant l'un l'autre à acquérir de nouvelles connoiſſances, leurs travaux réunis auroient indubitablement beaucoup contribué à la gloire de notre Univerſité, & à l'avancement des Sciences qui étoient de leur département. Mais Mr. COTES fut emporté par une

fiévre à la fleur de ſon âge, n'ayant eu que le tems néceſſaire pour compoſer un petit nombre de piéces, qui ne ſont que de ſimples échantillons de ſa grande habileté, & cependant ſans prix pour les Connoiſſeurs. Et pour ce qui eſt de la vie de notre Auteur, quoiqu'elle ait été plus longue, une ſi grande partie en a été employée à enſeigner, qu'il ne nous reſte que très-peu de monumens de ſon ſavoir & de ſon génie.

La premiére production de Mr. SAUNDERSON après avoir été élu Profeſſeur, fut ſa Harangue inaugurale, qu'il fit dans la Langue Latine, & d'un ſtile véritablement *Cicéronien*; & ce qui acheva de charmer ſon auditoire, il prononça ſon diſcours avec une grace ſans pareille.

Après y avoir marqué ſa vive reconnoiſſance à la REINE, au Chancelier, & à tous ceux qui avoient contribué à ſon élection, de l'opinion favorable qu'ils avoient de ſes connoiſſances Mathématiques, il ajoûta un admirable éloge de cette Science, qu'il conſidéra comme un parfait modéle de raiſonnement, & comme étant d'un uſage infini dans le cours ordinaire de la vie.

Depuis ce tems-là il conſacra la plus grande partie de ſon loiſir à l'inſtruction de ſes diſciples, deſorte que ſes Amis ne jouirent plus guéres des agrémens de ſa converſation. Il continua à demeurer dans le Collége de *Chriſt* juſqu'à l'an 1723, ayant pris maiſon alors à *Cambridge*, apparemment dans l'intention de ſe marier: car il épouſa peu près après une fille de Mr. GUILLAUME DICKONS, Recteur de *Boxworth* dans le Comté de *Cambridge*. Sa femme lui donna un fils & une fille, qui ſont encore en vie l'un & l'autre.

L'an 1728, quand le Roi GEORGE II. actuellement régnant, honora l'Univerſité de *Cambridge* de ſa préſence, il témoigna ſouhaiter de voir un homme auſſi diſtingué dans ſa ſorte. Notre Profeſſeur, charmé d'obéir à cette eſpéce d'ordre, ſe rendit au Sénat pour y témoigner ſon profond reſpect à Sa Majeſté, qui à cette occaſion le créa Docteur en Droit.

Le Dr. SAUNDERSON étoit naturellement d'une conſtitution ſaine & vigoureuſe, mais ſon genre de vie ſédentaire ruina enfin ſa ſanté. Il s'étoit plaint depuis quelques années d'un engourdiſſement, qui au printems de l'an 1739 dégénéra en une mortification au pied. Le ſcorbut avoit corrompu ſon ſang au point, que tout l'Art de la Médecine ne fut pas capable d'arrêter les pro-

progrès de ce mal. Il mourut le 19 d'Avril de l'an 1739, dans la cinquante-ſeptiéme année de ſon âge, & eſt enterré dans le Presbytére de *Boxworth*, comme il l'avoit demandé par ſon Teſtament.

Après cet abrégé de ſa vie, on s'attend apparemment à la deſcription de ſon caractére: mais j'avoue ingénument que je me trouve également incapable d'employer d'aſſez vives couleurs pour dépeindre un caractére auſſi brillant, & de placer mon tableau dans ſon véritable point de vue. C'eſt un étrange phénoméne qu'un Aveugle devenu grand Mathématicien; auſſi ce phénoméne a-t-il été admiré dans tous les ſiécles où il a paru. *Cicéron* en parle comme d'une choſe à peu près incroyable, & dont cependant *Diodote*, ſon Maître en Philoſophie, lui avoit fourni un exemple[a], „ *Diodote*, dit-il, s'appliquoit avec plus d'aſſiduïté „ à l'étude de la Philoſophie, après avoir perdu l'uſage de la vue; „ &, ce qui m'a toujours paru un prodige, il enſeignoit la Géo„ métrie avec tant de netteté, que ſes diſciples n'avoient pas la „ moindre peine à comprendre comment ils devoient tracer les „ figures les plus compoſées". *St. Jérôme* rapporte un exem„ ple encore plus frappant de *Didyme*[b] d'*Alexandrie*, qui, „ quoiqu'aveugle dès ſon enfance, & par cela même ignorant „ l'uſage des lettres, cauſa un étonnement général, en appre„ nant en perfection non ſeulement la Dialectique, mais auſſi „ la Géométrie, qui paroît avoir abſolument beſoin de la vue". La grande habileté de *Didyme* a été célébrée, entre autres Hiſtoriens, par *Caſſiodore*, qui fait mention d'un *Aſiatique*, nommé *Euſébe*[c], „ lequel, à ce qu'il diſoit de lui-même, avoit été „ aveugle depuis l'âge de cinq ans, ce qui ne l'avoit pas empê„ ché d'acquérir quantité de belles connoiſſances qu'il commu„ niquoit aux autres avec la plus grande clarté". *Trithéme* par-

a Cic. Tuſc. Diſp. V. 39. *Diodotus Stoïcus, cæcus multos annos noſtræ domi vixit; is verò, quod credibile vix eſſet, cùm in Philoſophia multò etiam magis aſſiduè quam antea verſaretur, —— tum quod ſine oculis fieri poſſe vix videtur, Geometriæ munus tuebatur, præcipiens diſcentibus, unde, quo, quamque lineam ſcriberent.*

b Hieronymus de Viris Illuſt. Cap. CIX. *Didymus Alexandrinus captus a parva ætate oculis, & ob id elementorum quoque ignarus, tantum miraculum ſui omnibus præbuit, ut Dialecticam quoque & Geometriam, quæ vel maximè viſu indiget, uſque ad perfectum didicerit.*

c Caſſiodorus de Inſt. Div. Liter. cap. 5. tradit *de partibus Aſiæ quendam ad nos* venîſſe *Euſebium nomine, qui ſe infantem quinque annorum ſic cæcatum eſſe narrabat, ut ſiniſtrum ejus oculum fuiſſe excavatum orbis profundiſſimus indicaret: dexter verò globus vitreo colore confuſus ſine videndi gratia infructuoſis niſibus volvebatur. Hic — diſciplinas omnes & animo retinebat, & expoſitione planiſſima lucidabat.*

parle auſſi d'un certain „ *Nicaiſe*[a] de *Malines*, qui, quoiqu'aveu-
„ gle depuis l'âge de trois ans, cependant, tel qu'un autre *Di-*
„ *dyme*, devint un ſi grand Maître en fait de Sciences Divines
„ & Humaines, qu'il enſeigna publiquement dans l'Univerſité
„ de *Cologne* le Droit Canon & le Droit Civil, citant de mémoi-
„ re quantité de longs paſſages, qu'il n'avoit jamais lus". Un *Hollandois*, dont on m'a parlé, & divers autres encore pourroient groſſir la liſte de ces hommes merveilleux.

C'eſt une choſe remarquable, que parmi le petit nombre de ceux qui ont été aveugles depuis leur enfance, & parmi le nombre bien plus petit encore de ceux d'entre eux qui ont ſurmonté les difficultés de leur état, on en ait vu tant exceller en ſavoir, & particuliérement dans les Mathématiques, comme les deux premiers dont nous avons fait mention, l'ont fait *certainement*, & *probablement* auſſi les deux autres. Mais ſi nous conſidérons que les idées de la Quantité étendue, qui forment les principaux objets des Mathématiques, peuvent auſſi bien s'acquérir par l'attouchement que par la vue; qu'une attention fixe & continuelle eſt la premiére qualité qu'exige cette étude, & que les Aveugles ſont néceſſairement moins diſtraits que d'autres, nous trouverons peut-être la cauſe qui fait que cette Science eſt adaptée plus qu'aucune autre à leur ſituation. On aſſure que *Démocrite* ſe priva lui-même de la faculté de voir, pour penſer avec plus d'attention, „ perſuadé, dit *Cicéron*[b], que la „ vue empêche qu'on ne puiſſe méditer profondément". Et notre Profeſſeur a mille fois eu occaſion d'obſerver, que les Figures, dont le but eſt d'aider l'imagination, ſervent fréquemment à égarer le jugement. Il eſt certain, quelque utiles qu'elles puiſſent être aux commençans, que l'inventeur doit dans tous les cas aller en avant ſans elles. La figure doit être préſente à ſon imagination d'une façon auſſi générale que la propoſition même, & telle qu'il n'eſt pas poſſible de la tracer ſur le papier. Et je ſuis convaincu que tout Mathématicien qui voudra

a Tritheimius de Scriptoribus Eccleſ. N. DCCCLXXVI: *Nicaſius de Voerda, Mechlinienſis, — captus à tertio ætatis ſuæ anno oculis, — ſecundum noſtra ætate Didymum Alexandrinum exhibuit, dum in omni doctrina & ſcientia, tam divina quam humana eruditiſſimus evaſit. Nam in gymnaſio Colonienſi — jura publicè docuit, libros utriuſque juris, quos nunquam vidit, auditu didicit, tenuit mente, apertè recitavit.*

b Cic. Tuſc. Diſp. V. 39. *Democritus — impediri etiam animi aciem aſpectu oculorum arbitrabatur.*

dra faire des découvertes, & renchérir ſur ce qu'il a lu dans des Livres, trouvera la capacité & les forces de ſon ame augmentées, s'il s'accoutume à penſer & à raiſonner, en fermant les yeux à la lumiére, ou bien en ſe tenant dans quelque endroit auſſi obſcur pour lui que l'Univers l'eſt pour un Aveugle. Mais un homme qui a le malheur d'être aveugle, & qui par cela même eſt exemt des diſtractions que produit la vue, pourra rentrer plus fréquemment & plus avant en lui-même, & n'ayant presque aucun autre amuſement que la recherche de la vérité, ſera bien plus en état encore d'exceller dans des Sciences abſtraites.

Il ſe pourroit très-bien auſſi que la même recette fût très-bonne dans d'autres occaſions, & particuliérement en Muſique & en Poëſie. A-la-vérité il eſt néceſſaire que le Poëte ait auparavant l'imagination ornée de la belle variété d'images que fourniſſent l'Art & la Nature, & qu'il ne peut avoir acquiſes qu'à l'aide de la vue. S'il ſe trouve enſuite privé de ce ſens, *Une Lumiére céleſte en éclairera d'autant mieux toutes les puiſſances de ſon ame*, comme MILTON s'exprime. Auſſi trouvons-nous parmi ceux qui ſe ſont attachés à l'Epopée, (la plus haute entrepriſe que puiſſe tenter un favori d'*Apollon*) deux Poëtes aveugles, qu'on peut dire ſupérieurs à tous ceux qui ont travaillé dans le même genre depuis la création du Monde. Et je ne ſaurois aſſez m'étonner que l'ingénieux Auteur qui a fait des recherches touchant la vie & les écrits d'*Homére*, & qui a tâché de rendre raiſon de la grandeur de ſon génie, en raſſemblant un certain nombre de cauſes naturelles, n'ait pas dit un mot du remarquable trait de conformité que notre Poëte avoit avec l'Auteur de l'*Iliade*.

Ce ne fut que par le ſens du Toucher que Mr. SAUNDERSON acquit d'abord la plupart de ſes idées, & ce ſens étoit en lui d'une fineſſe extrême, comme cela arrive ordinairement aux Aveugles, par une eſpéce de dédommagement de la Nature, ou, ce qui eſt plus apparent, par la néceſſité qui leur eſt impoſée de le conſulter à tout moment. Cependant il ne pouvoit pas, comme quelques perſonnes l'ont cru, (& comme Mr. BOYLE, fondé ſur un témoignage peu digne de foi, le dit d'un homme de *Maſtricht*) diſtinguer les couleurs à l'aide du Toucher. Après quantité d'eſſais faits à cet égard, notre Auteur décida que c'étoit une choſe abſolument impoſſible. Mais il diſtinguoit avec une préciſion merveilleuſe la plus petite différence dans le

poli d'une ſurface. Par exemple, il diſcernoit dans une ſuite de Médailles *Romaines*, les vraies d'avec les fauſſes, quoique ces derniéres euſſent été contrefaites au point de tromper un Connoiſſeur, qui en avoit jugé par la vue. Mais, dit le Profeſſeur, „ Moi, qui n'avois pas ce ſens à conſulter, je ſentois aiſément „ aſſez d'inégalités dans les ſurfaces des Médailles nouvelles pour „ ne les pas confondre avec les autres". Dès qu'il y avoit le moindre changement dans l'Atmoſphére, il s'en appercevoit d'abord; & je me ſouviens même qu'étant un jour avec lui & d'autres dans un Jardin, il remarquoit auſſi bien que nous toutes les fois que quelque nuage obſcurciſſoit les rayons du Soleil. Il ſentoit quand on tenoit un objet près de ſon viſage, ou quand il paſſoit à une petite diſtance de quelque arbre, pourvu que l'air fût ſerein, & qu'il ne fît presque point de vent. C'étoit par les impreſſions de l'air ſur ſon viſage qu'il s'appercevoit de ces différens changemens.

Ce ſeroit un article fort curieux que celui de toutes les reſſources qu'il avoit trouvées pour ſuppléer au ſens de la vue. Il avoit une planchette percée de trous à la diſtance d'un demi-pouce l'un de l'autre : chaque trou contenoit une cheville; & c'étoit en paſſant un fil autour des têtes de ces chevilles, qu'il traçoit toutes les figures rectilignes, dont on ſe ſert en Géométrie, plus vite qu'un autre n'auroit pu faire avec la plume. Il avoit une autre planchette avec des trous diſpoſés en lignes droites pour recevoir des chevilles de différentes grandeurs. Au moyen de cette derniére planchette, il faiſoit les quatre opérations ordinaires de l'Arithmétique auſſi exactement que d'autres les font par écrit. Il ſe ſervoit d'une ſphére armillaire, de quelques figures de Géométrie diſpoſées dans différens Plans, des Solides réguliers taillés en bois, & de la forme de pluſieurs courbes faites de la même maniére, pour donner à ſes diſciples les plus claires idées de ces ſortes de ſujets.

La fineſſe de l'ouïe eſt une eſpéce de dédommagement qui accompagne ordinairement la privation de la vue. Notre Profeſſeur éprouva la vérité de cette obſervation : il diſtinguoit jusqu'à la cinquiéme partie d'une note, & jouoit de la flûte (ce qu'il avoit appris au ſortir de l'enfance comme un amuſement) d'une maniére qui marquoit un tel génie pour la Muſique, qu'il auroit, ſuivant toutes les apparences, autant excellé dans cet Art, que

que dans les Mathématiques, s'il l'avoit cultivé avec la même application. Il conſervoit dans ſa mémoire le ſouvenir du ſon de la voix de ceux-là mêmes qu'il n'avoit vus qu'une ſeule fois, & par un moyen tout pareil il ſe ſouvenoit des lieux où il avoit été. Quand on le menoit dans quelque appartement, il en déterminoit la grandeur au moyen des ſons réfléchis par la muraille: & s'il lui étoit jamais arrivé de ſe promener ſur quelque pavé uni, & qu'on le ramenât au même endroit, il ſavoit dire exactement en quel endroit de la promenade il ſe trouvoit.

Le Lecteur ne pourra qu'admirer la force de ſa mémoire, qui le mettoit en état non ſeulement de multiplier & de diviſer de très-grands nombres, mais auſſi d'en tirer la racine, quarrée ou cubique; il ne cédoit à aucun Calculateur dans la facilité à réſoudre des Problêmes Algébraïques, à ſommer des Suites infinies &c.; & corrigeoit ſur le champ les fautes qui étoient échappées à un Auteur dont on lui liſoit l'Ouvrage, tant rélativement aux ſignes qu'aux nombres. Ceux qui lui liſoient quelques Ouvrages difficiles, avoient ſouvent occaſion de s'étonner de ſon extrême ſagacité, de la promtitude avec laquelle il concevoit les choſes, comme auſſi de ſa facilité à ſuivre le fil d'un raiſonnement, & de l'art avec lequel il ſavoit choiſir les parties les plus propres à lui rappeller une juſte idée du tout. Dans les parties les plus abſtraites des Mathématiques, quand le nombre des conditions étoit grand & avoit quelque choſe d'embarraſſé, on trouvoit ſouvent quelque peine à exciter en lui une idée diſtincte & claire: mais la choſe une fois faite, il lui arrivoit rarement, ou plutôt jamais, d'avoir beſoin de quelque nouveau ſecours; ſon ame retenant fortement les impreſſions, pourvu qu'elles fuſſent duement faites. A l'aide de ces puiſſantes facultés, une imagination claire, une mémoire fidéle, & une raiſon également promte & réglée dans ſes opérations, les Livres de Mathématiques lui étoient toujours ouverts, ſon ame appercevoit chaque vérité dans toutes ſes ſuites & ſes connexions, ce qui lui procuroit le moyen de fonder chaque choſe ſur les principes les plus ſimples; & quand il s'agiſſoit d'en réunir pluſieurs enſemble, il les compoſoit avec un ordre & une ſymétrie admirables.

Comme il ne le cédoit à perſonne en connoiſſances Mathématiques, il avoit auſſi pour enſeigner un talent véritablement ſupérieur. Ce talent frappa le plus dès ſa premiére entrée dans le Mon-

Monde, & doit naturellement avoir été encore augmenté & perfectionné par l'uſage. Il démêloit avec une merveilleuſe ſagacité les difficultés qui arrêtoient le plus les commençans, & les écartoit de leur chemin. Ses expreſſions étoient ſi nettes & ſi préciſes, qu'aucun de ſes diſciples n'avoit la moindre peine à le comprendre. Il étoit particuliérement heureux dans l'Art de rendre une démonſtration plus facile, & j'oſe en appeller à l'Ouvrage ſuivant, ſi les différentes Propoſitions qui ont paſſé par les mains d'*Euclide*, d'*Archiméde*, de *Diophante*, & des autres grands Maîtres tant anciens que modernes, ne ſont pas devenues plus aiſées entre les ſiennes, par le ſoin qu'il a eu de leur donner des fondemens plus ſimples & plus unis.

Son inclination le portoit à étudier la partie la moins abſtraite, & par cela même la plus utile des Mathématiques. Une Propoſition devoit être bonne à quelque choſe pour obtenir ſon attention. Il falloit ou que la méthode de rechercher telle ou telle vérité contribuât à former davantage l'Entendement, & enſeignât quelque nouveau tour de raiſonnement, ou que la Propoſition même tendît au bien de la Société ou de la Science. Il conſidéroit les Mathématiques comme la clef de la Philoſophie, comme le fil deſtiné à diriger nos pas au travers des labyrinthes ſecrets de la Nature; & penſoit que l'ame étoit bien mieux occupée & plus perfectionnée en démêlant ſes Ouvrages, qu'en étudiant les plus ſubtiles propriétés de la grandeur enviſagée d'une maniére abſtraite.

Pour ce qui eſt des méthodes de raiſonner qu'on diſtingue l'une de l'autre par les épithétes de *Géométrique* & d'*Analytique*, dont chacune a ſes partiſans parmi les Mathématiciens de nos jours, Mr. SAUNDERSON rendoit juſtice à toutes deux, en donnant la préférence à chacune d'elles ſuivant les occaſions où il falloit en faire uſage. Il préféroit la méthode *Géométrique* comme plus lumineuſe, en cas que l'application n'en exigeât pas plus de peine. Mais comme le contraire avoit ſouvent lieu, & que par la méthode *Analytique* on avance dans les Mathématiques plus vite & plus loin que par toutes les méthodes des Anciens, & que l'Analyſe eſt le vrai Art d'invention, il croyoit que les Modernes en avoient tiré de très-grands avantages.

L'attente & les déſirs de bien des gens n'eurent pas le pouvoir d'engager notre Profeſſeur dans la vive querelle qui partagea

gea en dernier lieu les Mathématiciens au ſujet de l'*Algorithme* ou de la Doctrine des *Fluxions*. Ce n'eſt pas qu'il n'eût le reſpect le plus profond pour la mémoire de NEWTON, & qu'il ne fût perſuadé que ſon Syſtême de l'Infini s'accordât avec les plus ſévéres règles de la Géométrie: il reconnoiſſoit à-la-vérité que le grand inventeur de ce ſyſtême, ne s'imaginant en aucune maniére avoir à craindre les plus ſubtiles chicanes, ne s'étoit pas exprimé partout avec autant de préciſion qu'il auroit pu faire ſans cela; car il écrivoit uniquement pour ceux qui aimoient la vérité auſſi ſincérement qu'il faiſoit lui-même. Mais l'averſion générale que Mr. SAUNDERSON ſe ſentoit pour tous les écrits polémiques l'empêcha d'entrer dans cette controverſe. Cependant comme il avoit deſſein d'augmenter ſon *Algébre* d'un troiſiéme volume, dont la nature de l'*Algorithme* & la maniére de l'employer devoient former la principale matiére, il n'auroit pas manqué de répondre indirectement à toutes les objections qui avoient été propoſées.

Je ne dois pas oublier à cette occaſion de marquer la haute vénération que notre Profeſſeur témoignoit toujours pour le nom du Chevalier NEWTON. Il diſoit, que toutes les fois qu'il lui étoit arrivé d'avoir en Mathématiques ou en Philoſophie des ſentimens différens des ſiens, il avoit, après un examen plus attentif, conſtamment trouvé que le tort étoit de ſon côté. Plus il liſoit ſes Ouvrages en étudiant la Nature, & plus il ſe ſentoit obligé d'admirer le ſoin & le bonheur que ce Philoſophe incomparable avoit eu de s'exprimer avec toute l'exactitude poſſible. Il nous a laiſſé ſur le Livre de ſes Principes quelques obſervations, qui non ſeulement en expliquent les endroits les plus difficiles, mais ſouvent renchériſſent ſur le texte qu'elles étoient deſtinées à éclaircir, & qui, telles qu'elles ſont, ſeroient un préſent agréable au Public, quoique bien au-deſſous de ce qu'elles auroient été s'il y avoit mis la derniére main.

Notre Auteur avoit compoſé quelque choſe pour l'uſage de ſes Diſciples ſur presque toutes les parties des Mathématiques. Mais il ne paroiſſoit pas dans l'intention de publier aucun de ces Ouvrages, juſqu'à l'an 1733: quand ſes Amis, allarmés d'un violent accès de fiévre qui auroit pu aiſément l'emporter, le ſollicitérent fortement de retrancher une partie du tems qu'il donnoit à ſes colléges (& qui alloit alors à ſept ou huit heures par

jour, au préjudice extrême de ſa ſanté,) & de l'employer à finir quelques-uns de ſes Ouvrages, dont il pourroit faire un legs de grand prix à ſa famille & au Public. Il ſe rendit à ces inſtances au-moins en partie, & compoſa en aſſez peu de tems ce Traité d'Algébre, qu'il fit mettre au net pour être donné à la preſſe.

Ce ſeroit une peine inutile de m'étendre beaucoup ſur la nature de cet Ouvrage, le Lecteur n'ayant qu'à jetter les yeux ſur la table des principales matiéres, & qu'à parcourir le Livre même. J'obſerverai ſimplement, qu'il étoit particuliérement deſtiné à l'inſtruction des commençans, & pour l'uſage de ceux qui ſe vouoient au métier d'inſtruire la Jeuneſſe. C'eſt ce qui avoit déterminé notre Auteur à ne rien négliger de ce qui pouvoit contribuer à rendre ſes idées claires & faciles à comprendre. Son but étoit non ſeulement de faire enſorte que ſon cours d'Algébre fût complet, mais auſſi de contribuer à l'avancement de la Géométrie, en écartant ou réſolvant toutes les difficultés qui lui avoient paru, durant tant d'années qu'il avoit paſſées à enſeigner, les plus propres à arrêter les progrès des commençans dans l'étude des Elémens d'*Euclide*. Outre cela, comme l'Algébre eſt par ſa nature un Art de raiſonner, & peut être conſidérée comme la Logique du Mathématicien, l'Auteur s'eſt attaché par-tout à nous fournir chaque méthode de raiſonner qui peut nous aider dans nos recherches de la Nature. Il a fréquemment expoſé les mêmes vérités ſous différens points de vue, en nous y faiſant arriver par différens chemins. Plus d'une fois auſſi il a eu ſoin d'obſerver la tranſition de la vérité d'une Loi à une autre, & la conſiſtence de ſes différentes Loix dans les cas les plus compliqués, où ces Loix ſemblent le plus ſe contredire, comme ſi la Nature avoit recours à ſes derniers expédiens pour conſerver cette uniformité, qui eſt une des marques caractériſtiques de la vérité. De pareilles obſervations ne peuvent que ſuggérer à l'ame les moyens les plus ſimples & les plus naturels de faire de nouvelles découvertes, & doivent par conſéquent être grandement inſtructives, auſſi-bien qu'agréables à ceux qui aſpirent à des découvertes de ce genre.

Les ſavans Mathématiciens feroient tort néanmoins à la capacité de notre Auteur, s'ils en jugeoient par l'Ouvrage ſuivant, qui eſt bien au-deſſous d'un auſſi beau génie que le ſien. Mais le Lecteur pourra au-moins apprendre par-là combien il doit dé-

déplorer la fin prématurée d'une vie, qui, ſi elle avoit duré encore quelques années, auroit enrichi le Monde ſavant, & transmis à la poſtérité un grand nombre d'admirables productions. Les manuſcrits de Mr. SAUNDERSON ont tous été confiés (pour le bien de ſes enfans) au ſoin & à la direction de Mr. J. ROBARTES de *Twickenham*, préſentement Comte de RADNOR, qui diſpoſera de ces précieux reſtes de la maniére la plus avantageuſe aux Sciences, & la plus honorable à leur Auteur: aſſertion, que nous fondons ſur l'affection & l'eſtime que le Comte de RADNOR a toujours témoignées pour les Sciences, auſſi bien que pour les Savans, & particuliérement pour Mr. SAUNDERSON.

Les talens de ce Grand-homme n'étoient pas reſtreints à l'étude; ſa converſation étoit pleine d'agrémens & d'eſprit, & il faiſoit ſi ſouvent des alluſions ingénieuſes aux objets de la vue qu'on oublioit quelquefois qu'il étoit aveugle. On ne remarqua jamais en lui, ni travers d'humeur, ni aucune de ces diſtractions peu obligeantes qu'on eſt quelquefois en droit de reprocher à ceux qui s'appliquent aux études les plus ſérieuſes. Ses jugemens ſur les différentes paſſions & ſur les intérêts du Genre-Humain ne marquoient pas moins de pénétration que quand il prononçoit ſur des ſujets de Philoſophie. Il s'exprimoit avec une vivacité & une force qui ſurprenoient & fixoient l'attention de tous ceux qui l'entendoient. Mais ſurtout, ſon amour ſincére & ſon profond reſpect pour la vérité brillérent dans tout le cours de ſa vie, & ajoûtérent un nouveau luſtre à ſes plus éclatantes qualités. Il exprimoit toujours ſans partialité ni réſerve ſes ſentimens au ſujet des Hommes & des Opinions, & témoignoit la même franchiſe en louant une choſe ou en la blâmant. Ces qualités qui augmentoient à ſon égard l'attachement & l'eſtime de ſes Amis, lui ſuſcitérent quelques ennemis, & l'expoſérent à des animoſités, que des gens, qui auroient eu plus d'art & plus de complaiſance, ſe ſeroient épargnées, aux dépens d'une ſincérité ſcrupuleuſe & deſintéreſſée.

Il ne me reſte, pour achever ces Mémoires de la Vie du Dr. SAUNDERSON, qu'un mot à dire ſur la maniére dont il la réſigna. Mr. HOLMES l'informa que la mortification gagnoit ſi fort, que ſes meilleurs Amis n'oſoient ſe flatter de ſon rétabliſſement. Il reçut cette nouvelle d'une mort prochaine avec beaucoup de

calme & de ſérénité; & après un court ſilence, il reprit ſon air ordinaire, & entretint ceux qui étoient autour de lui avec autant de préſence d'eſprit qu'il avoit jamais fait dans les heures les plus tranquilles de la plus parfaite ſanté. Il fixa le ſoir du lendemain pour recevoir la Communion des mains de Mr. HOLMES; mais avant que ce Miniſtre vînt, le Malade tomba dans un délire, qui dura juſqu'à ſa mort.

L'ARITHMETIQUE PALPABLE DU DOCTEUR SAUNDERSON, DECHIFFRÉE.

L'Auteur de la Piéce ſuivante ayant remplacé le Dr. SAUNDERSON *en qualité de Profeſſeur, a bien voulu permettre qu'on inſérât cette Piéce ici, pour ſervir d'éclairciſſement à une des inventions de ſon illuſtre prédéceſſeur, quoiqu'il eût d'abord eu deſſein de la placer ailleurs.*

LE fameux Dr. SAUNDERSON, Profeſſeur en Mathématiques dans l'Univerſité de *Cambridge*, nonobſtant la perte de ſa vue, étoit capable de faire de longs calculs Arithmétiques & Algébraïques. C'eſt ce qui paroît, non ſeulement par ſon excellent Traité d'Algébre, qui vient d'être publié, mais auſſi par d'autres monumens inconteſtables, & qui ſubſiſtent encore. Il avoit conſtruit pour ſon uſage particulier une Planchette à calculer, au moyen de laquelle il pouvoit faire promtement toutes les opérations Arithmétiques, par le ſeul ſens du Toucher. Voila pourquoi j'ai appellé cette invention ſon *Arithmétique Palpable.* Comme j'ai eu occaſion, par un effet de la bonté de Madame SAUNDERSON, de voir & d'examiner divers échantillons de cette Arithmétique, qu'il avoit achevés, quoiqu'il n'ait pas laiſſé le moindre indice à l'aide duquel on puiſſe découvrir ſa méthode, j'eus la curioſité d'eſſayer de les déchiffrer (ſi j'oſe parler ainſi), & la choſe m'a réuſſi au-delà de mon attente. Or comme d'autres pourroient avoir la même curioſité, & que d'ailleurs cette méthode ſeroit d'uſage à des perſonnes qui auroient eu auſſi le malheur de perdre la vue, je tâcherai d'en donner l'idée la plus nette qu'il me ſera poſſible.

Sa Planchette à calculer eſt mince & unie, & à un peu plus qu'un pied en quarré: elle ſe trouve enchaſſée dans un petit cadre, dont les

bords s'élévent tant ſoit peu au-deſſus de la Planchette, qui contient un grand nombre de lignes paralléles à d'égales diſtances l'une de l'autre, & d'autres paralléles en même nombre, formant des angles droits avec les premiéres. Les bords de la Planchette ont des rainûres, à la diſtance d'environ un demi-pouce l'une de l'autre, & à chaque rainûre appartiennent cinq des paralléles dont nous venons de parler; ſi bien que chaque pouce quarré eſt diviſé en cent petits quarrés. A chaque point d'interſection la Planchette eſt percée d'un petit trou deſtiné à recevoir une cheville; car c'eſt au moyen de ces chevilles qu'il exprimoit ſes nombres. Il employoit deux ſortes de chevilles de différente grandeur; au-moins leurs têtes étoient différentes, & ſe diſtinguoient ſans peine par l'attouchement. Il avoit dans deux boëtes, qui étoient toujours devant lui, une grande quantité de ces chevilles, dont les pointes étoient ôtées. Voyons préſentement l'uſage qu'il faiſoit du tout.

Pour cet effet, nous obſerverons d'abord, que chaque caractére numérique a dans la Planchette ſon petit quarré particulier, compoſé de quatre autres petits quarrés contigus décrits ci-deſſus; & qui par cela même laiſſent un petit intervalle entre chaque caractére; & ce caractére étoit différent ſuivant la différence de grandeur ou de ſituation d'une ou de deux chevilles, dont il étoit toujours compoſé. Voici le ſyſtême qu'il s'étoit formé. Une grande cheville au centre du Quarré (& c'étoit-là ſon unique place) ſignifie un zéro; c'eſt pourquoi je la déſignerai par ce nom. Sa principale fonction conſiſte à conſerver l'ordre & la diſtance entre les caractéres & les lignes. Ce zéro eſt toujours préſent, excepté le ſeul cas où il s'agit de marquer l'unité, qui eſt exprimée par la ſubſtitution d'une petite cheville à la place de la grande cheville qui eſt au centre. S'il faut exprimer 2, le zéro doit être remis à ſa place, & la petite cheville placée préciſément au-deſſus. Pour exprimer 3 le zéro doit reſter où il eſt, & la petite cheville être fixée à l'angle ſupérieur vers la droite. Pour exprimer 4, la petite cheville deſcend, & ſuit immédiatement le zéro. Pour exprimer 5, la petite cheville deſcend juſqu'à l'angle inférieur à la droite. Pour exprimer 6, la petite cheville doit être au-deſſous de zéro. Pour exprimer 7, la place de la petite cheville eſt l'angle inférieur à la gauche. Pour exprimer 8, la petite cheville

cheville monte, jusqu'à ce qu'elle ſoit à la même hauteur que le zéro. Enfin, pour exprimer 9, la petite cheville occupe l'angle ſupérieur à la gauche. Par cette invention, les dix caractéres numériques pouvoient ſe connoître ſans peine au moyen du ſeul attouchement. Mais pour que le Lecteur ſe forme une idée plus diſtincte de ces caractéres, il eſt prié de jetter les yeux ſur la *Fig.* I.

Tel étoit le moyen dont il ſe ſervoit pour tracer ſur ſa Tablette un nombre quelconque; & quand le caractére étoit tracé, il n'avoit qu'à le parcourir légérement des doigts pour ſavoir ce qu'il ſignifioit. Les grandes chevilles ou zéros, qui étoient toujours aux centres des petits Quarrés, & le plus ſouvent à d'égales diſtances l'une de l'autre, lui ſervoient de guide pour garder la ligne, pour fixer les limites de chaque caractére, & empêcher toutes les autres mépriſes qui pourroient avoir lieu ſans cela. Comme trois des paralléles perpendiculaires ſuffiſent pour un ſeul caractére, trois des paralléles horizontales ſuffiſent pour une ligne de caractéres, & les trois paralléles ſuivantes pour une autre ligne, & ainſi de ſuite, ſans aucun risque de les confondre. Et de cette maniére on concevra aiſément, comment il pouvoit avoir à la fois ſur ſa Planchette quelques lignes de caractéres, l'une au-deſſous de l'autre; ou comment il pouvoit dériver un nombre d'un autre; ou, en un mot, comment il pouvoit faire les calculs requis. Il plaçoit & déplaçoit ſes chevilles, à ce qu'on m'a aſſuré, avec une viteſſe & une facilité incroyables, au grand étonnement de tous les ſpectateurs. Quelquefois il interrompoit un calcul déjà avancé, & en reprenoit le fil quand il vouloit, ſachant d'abord où il en étoit, ſimplement en parcourant des doigts ſa Planchette. Il y a un expédient, qui, ſurtout dans de longs calculs, auroit conſidérablement abrégé le travail, & ainſi je ne doute pas qu'il n'y ait eu recours très-ſouvent. Cet expédient conſiſte à préparer la Planchette d'avance, (ce que tout autre pouvoit faire pour lui,) en garniſſant de grandes chevilles, c'eſt-à-dire de zéros, chaque troiſiéme trou de chaque troiſiéme ligne paralléle. En voulant faire enſuite quelque calcul, il ne lui reſtoit qu'à compleier chaque caractére, en plaçant une petite cheville où il le falloit: excepté quand il étoit queſtion d'exprimer une unité, auquel cas il devoit changer la grande cheville en une petite.

Les

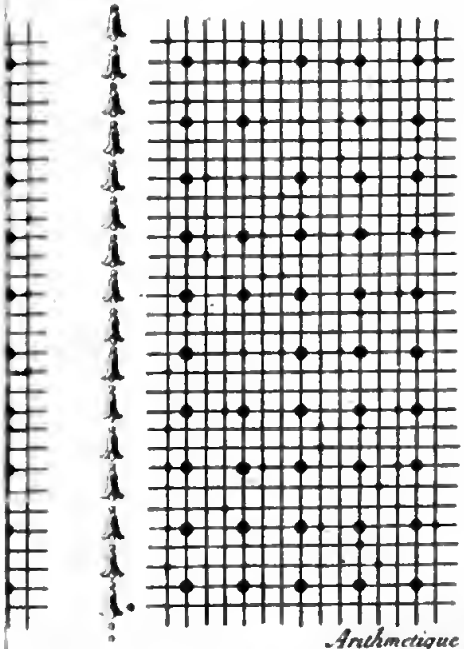
Les échantillons de cette Arithmétique que j'ai parcourus & réduits à des nombres vulgaires, consistent dans des Tables Arithmétiques, qu'il avoit calculées & gardées pour son propre usage ; mais je ne saurois deviner le but qu'il s'est proposé en les calculant. Elles semblent avoir quelque rapport aux Tables des Sinus naturels, des Tangentes, & des Sécantes, & consistent en quatre piéces de bois solide, ayant la forme de parallépipédes rectangles, & environ onze pouces de longueur sur cinq & demi de largeur, & quelquefois plus d'un demi pouce d'épaisseur. Les deux Faces opposées de chacun de ces parallépipédes sont partagées en petits Quarrés préciſément comme la Planchette décrite ci-dessus, mais n'ont de trous qu'aux endroits nécessaires, les chevilles y étant affermies. Chaque Face contient neuf petites Tables Arithmétiques, chacune de dix nombres, & chaque nombre, généralement parlant, est composé de cinq caractéres. Pour rendre cet article plus intelligible, j'ai joint ici une de ces petites Tables, telle que je l'ai trouvée, avec mon interprétation. Voyez la *Fig.* II.

Mais outre l'usage Arithmétique de cette Table, qu'il s'étoit principalement proposé en la construisant, il s'en servoit aussi pour décrire exactement des Figures Géométriques, composées de lignes droites, & s'entre-coupant à différens angles, dont j'ai vu quelques exemples. Il faisoit la chose de deux façons, ou par des chevilles mises en rangs, qui ressembloient à des lignes ponctuées, ou bien par des chevilles placées aux intersections. En passant ensuite un fil de soye autour des têtes, il décrivoit à volonté des lignes droites telles qu'il les vouloit. Il ne paroît pas qu'il ait eu aussi quelques Lettres Palpables, semblables à nos Caractéres d'Imprimerie, pour distinguer les divers points angulaires, & pour l'aider à démontrer les propriétés de ces Figures. S'il avoit eu besoin de pareils secours, son génie inventif n'auroit pas manqué de les lui fournir. On concevra aisément, que la même Table pouvoit servir à représenter toutes sortes d'Equations Algébraïques, & servir aux différentes Réductions de ces Equations, surtout à l'aide des caractéres que nous venons d'indiquer, ou de quelque chose d'analogue à cela. Et rien n'empêche qu'il n'ait eu des caractéres en forme de chevilles, pour les signes Algébraïques ordinaires, & pour exposer

plus

I.

Fig. II



Arithmetique Palpable Page. XXXI.

plus diſtinctement à ſes Diſciples les différentes opérations; ce qui auroit donné à ſa Planchette quelque air d'une Forme d'Imprimerie, qu'il auroit pu (j'en ſuis ſûr) lire par le ſeul attouchement, s'il avoit pris la peine de s'y appliquer. Des gens dignes de foi m'ont dit qu'il épelloit fort bien; qu'il connoiſſoit les figures des Lettres, tant petites que capitales, & qu'il s'amuſoit quelquefois, quand l'occaſion s'en préſentoit, à lire avec ſes doigts les Inſcriptions gravées ſur des Pierres Sépulcrales. On l'a entendu aſſez fréquemment ſe plaindre de n'avoir pas appris dans ſa jeuneſſe à écrire, ne doutant nullement qu'il n'en fût venu à bout. Aucune de ces choſes ne paroîtra incroyable à ceux qui ſavent combien il étoit habile à juger de la bonté d'un Inſtrument de Mathématique, & de la juſteſſe de ſes diviſions, en ne l'examinant que par le ſeul attouchement; & on l'a conſulté plus d'une fois ſur ce ſujet. Ceci au-moins eſt certain, qu'il manioit toute ſorte d'équations, & autres calculs embarraſſés, avec beaucoup d'intelligence & de dextérité. Je n'entreprendrai point cependant de déterminer juſqu'à quel point il ſe repoſoit ſur la force de ſon imagination (qui étoit prodigieuſe), & en quel cas il avoit recours à des inventions Méchaniques pour la ſoulager.

Après les merveilles que je viens de décrire, & quelques autres du même genre que j'ai vues, il ne me reſte plus qu'à faire cette obſervation générale, que comme la connoiſſance & l'uſage des Symboles (c'eſt-à-dire des ſignes ſenſibles & arbitraires de quelques idées purement intellectuelles) eſt de la plus grande importance & d'une immenſe étendue dans toutes les parties des Mathématiques, notre incomparable Auteur avoit inventé une nouvelle eſpéce de Symboles Mathématiques, dont on n'avoit jamais entendu parler auparavant, & qui étoit particuliérement adaptée à ſa ſituation. Les Symboles ſenſibles, dont on ſe ſert communément pour repréſenter des idées Mathématiques, & pour les communiquer à notre ame ou à celle des autres, ont rapport à l'ouïe ou à la vue. Mr. SAUNDERSON a véritablement tiré grand parti des Symboles rélatifs à l'ouïe, & doit une partie conſidérable de ſes connoiſſances aux converſations qu'il a eues avec d'autres, quoique principalement à la lecture qu'on lui a faite des meilleurs Mathématiciens. Mais

il étoit entiérement privé de l'uſage des Symboles viſibles, qui nous paroiſſent bien néceſſaires, puiſque ce n'eſt que par leur moyen que nous avons acquis la meilleure partie de nos connoiſſances Mathématiques. Que fit-il pour vaincre un obſtacle qui ſembloit inſurmontable? Il eut recours à un autre ſens, qu'il poſſédoit à un grand degré de perfection, & ſubſtitua le tact à la vue, en inventant une ſorte de Symboles Mathématiques, qu'on pourroit appeller Symboles Palpables. Ce fut à leur aide qu'il fit paſſer dans ſon entendement des idées, auxquelles l'entrée par ſes yeux étoit refuſée. Ainſi par le ſecours de ces Symboles, qui ne pouvoient qu'être très-imparfaits, & au moyen d'une conception prompte, & d'une perſévérance obſtinée, il fit dans l'étude des Mathématiques des progrès qui lui attirérent une admiration générale. Tels furent les inſtrumens, bien peu proportionnés à l'effet qu'ils produiſirent, dont il ſe ſervit pour acquérir les idées Mathématiques les plus abſtraites & les plus ſublimes, & qui le mirent en état de déduire de ces idées des concluſions générales & très-utiles. Tout homme qui aura des yeux, quelque intelligence, & tant ſoit peu de candeur, ne ſauroit diſconvenir que ce Phénoméne ne ſoit tout-à-fait ſurprenant. Mon imagination eſt ſaiſie d'étonnement, quand je me repréſente que, durant tout le cours de ſes études, ce Grand-homme a lutté avec des forces inégales contre les plus terribles découragemens, & que cependant ſa ſagacité, ſon induſtrie & ſa patience l'avoient mis en état de ſurmonter toutes les difficultés qu'il avoit rencontrées en ſon chemin. Un ſi heureux ſuccès étoit dû à ſes travaux, & à la noble ambition qu'il avoit conçue d'appartenir un jour à la premiére Claſſe des Mathématiciens.

TABLE

TABLE
DES
PRINCIPAUX ARTICLES.

AVIS AU LECTEUR. Pag. 1
Queſtions pour s'exercer à la Multiplication. ibid.
Queſtions pour s'exercer à la Diviſion. 4
Queſtions pour s'exercer à la Règle de Trois: & premiérement à la Règle de Trois directe. 7
Queſtions pour la Règle de Trois inverſe. 14
Queſtions qui regardent l'extraction des Racines quarrées. 18

INTRODUCTION à la Doctrine des Fractions vulgaires & des Fractions décimales. 19

ART. 1. Définitions. ibid.
2. *Des Fractions proprement & improprement ainſi nommées, & de la réduction d'une Fraction improprement dite à un entier ou à un nombre entier avec une Fraction adhérente.* 20
3. *La réduction d'un nombre entier ou mixte à une fraction improprement dite.* 21
4. Lemme. *Si on prend un entier, tel qu'une livre ſterling, & une fraction comme $\frac{3}{4}$, je dis que $\frac{3}{4}$ d'une livre ſt. eſt la même choſe que $\frac{1}{4}$ de trois livres ſt.* 22
5. *Maniére d'eſtimer quelque partie fractionelle que ce ſoit d'un entier en parties de moindre dénomination, & réciproquement.* ibid.
6. *Préparations pour d'autres réductions & opérations ſur les Fractions.* 23
7. *Réductions des Fractions aux plus ſimples termes.* 24
8. *Réduction des Fractions de différentes dénominations à d'autres de même dénomination.* 26
9. *Addition des Fractions.* 28
10. *Souſtraction des Fractions.* 30
11. *Multiplication des Fractions.* 31
12. Lemme. *Soit* n *un Nombre quelconque entier, ou mixte, ou une Fraction; je dis que le quotient de* n *diviſé par quelque Fraction que ce ſoit, eſt égal au produit de* n *multiplié par l'inverſe de cette Fraction.* 35

ART. 13. *De la Diviſion des Fractions.* 36
14. *Remarques ſur la multiplication & ſur la diviſion des Fractions.* 38
15. *Règle de proportion en Fractions.* 39
16. *De l'extraction des racines en Fractions.* 40
17. *Des Fractions décimales: & premiérement de la maniére de les marquer.* 41
18. *Addition & ſouſtraction des Fractions décimales.* 42
19. *Multiplication des Fractions décimales.* ibid.
20. *Diviſion des Fractions décimales.* 43
21. *Réduire une Fraction ordinaire à une Fraction décimale.* 44
22. *Réduire les parties décimales d'un Nombre entier à telles autres parties, dans leſquelles ce nombre eſt ordinairement diviſé.* 45
23. *Réduire les différentes parties d'un Entier en parties décimales équivalentes.* ibid.
24. *Extraction de la racine quarrée en Fractions décimales.* 46

ELEMENS D'ALGEBRE.

LIVRE I.

ART. 1. *Définition de l'Algébre.* 48
2. *Des Quantités affirmatives & négatives en Algébre.* 49
3. *De l'Addition des Quantités Algébraïques.* 51
4. *De la Souſtraction des Quantités Algébraïques.* 53
5. *De la Multiplication des Quantités Algébraïques: & premiérement, comment les ſignes du Multiplicateur & du Multiplicande étant donnés, on trouve le ſigne du produit.* 56
6. *De la Multiplication des Quantités Algébraïques ſimples.* 58
7. *Des Puiſſances & de leurs expoſans.* 60
8. *La Multiplication des Nombres irrationels.* ibid.
9. *De la Multiplication des Quantités Algébraïques compoſées.* 61
10. *La preuve de la Multiplication compoſée.* 63
11. *Comment par la Multiplication en Algébre on trouve des Théorêmes généraux.* ibid.
12. *Comment on peut exprimer les trois côtés d'un Triangle-rectangle en nombres rationels.* 64
13. *De la Diviſion des Quantités Algébraïques ſimples.* 66
14. *De la Diviſion des Quantités Algébraïques compoſées.* 67
15. *De la Proportion en nombres.* 75
16. *Les propriétés communes de la Proportionalité en nombres démontrées.* 77

17. *Comment on tire les racines des Quantités Algébraïques ſimples.* 81
ART. 18. *Comment on tire les racines quarrées des Quantités Algébraïques compoſées.* ibid.
19. *Tirer la racine quarrée d'un binôme par le moyen d'une ſuite infinie.* 83
20. *Préparations pour la démonſtration de la règle, par le moyen de laquelle on trouve le plus grand Diviſeur commun de deux nombres donnés.* 86
21. *La règle expliquée & démontrée.* 87
22. *Les différentes règles données au ſujet des Fractions éclaircies par des exemples en Quantités Algébraïques.* 89
23. *Des Equations en Algèbre, & particuliérement des Equations ſimples. Comment on réſout ces Equations.* 93
24. *Exemples de la manière de réſoudre des Equations ſimples.* 97

LIVRE II.

25. *Préparations pour les ſolutions des Problêmes Algébraïques.* 105
26—97. *Solution de quelques Problêmes qui ſe réduiſent à des Equations ſimples.* 106
70. *De la méthode de réſoudre les Problêmes, où il y a pluſieurs quantités inconnues, repréſentées par différentes lettres.* 136
92. *Quelques réflexions concernant les conditions des Problêmes.* 156

LIVRE III.

98. *Quelques obſervations deſtinées à faciliter l'intelligence de la règle pour l'extraction de la Racine quarrée.* 166
99. *Recherche d'une règle pour l'extraction de la Racine quarrée.* 168
100. *Fondement de la règle ordinaire pour l'extraction de la Racine quarrée.* 170
101. *De la compoſition & de la réſolution d'un Quarré, qui a un binôme pour racine.* 171
102. *Formule à laquelle toutes les Equations du ſecond degré doivent être réduites pour les réſoudre.* 173
103. *Théorême général pour réſoudre toutes les Equations du ſecond degré.* ibid.
104. *Démonſtration du Théorême précédent.* 176
105. *Divers exemples de la ſolution des Equations affectées du ſecond degré, tant par le moyen du théorême général, qu'indépendamment de ce théorême.* 177

ART. 106. *Comment il faut s'y prendre quand les racines d'une Equation du ſecond degré ſont inexprimables.* 182

107. *Des Racines impoſſibles dans une Equation du ſecond degré, & d'où vient leur impoſſibilité.* 184

108. *Manière de trouver la ſomme & le produit des deux racines d'une Equation du ſecond degré; comme auſſi celle de former une pareille équation, qui ait pour ſes racines deux nombres quelconques donnés.* 185

109. *Comment on détermine les ſignes des racines poſſibles d'une Equation du ſecond degré ſans la réſoudre.* 186

110. *Des Equations du quatriéme degré, & autres qui paroiſſent ſous la forme d'Equations de deux dimenſions.* 189

111—133. *Solutions de quelques Problêmes qui ſe réduiſent à des Equations du ſecond degré.* 190

LIVRE IV.

Des Problêmes généraux & des Théorêmes généraux qu'on peut en déduire; avec la maniére d'appliquer & de démontrer ces Théorêmes.

ART. 134. *Le deſſein de ce quatriéme Livre marqué plus en détail.* 213

135. PROB. 1. *On demande deux nombres tels, que leur ſomme ſoit* a, *& leur différence* b. ibid.

136. PROB. 2. *On demande trois nombres qui ſoient tels, que la ſomme du premier & du ſecond ſoit* a, *celle du premier & du troiſiéme* b, *& celle du ſecond & du troiſiéme* c. 215

SCHOLIE. *On demande trois nombres, qui ayent les propriétés ſuivantes; que le produit du premier & du ſecond ſoit* a, *celui du premier & du troiſiéme* b, *& enfin celui du ſecond & du troiſiéme* c. 217

137. PROB. 3. *On demande deux nombres qui ayent pour différence* b, *& a pour différence de leurs quarrés.* ibid.

138. PROB. 4. *Soient* r *&* s *deux multiplicateurs donnés, dont* r *eſt le plus grand; on demande de partager un nombre donné comme* a *en deux parties, tellement que le produit de la plus grande partie par le plus petit multiplicateur ſoit égal au produit de la plus petite partie par le plus grand multiplicateur.* 218

139. PROB. 5. *Que* r *&* s *ſoient deux multiplicateurs donnés, &* r *le plus grand; on demande de partager un nombre donné comme* a *en deux*

deux parties, tellement que r *fois une partie, plus* s *fois l'autre partie, faſſent le nombre donné* b. 220

ART. 140. PROB. 6. *Quelqu'un ayant rencontré un certain nombre de Pauvres, donne à chacun d'eux* p *ſous & ſe trouve avoir* a *ſous de reſte; mais s'il leur avoit voulu donner à chacun* q *ſous, il auroit trouvé qu'il lui manquoit pour cela* b *ſous. Combien y avoit-il de Pauvres?* 221

141. PROB. 7. *On demande de partager le nombre donné* a *en deux parties, qui ſoient l'une à l'autre comme* r *à* s. 222

142. PROB. 8. *On demande un nombre, qui étant ajoûté ſéparément à deux nombres donnés, dont* a *eſt le plus grand &* b *le plus petit, faſſe deux ſommes, dont la premiére ſoit à la ſeconde comme* r *à* s; *ainſi il faut que* r *ſoit plus grand que* s. 223

143. PROB. 9. *Partager un nombre donné* a *en deux parties, tellement que la quantité dont une de ces parties ſurpaſſe* b, *ſoit à ce qui manque à l'autre partie pour égaler* b, *comme* r *à* s. 224

144. PROB. 10. *De deux endroits éloignés l'un de l'autre de la diſtance* a, *partent en même tems deux hommes, dont l'un avance à raiſon de* p *milles dans le nombre d'heures* q, *& l'autre à raiſon de* r *milles dans le nombre d'heures* s: *on demande combien de tems ils ont été en chemin, & combien de milles chacun d'eux a faits dans le tems qu'ils ſe ſont rencontrés.* 225

145. PROB. 11. *Suppoſons que* p *livres d'or péſent* q *livres dans l'eau, & que* r *livres d'argent péſent* s *livres dans l'eau; ſuppoſons de-plus qu'une maſſe peſant* a *livres, & compoſée d'or & d'argent, ne péſe que* b *livres dans l'eau: on demande la quantité d'or, & celle d'argent qu'il y a dans la maſſe.* 226

146. PROB. 12. *Il y a deux tuyaux dont l'ouverture eſt telle que l'eau qui paſſe par l'un remplit une citerne dans le tems* p; *celle qui paſſe par l'autre remplit la citerne dans le tems* q: *en quel tems la citerne ſera-t-elle remplie ſi l'eau coule à la fois par les deux tuyaux?* 228

147. PROB. 13. *Quelqu'un a le nombre* n *d'enfans, dont les âges ſont en progreſſion arithmétique; la différence commune de cette progreſſion eſt* d, *& l'âge de l'aîné des enfans eſt à celui du plus jeune comme* r *à* s: *on demande l'âge de l'aîné & celui du plus jeune.* 229

148. PROB. 14. *Quel eſt le nombre qui, ajoûté ſéparément au nombre* a, *au nombre* b, *& au nombre* c, *tous nombres donnés, formera*

mera trois ſommes en proportion Géométrique continue? 229

ART. 149. PROB. 15. *On demande deux nombres, dont le plus grand ſoit au plus petit comme* p *à* q, *& dont le produit ſoit à leur ſomme comme* r *à* s. 232

150. PROB. 16. *Quelqu'un tire une certaine quantité de vin d'une piéce pleine, qui contenoit le nombre de pintes* a; *ayant rempli enſuite la piéce d'eau, il tire de ce mêlange de vin & d'eau autant qu'il avoit tiré de vin pur la premiére fois: la même choſe ayant été faite juſqu'à quatre fois, deſorte qu'il ne reſte de vin pur dans la piéce que le nombre de pintes* b, *on demande combien de pintes ont été tirées chaque fois.* 233

151. PROB. 17. *On demande deux nombres tels, que le produit de leur multiplication ſoit* p, *& le quotient de la diviſion du plus grand par le plus petit* q. 235

152. PROB. 18. *Soient* x *&* y *deux quantités inconnues, &* a, b, c, d, e, f, *autant de quantités connues: on demande les valeurs de* x *&* y *par le moyen des deux équations ſuivantes, ſavoir,* $ax+by=c$, *&* $dx+ey=f$. ibid.

153. PROB. 19. *Deux perſonnes* A *&* B *parloient de leur argent.* A *dit à* B, *donnez-moi* q *de votre argent, & j'aurai alors* r *fois autant qu'il vous en reſtera.* B *dit à* A, *donnez-moi* q *de votre argent, & j'aurai alors* s *fois autant qu'il vous en reſtera: on demande l'argent que chacun d'eux avoit.* 238

154. PROP. 20. *On demande deux nombres* x *&* y, *qui ſoient tels, que ſi on les multiplie l'un & l'autre par* r, *le premier produit ſoit un quarré, & le ſecond le côté ou la racine de ce quarré; mais que ſi on multiplie l'un & l'autre par* s, *le premier produit ſoit un cube, & le ſecond la racine de ce cube.* 239

155. PROB. 21. *On demande deux nombres, dont la différence multipliée par la différence de leurs quarrés faſſe* a, *& dont la ſomme multipliée par la ſomme de leurs quarrés faſſe* b. 240

156. PROB. 22. *Que d'un jeu ordinaire de cinquante-deux cartes on faſſe pluſieurs monceaux de la maniére ſuivante: que ſur la carte la plus baſſe de chaque monceau, on en mette autant d'autres qu'il eſt néceſſaire pour arriver au nombre de douze; comme ſi la valeur de la carte la plus baſſe étoit un quatre, il faudroit mettre par-deſſus huit autres cartes; ſi c'étoit un cinq, il faudroit en mettre ſept; ſi c'étoit* a, *douze* $-a$ *&c. On demande, le nombre des monceaux, que nous appellerons* n, *étant donné, comme auſſi le nombre des cartes qui reſtent en main, que nous nomme-*

rons

rons r, *de trouver la ſomme des valeurs de toutes les cartes les plus baſſes.* 241

Art. 157. Prob. 23. *On demande les valeurs des trois quantités inconnues* x, y *&* z, *au moyen de trois équations telles que* px + qy + rz = s, *où les quantités repréſentées par* p, q, r, *ſont ſuppoſées connues.* 242

158. Prob. 24. *On demande deux nombres tels, que leur ſomme ſoit* a, *& le produit de leur multiplication* b. 244

159. Prob. 25. *On demande deux nombres dont la ſomme ſoit* a, *& la ſomme de leurs quarrés* b. 245

160. Prob. 26. *On demande deux nombres, dont la ſomme ſoit* a, *& la ſomme de leurs cubes* b. 246

161. Prob. 27. *On demande deux nombres qui ayent pour différence* d, *& qui, s'ils diviſent l'un & l'autre le nombre donné* a, *produiſent deux quotiens dont la différence ſoit* b. 247

162. Prob. 28. *On demande un nombre, qui étant ajoûté à ſa racine quarrée faſſe* a. 248

163. Prob. 29. *On demande trois nombres en proportion continue, dont la ſomme ſoit* a, *& la ſomme de leurs quarrés* ab. 249

164. Prob. 30. *On demande quatre nombres en proportion continue, & tels que la ſomme des extrêmes ſoit* a, *& celle des termes moyens* b. 250

165. Prob. 31. *On demande deux nombres, dont la ſomme ajoûtée à la ſomme de leurs quarrés ſoit* a, *& dont la différence ajoûtée à la différence de leurs quarrés ſoit* b. 253

166. Prob. 32. *On demande deux nombres dont la ſomme des quarrés ſoit* a, *& qui donnent pour produit de leur multiplication* b. 254

167. Prob. 33. *Une pierre tombe dans un puits vuide d'eau, & quelque tems après on entend la pierre donner contre le fond, on demande, le tems que la pierre met à tomber étant donné, quelle eſt la profondeur du puits.* 255

Solution de deux Problêmes par Mr. Abraham de Moivre.

Prob. 1. *La ſomme de quatre quantités en proportion continue étant donnée, comme auſſi la ſomme de leurs quarrés, trouver les proportionelles.* 260

Prob. 2. *La ſomme de cinq nombres en proportion Géométrique, & la ſomme de leurs quarrés étant données, on demande les nombres mêmes.* 262

LIVRE V.

Art. 168. *En quels cas un Problême eſt ſuſceptible de pluſieurs réponſes.* 265

ART. 169. *Définitions d'un multiple & d'un multiple commun avec un Corollaire.* 267

170. LEM. 1. *Soient* a *&* b *deux quantités quelconques dont le multiple commun eſt* c; *je dis que ce plus petit multiple commun* c *meſurera tout autre multiple commun* d *des mêmes quantités.* 268

171. LEM. 2. *Deux nombres inégaux* a *&* b *étant donnés, on demande leur plus petit multiple commun.* 269

172. LEM. 3. *On demande le plus petit multiple commun de trois ou de plus de trois nombres donnés.* 270

173. LEM. 4. *Les deux quantités inégales* a *&* b, *dont* c *&* d *ſont reſpectivement les multiples, étant données, on demande de trouver autant de multiples qu'on voudra des mêmes quantités avec la même différence, c'eſt-à-dire, que le multiple de* a *ſurpaſſe toujours celui de* b *de la quantité* $\overline{c-d}$, *en cas que* c *ſoit plus grand que* d; *ou bien que le multiple de* b *ſurpaſſe toujours celui de* a *de la quantité* $\overline{d-c}$, *en cas que* d *ſoit plus grand que* c. 271

174. LEM. 5. *Soient* a *&* b *deux quantités dont la plus grande meſure commune eſt* c: *je dis que ſi deux multiples inégaux de* a *&* b *ſont pris & comparés enſemble, leur différence ne ſauroit jamais être plus petite que la plus grande meſure commune* c. ibid.

175. LEM. 6. *Deux nombres, comme* a *&* b, *dont* a *eſt ſuppoſé le plus grand, étant donnés, on demande deux multiples inégaux de ces nombres, dont la différence ſoit la plus petite poſſible, c'eſt-à-dire, par le dernier article, dont la différence ſoit la plus grande meſure commune de* a *&* b. 272

176. LEM. 7. *Si dans quelqu'une des équations de l'Article précédent, les coëfficiens de* a *&* b *ſont multipliés en croix par les coëfficiens de* a *&* b *dans l'équation la plus proche, ſoit au-deſſus ou au-deſſous, le coëfficient de* b *étant conſidéré comme affirmatif, je dis que la différence des deux produits, qui naîtront de cette multiplication, ſera toujours égale à l'unité.* 275

177. LEM. 8. *Suppoſant tout comme dans les deux derniers articles, ſi les coëfficiens de* a *&* b *dans les différentes équations du ſcholie ajoûté à l'Art.* 175, *ſont tournés en fractions, en faiſant des coëfficiens de* b *les numérateurs, & de ceux de* a *les dénominateurs; je dis cela étant, que les fractions* $\frac{o}{1}$, $\frac{1}{o}$, $\frac{P}{p}$, $\frac{Q}{q}$, $\frac{R}{r}$, $\frac{S}{s}$, $\frac{T}{t}$ *ſeront toutes réduites à leurs moindres termes.* 276

ART. 178.

ART. 178. LEM. 9. *Suppoſant tout comme dans le dernier Article, je dis que les fractions* $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$, $\frac{P}{p}$, $\frac{Q}{q}$, $\frac{R}{r}$, $\frac{S}{s}$, $\frac{T}{t}$ *ſont de nature à ſe trouver alternativemnt plus grandes & plus petites que la fraction* $\frac{a}{b}$, *vers laquelle néanmoins elles ſont conſtamment convergentes.* 277

179. LEM. 10. *Suppoſant tout comme dans les Articles précédens, je dis que les fractions* $\frac{P}{p}$, $\frac{Q}{q}$, $\frac{R}{r}$, $\frac{S}{s}$, $\frac{T}{t}$, *expriment la fraction* $\frac{a}{b}$ *plus exactement, que ne pourroit faire aucune autre fraction quelconque dont le dénominateur ſeroit plus petit; & particuliérement que la fraction* $\frac{T}{t}$ *approche davantage de la fraction* $\frac{a}{b}$ *que ne peut faire aucune autre fraction dont le dénominateur eſt plus petit que* t. 278

Méthode d'exprimer une raiſon donnée à un degré donné d'exactitude, éclaircie par l'exemple de la raiſon qu'il y a de la circonférence d'un cercle à ſon diamétre. 281

Des fractions convergentes, tant principales que ſecondaires. 282

180. LEM. 11. *Qu'il y ait deux fractions* $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$ *telles, que ſi l'on diviſe* a *par* b, *&* c *par* d, *& que l'opération étant continuée ſuivant la méthode preſcrite pour trouver la plus grande meſure commune, les quotiens nés de ces diviſions ſoient trouvés les mêmes en grandeur, en ordre & en nombre: je dis, que les fractions* $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$ *ſeront égales l'une à l'autre.* 285

De ce Lemme peut ſe déduire une définition générale de la proportionalité. 286

DES INCOMMENSURABLES.

ART. 181. *Apologie de la liberté que qu'on prend d'introduire ici la doctrine des Incommenſurables.* 287

182. *Définitions avec leurs corollaires: & Axiômes.* 288

183. PROP. 1. *Toutes les quantités commenſurables ſont l'une à l'autre comme nombre à nombre; & réciproquement, toutes les quantités qui ſont l'une à l'autre comme nombre à nombre, ſont commenſurables.* 289

184. PROP. 2. *Des quantités iucommenſurables ne ſont pas l'une à l'au-*

l'autre comme nombre à nombre; & réciproquement, des quantités, qui ne ſont pas l'une à l'autre comme nombre à nombre, ſont incommenſurables. 290

ART. 185. PROP. 3. *Si quatre quantités* a, b, c *&* d *ſont proportionelles, deſorte que* a *ſoit à* b *comme* c *eſt à* d, *je dis, qu'en cas que les deux premiéres* a *&* b *ſoient commenſurables, les deux derniéres* c *&* d *le ſeront auſſi; mais qu'en cas que les deux premiéres* a *&* b *ſoient incommenſurables, les deux derniéres* c *&* d *ſeront auſſi incommenſurables.* ibid.

186. PROP. 4. *Si deux quantités ſont commenſurables à une troiſiéme, elles ſeront commenſurables entre elles.* 291

187. PROP. 5. *Comme des quantités incommenſurables ne ſauroient être égales l'une à l'autre, de-même aucun multiple, ni aucune partie ou parties de l'une ne peuvent être = à quelque multiple, partie ou parties de l'autre.* 292

188. LEMME *Soient deux quantités homogénes finies* a *&* q, *& qu'on retranche de la plus grande* a *plus de ſa moitié, & enſuite plus de la moitié du reſte, & du dernier reſte plus de la moitié, &c. je dis, que cette ſouſtraction pourra être continuée juſqu'à ce qu'il y ait un reſte plus petit que* q. 293

189. PROP. 6. *Soient* a *&* b *deux quantités homogénes, à l'égard desquelles doive être pratiquée la diviſion ſuivante: diviſez* a *par* b, *&* a. b. c. d. e. f. g. h. *que le reſte ſoit* c; *puis diviſez* b 41. 24. 17. 7. 3. 1. 0. 0. *par* c, *& que le reſte ſoit* d; *puis diviſez* c *par* d *& que le reſte ſoit* e, *&c. Je dis que la ſérie* a, b, c, d, e, *&c. pourra être continuée juſqu'à ce qu'on arrive à des termes plus petits qu'aucune quantité aſſignable, tel que* q. ibid.

190. PROP. 7. *Suppoſant tout comme dans la derniére propoſition, je dis, qu'une quantité quelconque, qui meſurera deux termes voiſins de la ſérie précédente, meſurera tous les autres termes ſans exception.* 294

191. PROP. 8. *Suppoſant tout comme dans les deux propoſitions précédentes, je dis que ſi les premiers termes* a *&* b *ſont commenſurables, la ſérie* a, b, c, d, e *&c. ne pourra être continuée à l'infini; mais qu'elle ſera terminée de ſorte que le dernier terme de la ſérie ſe trouvera être la plus grande meſure commune de* a *&* b; *& réciproquement, ſi les termes* a, b, c, d, e *&c. ne ſont point continués à l'infini, je dis que les premiers termes* a *&* b *ſont commenſurables.* ibid.

ART. 192.

ART. 192. PROP. 9. *On demande, trois quantités commenſurables* a, b & c *étant données, de trouver leur plus grande meſure commune.* 296

193. PROP. 10. *Toutes les fractions égales, réduites à leurs derniers termes, deviennent une ſeule & même fraction.* 297

194. PROP. 11. *S'il y a trois nombres* a, b & c, *dont* a *ſoit un nombre premier à l'égard de* b, *& que* b *ſoit un multiple de* c, *je dis, que* a *ſera un nombre premier à l'égard de* c. 299

195. PROP. 12. *Si deux nombres* a & b *ſont tous deux premiers à l'égard d'un troiſiéme nombre* c; *je dis, que leur produit* ab *ſera auſſi un nombre premier à l'égard du troiſiéme nombre* c; *ou (ce qui revient au même) que le produit* ab *& le nombre* c *n'auront d'autre meſure commune que l'unité.* 300

196. PROP. 13. *S'il y a trois nombres homogénes* a, b & c *en proportion continue, & que le terme moyen ſoit commenſurable aux extrêmes; je dis, que les plus petits nombres qui expriment la raiſon des extrêmes ſeront tous deux des quarrés.* 301

197. PROP. 14. *S'il y a trois quantités homogénes* a, b & c *en proportion continue, dont les extrêmes* a & c *ſoient commenſurables l'une à l'autre; & que les plus petits nombres qui expriment la raiſon de ces extrêmes, ne ſoient pas tous deux des quarrés, je dis que la quantité moyenne* b *ſera incommenſurable aux deux extrêmes.* ibid.

198. PROP. 15. *S'il y a quelque nombre entier, comme* n, *dont la racine quarrée ne ſauroit être exprimée par quelque nombre entier; je dis, que cette racine ne peut non plus être exprimée par une fraction quelconque.* 302

199. PROP. 16. *S'il y a deux nombres* a & b *réduits aux plus ſimples termes de leurs raiſons, & tels que leurs racines quarrées ſoient commenſurables l'une à l'autre; je dis, que les nombres* a & b *ſont des quarrés.* 303

200. PROP. 17. *Si deux quantités incommenſurables, comme* 2 & $\sqrt{3}$, *ſont ajoûtées enſemble, deſorte que de leur addition réſulte une troiſiéme quantité* $2+\sqrt{3}$; *je dis que cette quantité ſera incommenſurable à l'une & à l'autre des parties dont elle eſt compoſée.* 304

201. PROP. 18. *Le côté & la diagonale d'un quarré ſont incommenſurables.* ibid.

LEMME. *Si un nombre quarré eſt pair, ſa racine & ſa moitié ſeront paires auſſi.* ibid.

202. SCHOL. 1, 2, 3. *Obſervations générales ſur la matiére de l'Incommenſurabilité.* 305

PROBLEMES SUSCEPTIBLES DE PLUSIEURS SOLUTIONS.

ART. 203. PROB. 1. *Soient* a *&* b *deux quantités incommenſurables,* a *la plus grande &* b *la plus petite; & que par la diviſion continuelle de* a *&* b, *ſuivant la méthode preſcrite pour trouver la plus grande meſure commune, on ait pour quotiens certains nombres revenant toujours dans le même ordre à l'infini: on demande la valeur de la fraction* $\frac{a}{b}$ *ou (ce qui eſt tout un) la raiſon de* a *à* b *ſans aucune approximation, en admettant des nombres ſourds dans la valeur de l'expreſſion cherchée.* 307

EXEMPLES. 309

204. PROB. 2. *Je dois à quelqu'un un ſchelling, ou un certain nombre de ſchellings, & nous n'avons l'un & l'autre aucune monnoye que des guinées & des louis-d'or; les guinées valent vingt & un ſchellings piéce, & les louis-d'or dix-ſept: la queſtion eſt, comment je dois m'y prendre pour m'acquitter de cette dette.* 311

205. DEFINITION. 314

206. PROB. 3. *On demande autant de nombres qu'on voudra, qui ſoient tels, que ſi l'on diviſe un d'eux par deux diviſeurs donnés, dont* a *eſt le plus grand &* b *le plus petit, il y ait deux reſtes* d *&* e *reſpectivement.* ibid.

EXEMPLES. 318

EXEMPL. 6. *Suppoſons que l'année préſente de notre Ere ſoit mille ſept cens trente & neuf, & qu'il y a eu, il n'y a pas tout-à-fait deux ſiécles, une année dans laquelle le cycle ſolaire étoit huit, & le cycle lunaire dix, on demande quelle étoit cette année.* 321

207. PROP. 4. *On demande des nombres à diſcrétion, qui ayent cette propriété, ſavoir, que ſi quelqu'un d'eux eſt diviſé ſéparément par trois diviſeurs donnés* a, b *&* c, *dont* a *eſt ſuppoſé le plus grand &* c *le plus petit, les reſtes ſoient trois nombres donnés* d, e *&* f *reſpectivement.* 322

EXEMPLES. ibid.

EXEMPL. 4. *On demande en quelle année de notre Ere le cycle du Soleil a été huit, le cycle de la Lune dix, & le cycle d'Indiction dix.* 326

Trouver quelle place une année quelconque de notre Ere, dont les trois cycles ſont donnés, occupe dans la Période Julienne. 327

208. PROP. 5. *A deux nombres donnés* a *&* b, *dont* a *eſt le plus grand, trouver deux multiples dont la différence ſoit un nombre donné quelconque*

conque diviſible par la plus grande meſure commune de a *&* de b. 328

ART. 209. PROB. 6. *Qu'il y ait deux nombres donnés comme* a *&* b, *dont le plus petit multiple commun ſoit* c, *& outre cela un troiſiéme nombre comme* d, *qui ſoit diviſible par la plus grande meſure commune de* a *&* de b; *on demande de trouver, s'il eſt poſſible, deux multiples de* a *&* de b, *dont la ſomme ſoit ce nombre donné* d, *ou (ce qui revient au même) on demande de partager le nombre donné* d *en deux parties telles, que l'une des parties ſoit multiple de* a, *& l'autre un multiple de* b. 330

210. LEM. 12. *Que* $\frac{a}{b}$ *exprime une fraction réduite à ſes moindres termes, & que cette fraction ſoit multipliée par quelque nombre entier* d, *deſorte que le produit* $\frac{ad}{b}$ *puiſſe être auſſi un nombre entier: je dis qu'en ce cas le multiplicateur* d *doit être ou égal à* b, *ou quelque multiple de ce dénominateur.* 332

211. PROB. 7. *Soient* a, b, c, d, e, &c. *un nombre d'aiguilles ſemblables à celles d'une Montre, qui tournent toutes uniformement ſur le même centre, & qui ſe meuvent toutes dans le même ſens; & que les mêmes lettres* a, b, c, d, e, &c. *repréſentent auſſi leurs tems périodiques reſpectifs, ou des nombres proportionels à ces tems: Quel ſera le période ſynodique de tout le ſyſtême, c'eſt-à dire, en ſuppoſant que toutes ces aiguilles partent du même point comme* s, *en quel tems ſe retrouveront-elles toutes enſemble pour la premiére fois, ſoit que cette conjection arrive au point* s, *ou dans quelque autre endroit du cercle, où ces mouvemens ſe font?* 333

212. PROB. 8. *Qu'il y ait trois quantités inconnues* x, y *&* z, *dont les rélations ſoient exprimées par les deux équations ſuivantes,* $x+2y+3z=20$, *&* $4x+5y+6z=47$: *On demande les valeurs de* x, y *&* z *en nombres entiers & affirmatifs.* 336

213. LEM. 13. *Soient* a, b *&* c *trois nombres fixes ou déterminés, dont* a *&* b *ſoient premiers entre eux; & que* x *&* y *ſoient deux nombres entiers variables ou indéterminés, dont la rélation ſoit conſtamment exprimée par l'équation* $ax \pm by = c$; *quelles ſeront les valeurs les plus proches de* x *&* de y *exprimées en nombres entiers, dont la rélation puiſſe auſſi être exprimée par la même équation?* 338

214. PROB. 9. *On demande de partager cent en trois parties, comme* x, y *&* z, *de telle ſorte que* $9x+15y+20z$ *faſſent quinze cens.* 339

215. PROB. 10. *On demande de partager le nombre de vingt & quatre en*

en trois parties x, y *&* z, *qui ſoient telles, que* x + 8y + 12z *faſſent deux cens & un, &c.* 340

ART. 216. PROB. 11. *Suppoſons que quelqu'un achette quarante oiſeaux de trois différentes eſpéces, ſavoir, des perdrix, des alouettes & des cailles, pour quatre-vingt-dix-huit ſous, & qu'il paye trois ſous piéce pour les perdrix, un demi ſou piéce pour les alouettes, & quatre ſous piéce pour les cailles: on demande combien il a eu d'oiſeaux de chaque ſorte.* 342

217. PROB. 12. *Suppoſons que quelqu'un veuille acheter vingt oiſeaux pour vingt ſous, ſavoir, des canards à deux ſous piéces, des perdrix à un demi ſou piéce, & des oyes à trois ſous piéce: combien y aura-t-il d'oiſeaux de chaque ſorte?* 344

218. PROB. 13. *Vingt perſonnes, conſiſtant en hommes, femmes & enfans, payent vingt ſchellings pour un repas, les hommes donnant quatre ſchellings par tête, les femmes ſix ſous par tête, & les enfans trois ſous par tête: combien y avoit-il d'hommes, combien de femmes, & combien d'enfans?* 345

219. PROB. 14. *Quarante & une perſonne, conſiſtant en hommes, femmes & enfans, payent quarante ſchellings pour un repas, les hommes donnant quatre ſchellings par tête, les femmes trois ſchellings par tête, & les enfans quatre ſous par tête: combien y avoit-il d'hommes, combien de femmes, & combien d'enfans?* 346

220. PROB. 15. *On demande de partager trente en trois nombres entiers* x, y & z, *qui ſoient tels, que* 2x + 9y + 15z *faſſent quatre cens & dix-neuf.* 347

PROBLEME GENERAL.

221. PROB. 16. *Trouver, s'il eſt poſſible, trois nombres, tous entiers & affirmatifs, dont la ſomme eſt non ſeulement donnée, mais auſſi la ſomme de leurs produits, après qu'ils auront été multipliés ſéparément par trois multiplicateurs donnés.* 349

EXEMPLES. 351

DU QUARRE' MAGIQUE.

222. PROB. 17. *Qu'il y ait quelque quarré impair tel que* 49, *dont la racine quarrée eſt* 7; *& que quelque figure quarrée ſoit diviſée en* 49 *petits quarrés, ſavoir en* 7 *rangs de cellules, & chaque rang en* 7 *cellules: On demande de diſtribuer dans ces cellules tous les nombres naturels depuis* 1 *juſqu'à* 49 *incluſivement, de ſorte que la ſomme de tous les nombres de chaque rang, ſoit qu'on les prenne horizontalement, perpendiculairement, ou en diagonale, ſoit la même. Toute figure conſtruite de cette façon s'appelle communément un quarré magique.* 354

ELE-

AVIS AU LECTEUR.

BIBLIOTECA PROVINCIALE 251 NAPOLI

AVant que d'entrer en matiére, je crois devoir avertir ceux qui voudroient tirer quelque fruit de la lecture de cet Ouvrage, que je leur ſuppoſe certaines connoiſſances préliminaires. Par exemple, ils doivent ſavoir ajoûter, ſouſtraire, multiplier, diviſer, trouver une quatriéme proportionelle, & extraire des racines, particuliérement la racine quarrée. Il eſt néceſſaire qu'ils ſoient en état de faire ces opérations non ſeulement avec exactitude & ſans peine, mais auſſi de les appliquer aux différens cas, où elles ſont d'uſage; en un mot, il faut qu'ils entendent l'Arithmétique ordinaire, au moins relativement aux nombres entiers. C'eſt ce qui m'a engagé à propoſer d'abord quelques queſtions Arithmétiques, qui pourront leur ſervir à eſſayer leurs forces, avant d'aller plus loin. La plupart de ces queſtions ſont très-faciles. Peut-être auroient-elles pu être mieux choiſies; mais j'ai pris les premiéres qui ſe ſont offertes, impatient de traiter des ſujets plus importans. Cependant quelles que ſoient les queſtions dont il s'agit, ſi on les étudie avec attention & avec ſoin, j'eſpére qu'elles pourront produire l'effet que j'en attends. Tout lecteur, qui ne trouvera aucune difficulté à les réſoudre, aura lieu de ſe flatter que rien ne l'arrêtera dans la ſuite; au lieu que des difficultés inſurmontables attendent ceux que des problêmes auſſi aiſés embarraſſeront. Cet embarras cependant aura ſon utilité à leur égard, en ce qu'il les avertira de ce qui leur manque pour pouvoir être initiés aux Myſtéres de l'Algébre.

N. B. Comme c'eſt peut-être trop exiger que de prétendre qu'un apprentif Arithméticien ſoit entiérement au fait de la règle de proportion, & de la règle pour l'extraction de la racine quarrée, je ne manquerai point, dès la premiére occaſion qui s'en préſentera, de démontrer ces règles, dont la pratique ne ſuppoſe d'autre habileté que de ſavoir faire les quatre premiéres Opérations de l'Arithmétique ordinaire.

Queſtions pour s'exercer à la Multiplication.

Multiplier c'eſt prendre un nombre, nommé le Multiplicande, autant de fois qu'il eſt exprimé par un autre nombre, nommé le Multiplicateur; & le nombre qui réſulte de cette Opération, s'appelle le produit: d'où

il ſuit, que le produit contient le Multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le Multiplicateur; & que ſi un nombre, qui a un plus grand dénominateur doit être réduit à un nombre équivalent dont le dénominateur ſoit plus petit, cela doit ſe faire par la Multiplication. Par exemple, dans une Livre ſterling il y a vingt ſchellings; ainſi dans chaque ſomme d'argent, qui conſiſte en Livres St. entiéres, il y a vingt fois autant de ſchellings, qu'il y a de Livres St.: donc ſi le nombre des Liv. St. eſt multiplié par 20, le produit eſt un nombre équivalent de ſchellings. Il en eſt de même dans tous les autres cas.

1. QUESTION.

Il faut réduire 456 *Liv. ſt.*, 13 *ſchellings*, 4 *deniers*, *en ſchellings deniers & liards.*

N. B. Il y a douze ſous où deniers dans le ſchelling, & quatre liards dans le ſou ou denier.

Réponſe.		
	Schellings	9133
	Deniers	109600
	Liards	438400.

2. QUESTION.

Une certaine Ile contient 36 *comtés*, *chaque comté* 37 *paroiſſes*, *chaque paroiſſe* 38 *familles*, *chaque famille* 39 *perſonnes : je demande le nombre des paroiſſes, des familles & des perſonnes que l'Ile contient.*

Réponſe.		
	Paroiſſes	1332
	Familles	50616
	Perſonnes	1974024.

3. QUESTION.

En 1730 *années*, 42 *ſemaines &* 3 *jours*, *combien y a-t-il de minutes?*

N. B. Une année eſt de 365 jours & ſix heures, & une heure de ſoixante minutes.

Réponſe.		
	Heures dans une année	8766
	En 1730 années	15165180
	En 42 ſemaines & 3 jours	7128
	En tout	15172308
	Minutes en tout.	910338480.

4. QUES-

4. QUESTION.

Il y a un champ qui eſt long de 102004 *pieds, & large de* 102003 *pieds: je demande le nombre de pieds quarrés qu'il contient.*

Réponſe. 10404714012.

5. QUESTION.

Le plancher d'une chambre eſt large de 24 *pieds,* 4 *pouces, & long de* 96 *pieds,* 6 *pouces: je demande combien de pouces quarrés il contient.*

Réponſe. 338136 pouces quarrés.

6. QUESTION.

Un morceau de bois de 1 *pied* 2 *pouces d'épais, de* 3 *pieds* 4 *pouces de large, & de* 5 *pieds* 6 *pouces de long, doit être coupé en petits cubes, tels que des dés à jouer, dont chacun doit avoir un quart de pouce en tout ſens: je demande en combien de petits cubes le morceau ſera diviſé.*

Réponſe. 2365440.

7. QUESTION.

Je demande en combien d'ordres différens on peut ſonner les 12 *cloches d'un Carillon.*

Réponſe. * avec 2 cloches 2
avec 3 - - 6
avec 4 - - 24
avec 5 - - 120
avec 6 - - 720
avec 7 - - 5040
avec 8 - - 40320
avec 9 - - 362880
avec 10 - - 3628800
avec 11 - - 39916800
avec 12 - - 479001600.

8. QUES-

* Un terme quelconque de cette ſuite donne par la Multiplication le terme ſuivant; ſavoir, en multipliant le nombre d'ordres du terme connu par le nombre des cloches de l'ordre qui ſuit immédiatement.

8. QUESTION.

De combien de différentes maniéres peuvent tomber quatre dés jettés tous à la fois?

Réponſe. * De 1296 maniéres.

9. QUESTION.

Si quelqu'un parie d'amener un as en jettant quatre dés à la fois, quelle probabilité a-t-il de gagner?

Réponſe. Par la réponſe précédente, quatre dès peuvent tomber de 1296 maniéres différentes, ou ſans as ou avec quelque as; par un calcul ſemblable, on trouve qu'ils peuvent tomber de 625 maniéres ſans as; il y a donc 671 maniéres dont ils peuvent tomber avec un ou pluſieurs as; ainſi celui qui fait ce pari a l'avantage en raiſon de 671 à 625.

10. QUESTION.

Il y a deux enclos qui ont la même circonférence, c'eſt-à-dire, qui ſont fermés de murs d'égale longueur; mais l'un eſt un quarré exact dont chaque côté eſt de 125 pieds & l'autre eſt un quarré oblong de 124 pieds de large & de 126 de long; on demande lequel eſt le plus grand des deux, c'eſt-à-dire, lequel produira le plus d'herbe, toutes choſes égales.

Réponſe. Le quarré exact: car il contient 15625 pieds quarrés; & l'autre n'en contient que 15624.

Queſtions pour s'exercer à la Diviſion.

Le but de la Diviſion eſt de faire voir combien de fois un nombre, qu'on nomme le Diviſeur, eſt contenu dans un autre, qu'on nomme le Dividende; & le nombre qui exprime ce combien de fois, eſt appellé le Quotient. Delà, & de la Définition de la Multiplication, donnée ci-deſſus, il ſuit 1. que le Diviſeur multiplié par le Quotient, & par conſequent le Quotient multiplié par le Diviſeur, eſt toujours égal au Dividende, pourvu qu'il n'y ait aucun reſte après la Diviſion faite; mais s'il y en a, ce reſte ajoûté au produit donnera exactement le Dividende; &

* Cette ſolution eſt foudée ſur ce qu'un dé a ſix faces, dont chacune répond aux ſix faces d'un autre dé, ſi on en jette deux; donc pour deux dés le nombre des maniéres différentes de tomber eſt 36: ſi l'on ajoûtoit un troiſiéme dé, on auroit le produit de 6 par 36, c'eſt-à-dire 216, & en ajoûtant un quatriéme dé, le produit de 6 par 216, ſavoir 1296.

& c'eſt la meilleure preuve de la Diviſion. 2. Comme le Diviſeur eſt une partie du Dividende, telle qu'elle eſt exprimée par le Quotient, de même le Quotient eſt une partie du Dividende, telle qu'elle eſt exprimée par le Diviſeur: ainſi 12 diviſés par 3 donnent 4; donc 3 eſt la quatriéme partie, & 4 eſt la troiſiéme partie de 12. 3. D'où il ſuit qu'on peut trouver un nombre qui ſera diviſible ſans reſte, par deux nombres donnés quelconques, ſavoir, en multipliant les deux nombres donnés l'un par l'autre. Ainſi, ſi je veux avoir un nombre diviſible ſans reſte par 6 & 9, je multiplie 9 par 6, & le produit, qui eſt 54, aura les conditions que je demande; cependant 18 eſt le plus petit nombre qui les ait. 4. La Multiplication & la Diviſion par le même nombre, ſont le contraire l'une de l'autre, & doivent néceſſairement avoir des effets contraires; car la Multiplication augmente un nombre, en le répétant autant de fois qu'il eſt exprimé par le Multiplicateur, & la Diviſion au contraire, le diminue, en n'en prenant qu'une partie, telle que l'exprime le Diviſeur. 5. Ainſi, ſi un nombre d'une plus petite dénomination doit être changé en un nombre équivalent d'une plus grande dénomination, comme des liards en ſous, des ſous en ſchellings &c., cela doit ſe faire par la Diviſion, & le contraire doit ſe faire par la Multiplication. 6. Toutes les fois qu'on ſe propoſe de ſavoir combien de fois une quantité de quelque eſpéce qu'elle ſoit, eſt contenue dans une quantité de même eſpéce, les nombres qui repréſentent ces quantités doivent être réduits à la même dénomination, avant que la Diviſion puiſſe ſe faire. Ainſi, ſi je veux ſavoir combien de piéces de treize ſous & demi il y a dans 20 ſchellings, je dois reduire non ſeulement la piéce de treize ſous & demi en 27 demi-ſous, mais auſſi les 20 ſchellings en 480 demi-ſous, & puis déterminer à l'aide de la diviſion combien de fois 27 demi-ſous ſont contenus en 480 demi-ſous, c'eſt-à-dire, combien de fois 27 ſont contenus dans 480; le Quotient eſt 17, & le reſte 21, c'eſt-à-dire 21 demi-ſous: car en toute Diviſion, le reſte eſt de même Dénomination que le Dividende, dont il étoit partie; ainſi dans 20 ſchellings il y a dix-ſept piéces de treize ſous & demi, & de plus 10 ſous & demi.

II. QUESTION.

On veut réduire 987654321 *liards en Livres ſt., ſchellings & ſous.*

Réponſe. 987654321 liards valent 246913580 ſous & 1 liard; ou 20576131 ſchellings, 8 ſous & 1 liard; ou 1028806 Livres ſter. 11 ſchellings, 8 ſous & 1 liard.

12. QUESTION.

On m'a preté 1296 *guinées, dans le tems qu'elles valoient* 1 *livre,* 1 *ſchelling & 6 ſous piéce : combien dois-je en rendre à préſent qu'elles ſont à* 1 *livre & 1 ſchelling?*

Réponſe. 1326 guinées, 18 ſchellings.

13. QUESTION.

On eſt convenu pour la façon d'un plancher de 24 *pieds & 4 pouces de large, & de* 96 *pieds 6 pouces de long, à raiſon de* 12 *ſous le pied quarré: je demande à quoi le plancher reviendra.*

Réponſe. Le plancher contient 338136 pouces quarrés, ou 2348 pieds quarrés & 24 pouces quarrés; ainſi le tout reviendra à 117 livres ſterl. 8 ſchellings & deux ſous.

14. QUESTION.

Certain rafraichiſſoir eſt de 36 *pouces de profondeur, de* 42 *pouces de largeur, & de* 72 *pouces de longueur: je demande combien il peut contenir de gallons, meſure d'Angleterre.*

N. B. Le gallon, meſure d'Angleterre, eſt de 282 pouces cubiques.

Réponſe. Le rafraichiſſoir contient 108864 pouces cubiques, c'eſt-à-dire, 386 gallons & 12 pouces cubiques.

15. QUESTION.

Un pied cubique d'Eau péſe 76 *livres, poids de Troyes où poids Romain; & l'Air eſt* 860 *fois plus leger que l'Eau : je demande combien péſe un pied cubique d'Air.*

N. B. La livre de Troyes contient douze onces, l'once vingt deniers, & le denier vingt-quatre grains.

Réponſe. Un pied cubique d'Air péſe 1 once, 1 denier, 5 grains.

16. QUESTION.

Le tems moyen d'une Lunaiſon, c'eſt-à-dire, le tems qui s'écoule depuis une nouvelle Lune juſqu'à la nouvelle Lune ſuivante, eſt de 29 *jours,* 12 *heures,* 44 *minutes &* 3 *ſecondes; & dans une année Julienne il y a* 365 *jours & 6 heures : je demande combien il y a de Lunaiſons dans* 19 *années Juliennes.*

Ré-

Réponſe. Heures dans une Lunaiſon 708
Minutes 42524
Secondes 2551443
Heures en 19 années Juliennes 166554
Minutes 9993240
Secondes 599594400
Lunaiſons 235; & 1 heure, 28′, 15″.

17. QUESTION.

En combien de tems peut-on faire ſonner les douze Cloches d'un Carilion, en tous les différens ordres poſſibles, en ſuppoſant pour chaque ordre 3 ſecondes de tems? Voyez la 7. Queſtion.

Réponſe. Le nombre des ordres des 12 cloches 479001600
Le tems eſt 1437004800 en ſecondes
ou 23950080 en minutes
ou 399168 en heures
ou 45 ans, 27 ſemaines, 6 jours 18 heures.

18. QUESTION.

Un Général diſtribue 15 livres ſterl. 19 ſchellings, & 2 ſous & demi, à 4 Capitaines, 5 Lieutenans & 60 Soldats, dans la proportion ſuivante: Un Capitaine doit avoir trois fois autant qu'un Lieutenant, & chaque Lieutenant deux fois autant qu'un Soldat: je demande ce que chacun d'eux a eu.

Réponſe. Chaque Soldat 3 ſchell. 4 ſous $\frac{2}{4}$
Chaque Lieutenant 6 ſchell. 9 ſous $\frac{1}{2}$
Chaque Capitaine 1 Liv. ſterl. 4 ſous $\frac{1}{2}$

Queſtions pour s'exercer à la Régle de Trois.

Et premiérement à la Régle de Trois directe.

La Régle de proportion, ou la Régle de trois, ou comme d'autres la nomment, la Régle d'or, eſt celle qui enſeigne, trois nombres étant donnés, à trouver un quatriéme nombre qui y ſoit proportionel; c'eſt-à-dire à trouver un quatriéme nombre, qui ſoit à l'un des trois donnés dans la même proportion qui eſt exprimée par les deux autres: ainſi lorſqu'une queſtion eſt propoſée, par laquelle on cherche un tel quatriéme nombre proportionel, cette queſtion appartient à la Régle de proportion. Or dans les queſtions de cette nature, ſurtout quand les nombres donnés ne ſont pas de purs nombres abſtraits, mais qu'ils ſont appliqués

pliqués à des quantités particuliéres, il y a ordinairement trois choſes requiſes, la préparation, la diſpoſition, & l'opération.

Premiérement pour la préparation, il faut obſerver que des trois nombres donnés dans la queſtion, deux doivent toujours étre de même eſpéce, & qu'il faut les réduire à la même dénomination, s'il ne le ſont pas déjà: & ſi le nombre reſtant eſt d'une dénomination compoſée, il doit étre réduit à une dénomination ſimple.

Secondement, en diſpoſant les nombres ainſi préparés, les deux nombres de la même dénomination doivent être placés le premier & le troiſiéme dans la Régle de proportion, & par conſéquent le nombre reſtant doit être le ſecond. Mais il faut particuliérement faire attention à ce que des deux nombres de même dénomination, celui qui doit être le troiſiéme dans la Régle de proportion, ſoit celui ſur lequel la queſtion roule proprement, ou qui contient la demande; & ce nombre étant placé, les deux autres prennent leurs places, comme je viens de le dire. Cette diſpoſition des trois nombres eſt proprement ce qu'on appelle poſer l'état de la Queſtion.

Enfin, ayant ainſi poſé la queſtion, multipliez le ſecond nombre & le troiſiéme l'un par l'autre, diviſez le produit par le premier, & le quotient qui en réſultera ſera le quatriéme nombre cherché, lequel quatriéme nombre, auſſi bien que le reſte, s'il y en a, doit toujours etre conſidéré comme étant de même dénomination que le ſecond nombre. Comme par exemple,

19. QUESTION.

Une piéce de Vaiſſelle d'argent, peſant 3 *livres*, 4 *onces &* 5 *deniers poids de Troyes, eſt eſtimée à* 5 *ſchellings &* 6 *ſous l'once, qu'elle eſt la valeur du tout?*

Nous avons trois quantités dans cette Queſtion, ſavoir, 3 livres, 4 onces & 5 deniers; une once, &, 5 ſchellings & 6 ſous: dont les deux premiéres, qui ſont de même eſpéce, doivent étre réduites à la même dénomination, & la troiſiéme à une dénomination ſimple; ainſi pour une once j'écris 20 deniers; pour 3 livres, 4 onces & 5 deniers, j'écris 805 deniers; & pour 5 ſchellings & ſix ſous, j'écris 66 ſous; après quoi les trois nombres ſont préparés comme ils doivent l'être. Enſuite, je cherche ſur lequel des deux nombres 20 & 805, qui ſont de même dénomination, tombe proprement la Queſtion, & je trouve que c'eſt 805; car il eſt ici Queſtion de ſavoir qu'elle eſt la valeur de 805 deniers de Vaiſſelle; les deux autres nombres ne ſont donnés que pour me

met-

mettre en état de trouver la réponſe : ainſi je fais de 805 mon troiſiéme nombre, 20 qui eſt de même dénomination ſera le premier, 66 le ſecond, & la queſtion ſe trouvera poſée de cette maniére, *ſi* 20 *deniers d'argent valent* 66 *ſous, combien valent* 805 *deniers d'argent?* A l'égard de l'Opération elle ſe fait ainſi ; je multiplie 805 par 66, & le produit eſt 53130, que je diviſe par le premier nombre 20, & le quotient eſt 2656, avec 10 de reſte, c'eſt-à-dire 10 ſous ; pour rendre mon quotient plus complet, je change ces 10 ſous en 40 liards, que je diviſe encore par 20, & je trouve 2 pour quotient, c'eſt-à-dire 2 liards ſans aucun reſte ; ainſi la valeur cherchée eſt 2656 ſous & 2 liards ; qui ſont 11 livres, 1 ſchelling & quatre ſous & demi.

Démonſtration de cette Pratique.

1. *Cas.* Pour démontrer que cette opération eſt juſte, je reprendrai la Queſtion précédente, mais premiérement dans une autre ſuppoſition, en cette maniére, *ſi un denier de Vaiſſelle coute* 66 *ſous, combien couteront* 805 *deniers de même Vaiſſelle?* Perſonne ne peut douter que dans cette ſuppoſition 805 deniers ne coutaſſent 805 fois 66 ſous, ou 66 fois 805, c'eſt-à-dire, 53130 ſous : ainſi dans tous les cas de cette eſpéce, c'eſt-à-dire, où le premier nombre dans la Règle de proportion eſt l'unité, le quatriéme nombre ſe trouve en multipliant le ſecond & le troiſiéme l'un par l'autre.

2. *Cas.* A-préſent ſuppoſons la Queſtion comme elle a été d'abord propoſée, ſavoir, *ſi* 20 *deniers de Vaiſſelle valent* 66 *ſous, combien valent* 805 *deniers de même Vaiſſelle?* Dans cette ſuppoſition il eſt aiſé de voir, que 1 denier de Vaiſſelle, & par conſéquent les 805 deniers ne peuvent valoir que la vingtiéme partie de ce qu'ils valoient dans le 1er *Cas* ; ainſi nous ne devons pas répondre que 805 deniers valent 53130 ſous, mais la vingtiéme partie de cette ſomme, qui eſt 2656 ſous & 2 liards : & comme cette maniére de raiſonner auroit lieu dans tout autre cas, il ſuit que *dans la Régle de proportion, quels que ſoient les nombres donnés, le quatriéme nombre ſe trouve, en multipliant le ſecond & le troiſiéme l'un par l'autre, & en diviſant ce produit par le premier.* C. Q. F. D.

20. QUESTION.

Combien de chemin pourroit faire en 7 *jours &* 8 *heures un Voyageur qui feroit* 13 *milles en* 4 *heures, & qui marcheroit* 12 *heures par jour?*

Réponſe. 299 *milles.*

21. QUESTION.

A combien reviendroit un mur dont l'enclos ſeroit de 1296 *aunes, à raiſon de* 4 *ſchellings,* 5 *ſous la verge, la verge étant de* 5 ½ *aunes?*

Réponſe. 52 livres ſt., 8 ſous & 3 liards.

22. QUESTION.

Dans la Monnoie d'Angleterre une livre d'or, c'eſt-à-dire, 11 *onces d'or fin & 1 once d'alliage, donnent* 44 *guinées & demi: je demande le prix d'une livre d'or pur, en ſuppoſant l'alliage compté pour rien.*

Réponſe. 50 livres, 19 ſchellings, & 5 ſous & ½.

23. QUESTION.

Quel eſt l'intérêt d'une année pour 987 *livres ſt.* 6 *ſchellings & 5 ſous, ſur le pied de* 6 *pour cent?*

Réponſe. 59 livres ſt., 4 ſchellings, & 9 ſous & ½.

24. QUESTION.

La circonférence du Globe terreſtre, ſuivant la meſure des Académiciens François, eſt de 123249600 *pieds de Roi: je demande combien cela fait de milles d'*Angleterre.

N. B. Mille pieds de Roi ſont égaux à 1068 pieds, meſure d'Angleterre; trois de ces pieds font une verge, & 1760 verges font un mille.

Réponſe. 131630573 pieds meſure d'*Angleterre.*
ou 43876857 verges & deux pieds.
ou 24930 milles, 57 verges & 2 pieds.

25. QUESTION.

Suppoſant tout comme dans la précédente queſtion, je demande en combien de de tems le ſon paſſeroit d'un pole à l'autre pole, dans la ſuppoſition que le ſon parcourt 1142 *pieds dans une ſeconde.*

Réponſe. En 16 heures & 32 ſecondes.

26. QUES-

26. QUESTION.

*Mr. Huyghens a trouvé que le Pendule qui fait une vibration en une ſeconde, eſt à Paris de 3 pieds, 8 lignes & ½, je demande quelle eſt ſa longueur, meſure d'*Angleterre.

N. B. Une ligne eſt $\frac{1}{144}$ partie d'une pouce, & 1000 demi lignes meſure de *France* valent 1068 demi lignes meſure d'*Angleterre*, comme dans la 24ème queſtion.

Réponſe. La longueur d'un pendule à ſecondes meſure d'*Angleterre*, eſt de 941 ½ lignes meſure d'*Angleterre*, ou de 39 pouces, 2 lignes & ½.

27. QUESTION.

Je demande en combien de tems un tuyau, qui donne 15 pintes d'eau en 2 minutes & 34 ſecondes, remplira une citerne de 36 pouces de profondeur, 42 de large & 72 de long. (Voyez la 14ème Queſtion.)

Réponſe. En 31707 ſecondes; ou 8 heures, 48′ 27″.

N. B. Huit pintes font un Gallon. Un cube d'un pouce vaut 8 cubes d'un demi-pouce de côté. Une pinte contient 282 cubes d'un demi-pouce, & 15 pintes 4230; mais la citerne contient 108864 cubes d'un pouce, qui valent 870912 cubes d'un demi-pouce, ainſi la Queſtion doit être poſée ainſi.

Si 4230 cubes d'un demi-pouce coulent en 154 ſecondes, dans combien de tems couleront 870912 cubes d'un demi-pouce?

Réponſe. En 8 heures, 48′, 27″ comme ci-deſſus.

28. QUESTION.

Une muraille de 6 pieds d'épaiſſeur, de 9 pieds de hauteur, & de 432 pieds de longueur, coute 720 livres ſt. à combien reviendra une muraille de même façon, qui aura 12 pieds d'épaiſſeur 18 pieds de haut & 576 pieds de long?

La premiére muraille contenoit 23328 pieds cubiques, & la ſeconde 124416: ainſi la réponſe à la queſtion propoſée eſt 3840 livres ſt.

29. QUESTION.

Un Clocher jette ſur un terrain égal une ombre à 57 verges, dans le tems qu'un bâton de 4 pieds, élevé perpendiculairement, jette une ombre de 5 pieds 6 pouces: quelle eſt la hauteur du Clocher?

Réponſe. 41 verges, 1 pied, 4 pouces.

30. Question.

Deux perſonnes, A & B, *font une Societé*; A *y met* 372 *livres ſt.* & B 496 *livres ſt. pour le même tems*; *ils gagnent* 114 *livres*, 2 *ſchellings*: *je demande la part du gain de chacun?*

Le fond qu'ils mettent enſemble eſt de 868 livres; dites donc: ſi 868 livres de fond donnent 114 livres 2 ſchellings, combien donneront 372, qui eſt la part du fond de *A*. *Réponſe*, 48 livres, 18 ſchellings pour la portion du gain de *A*. Cette ſomme étant retranchée de tout le gain, le reſte ſera la portion de *B*.

N. B. Quelque nombre d'Aſſociés qu'il y eût, leurs parts du gain pourroient ſe trouver par une règle de proportion pour chacun, excepté celle du dernier qu'il y auroit moyen de déterminer par une ſimple ſouſtraction. Il vaut pourtant mieux les trouver toutes par la règle de proportion, parce qu'en ajoûtant toutes les parts enſemble, on voit ſi elles font la ſomme totale du gain, & cela ſert de preuve que l'opération entiére a été bien faite.

31. Question.

Deux Négocians, A & B, *forment une Societé*; A *met* 496 *livres ſt. pour* 2 *mois*, & B 620 *livres pour* 3 *mois*, *leur gain eſt* 456 *livres. Quelle eſt la part de chacun?*

Pour répondre à cette Queſtion, il faut conſidérer qu'il en eſt en fait de Commerce, comme quand on place de l'argent à intérêt, où le tems vaut tout comme l'argent; deſorte que celui qui avance 496 livres pour deux mois, a le même droit au gain, que celui qui avance le double de la ſomme, c'eſt-à-dire 992 livres pour un mois: de même celui qui avance 620 livres pour 3 mois, a le même droit au gain, que s'il avoit avancé trois fois cette ſomme, c'eſt-à-dire 1860 livres pour un mois: ſubſtituez donc ces deux ſuppoſitions au-lieu de celles qui ſont dans la Queſtion, ce qui peut ſe faire ſans rien changer à la concluſion: la Queſtion alors deviendra plus ſimple, & n'exigera plus qu'on faſſe attention aux différences de tems.

Deux Négocians, A & B, *forment une Societé*; A *y met* 992 *livres ſt.* B 1860 *livres ſt. pour le même tems*; & *ils gagnent* 456 *livres ſt. Quelle eſt la part du gain de chacun?*

Réponſe. La part de *A* ſera de 158 livres ſt. 12 ſchellings & 2 ſous; & celle de *B* de 297 livres ſt. 7 ſchellings & 10 ſous.

32. Ques-

32. QUESTION.

Si deux hommes gagnent en trois jours 4 ſchellings, combien gagneront 5 hommes en 6 jours?

Cette queſtion & la ſuivante appartiennent à la Règle de trois double, dans laquelle il ſe trouve cinq nombres: ces nombres doivent toujours être placés, comme ils le ſont dans cet exemple, les deux derniers nombres toujours être de la même dénomination que les deux premiers reſpectivement, & le nombre cherché être pareillement de même dénomination que celui du milieu; alors la queſtion pourra ſe réduire à une Règle de trois ſimple, & cela en deux maniéres; ſavoir en faiſant diſparoître le premier & le quatriéme nombre, ou bien le ſecond & le cinquiéme. Si vous voulez faire diſparoître le premier & le quatriéme nombre, vous devez raiſonner ainſi: deux hommes gagnent autant en trois jours, qu'un homme fait en deux fois trois jours, c'eſt-à-dire, en ſix jours: de-même cinq hommes gagnent autant en ſix jours qu'un homme gagne en trente jours; ſubſtituez cette ſuppoſition & cette demande, au-lieu de celles qui ſont dans la Queſtion, & vous aurez, ſi un homme en ſix jours gagne 4 ſchellings, combien gagnera un homme en 30 jours? Ce qui revient à ceci, *ſi en 6 jours un homme gagne 4 ſchellings, combien gagnera-t-il en 30 jours?*

Réponſe. 20 ſchellings.

Si vous vouliez faire diſparoître le ſecond nombre & le cinquiéme, il faudroit raiſonner ainſi: deux hommes gagnent autant en trois jours que 3 fois deux hommes, c'eſt-à-dire 6 hommes, en un jour: de-même cinq hommes gagnent autant en 6 jours, que 30 hommes en un jour; poſez la queſtion de cette maniére & dites: ſi ſix hommes en un jour gagnent 4 ſchellings, combien gagneront en un jour 30 hommes? C'eſt-à-dire, *ſi dans un certain tems 6 hommes gagnent 4 ſchellings, combien gagneront 30 hommes dans le même tems?*

Réponſe. 20 ſchellings, comme ci-deſſus.

Quiconque fera attention à ces deux maniéres de faire diſparoître les quantités qui pourroient embarraſſer, ſera aiſément conduit à une troiſiéme, qui renferme les deux autres, & qui vaut mieux dans la pratique; car à la fin de ces deux opérations, le nombre cherché eſt trouvé en multipliant 30 par 4, & en diviſant le produit par 6: or ſi on fait

attention à la maniére dont ſe forment ces nombres, on trouvera que 30 vient de la multiplication des deux derniers nombres 5 & 6, que 4 eſt le nombre du milieu dans la Queſtion, & que le Diviſeur 6 eſt le produit des deux premiers nombres 2 & 3, multipliés l'un par l'autre: Ainſi dans toutes les Queſtions de cette nature, *ſi les trois derniers nombres ſont multipliés l'un par l'autre, & que le produit ſoit diviſé par le produit des deux premiers nombres, le quotient ſera le nombre cherché.*

33. QUESTION.

Si pour charrier un poids de 300 livres, à la diſtance de 40 milles, je dois payer 7 ſchellings & ſix ſous, combien dois-je payer pour charrier un poids de 500 livres à la diſtance de 60 milles?

Réponſe. 225 ſous, ou 18 ſchellings & 9 ſous.

Queſtion pour la Règle de trois Inverſe.

Juſqu'ici nous n'avons parlé que de la Règle de trois directe; mais il y a une autre Règle de proportion nommée la Règle de trois inverſe, qui ne différe point de la Règle de trois directe, à l'égard de la préparation, & de la diſpoſition des nombres, mais qui en eſt différente dans l'opération; car dans la premiére le quatriéme nombre ſe trouve, en multipliant le ſecond nombre & le troiſiéme l'un par l'autre, & en diviſant le produit par le premier nombre; mais dans celle-ci, il ſe trouve en multipliant le premier nombre, & le ſecond l'un par l'autre, & en diviſant le produit par le troiſiéme. Il ne s'agit donc plus que de ſavoir diſtinguer, ſi une Queſtion appartient à l'une ou à l'autre de ces Règles; pour cet effet, obſervez la règle ſuivante: *Si plus demande plus, ou ſi moins demande moins, ſuivez la Règle de trois directe: mais ſi plus demande moins, ou ſi moins demande plus, ſuivez la Règle de trois inverſe.* Le ſens de cette règle eſt, que lorsque le troiſiéme nombre étant plus grand que le premier, le quatriéme doit être proportionnellement plus grand que le ſecond; ou que le troiſiéme nombre étant plus petit que le premier, le quatriéme doit être proportionnellement plus petit que le ſecond, la Queſtion appartient à la Règle de trois directe; mais lorſque le troiſiéme nombre étant plus grand que le premier, le quatriéme doit être plus petit que le ſecond; ou le troiſiéme étant plus petit que le premier, le quatriéme doit être plus grand que le ſecond; dans ces deux derniers cas, la Queſtion appartient à la Règle de trois inverſe, & doit être réſolue, comme je viens de le dire. Par exemple.

34. QUES-

34. QUESTION.

Si 12 hommes mangent une certaine quantité de proviſion en 15 jours, combien de tems ſeront 20 hommes à manger la même proviſion?

Cette Queſtion eſt de telle nature que plus demande moins: car 20 hommes conſumeront la même proviſion en moins de tems que 12: ainſi cette Queſtion appartient à la Règle de trois inverſe; cela étant je multiplie le premier & le ſecond nombre l'un par l'autre, je diviſe le produit par le troiſiéme, & le quotient 9, c'eſt-à-dire, 9 jours, eſt la Réponſe à la Queſtion.

Démonſtration de la Règle de trois Inverſe.

Si je devois répondre à cette queſtion par pure réflexion & ſans le ſecours d'aucune Règle pour me diriger, je raiſonnerois ainſi: la même quantité de proviſion qui ſuffiroit pour 12 hommes pendant 15 jours, ſuffiroit pour un homme pendant douze fois le même tems, ce qui donne 12 fois 15, ou 180 jours. Mais ſi la même quantité ſuffiſoit pour un homme 180 jours, elle ne ſuffiroit pour 20 hommes que la 20. partie de ce tems, c'eſt-à-dire, pour 9 jours: le quatriéme nombre ſe trouve donc ici en multipliant le premier & le ſecond l'un par l'autre, & en diviſant le produit par le troiſiéme: & ce raiſonnement eſt applicable à tous les cas qui appartiennent à la Règle de trois inverſe. C. Q. F. D.

35. QUESTION.

Quelqu'un m'a prêté 372 livres pour 7 ans & 8 mois, pour combien de tems faut-il que je lui prête 496 livres, comme équivalent?

Réponſe. Pour 5 ans & 9 mois.

36. QUESTION.

Si un tuyau quarré, de 4 pouces & 5 lignes de côté, vuide une certaine quantité d'eau en une heure de tems, dans combien de tems un tuyau quarré d'un pouce & deux lignes de côté vuidera-t-il la même quantité d'eau?

L'orifice d'un tuyau quarré, de 4 pouces & 5 lignes de côté, c'eſt-à-dire de 53 lignes, contient 2809 lignes quarrées; & l'orifice d'un tuyau quarré de 1 pouce, 2 lignes, ou 14 lignes de côté, contient 196 lignes quarrées. Dites donc, *ſi un orifice de 2809 lignes quarrées vuide une certaine quantité d'eau en une heure, en combien de tems un orifice de 196 lignes quarrées vuidera-t-il la même quantité?*

Réponſe. En 14 heures, 19′. 54″.

37. QUES-

37. QUESTION.

Si trois hommes, ou quatre femmes, peuvent faire un certain Ouvrage en 56 jours, en combien de tems un homme & une femme en viendront-ils à bout?

Comme il ſe trouve ici 3 hommes ou 4 femmes, il faut trouver un nombre diviſible par ces deux-là ſans reſte, ce nombre eſt 12, produit de 3 par 4 (Voyez la troiſiéme obſervation ſur la définition de la Diviſion:) conſidérez donc 3 hommes ou 4 femmes comme équivalens à 12 jeunes garçons, & vous aurez un homme équivalent à 4 garçons, & une femme à 3, & un homme & une femme à 7 garçons, & la Queſtion reviendra à celle-ci; *ſi 12 garçons font un Ouvrage en 56 jours, combien de jours 7 garçons mettront-ils à faire le même Ouvrage?*

Réponſe. 96 jours.

38. QUESTION.

Si 5 bœufs, ou 7 poulains, mangent un tas de foin en 87 jours, en combien de tems 2 bœufs & 3 poulains le mangeront-ils?

Réponſe. En 105 jours.

39. QUESTION.

Si deux acres de pré peuvent nourrir 3 chevaux pendant 4 jours, combien de tems 5 acres nourriront-ils 6 chevaux?

Cette Queſtion, à la premiére vue, paroîtra de même nature que la 32. & la 33. qui appartiennent à la Règle de trois directe; mais quand on y fait attention, on trouve qu'elle eſt de toute autre nature; car nous ne pouvons pas dire ici, comme dans les deux autres cas, que 2 acres nourriront 3 chevaux, auſſi longtems qu'un acre nourrira 6 chevaux; ce ſeroit une maniére de raiſonner abſurde; & dès que la choſe eſt ainſi, la queſtion doit être traitée ſuivant une autre Règle, qui s'appelle la double Règle de trois inverſe: la juſteſſe ou l'abſurdité de cette maniére de raiſonner, étant un caractére infaillible pour décider ſi la Queſtion appartient à l'une ou à l'autre de ces Règles. Toutes les Queſtions qui appartiennent à cette Règle, de même que celles qui appartiennent à l'autre, peuvent ſe réduire à une ſimple Règle de trois, de deux maniéres; en faiſant diſparoître le premier & le quatriéme nombre, ou bien le ſecond & le cinquiéme: mais la méthode de les faire dispa-

diſparoître eſt différente. Dans les Queſtions de cette nature, ſi le premier nombre & le quatriéme doivent diſparoître, les deux premiers nombres doivent être multipliés par le quatriéme, & les deux derniers par le premier; mais ſi le ſecond nombre & le cinquiéme doivent diſparoître, les deux premiers nombres doivent être multipliés par le cinquiéme, & les deux derniers par le ſecond: ainſi dans la Queſtion propoſée, ſi nous voulons faire diſparoître le premier nombre & le quatriéme, nous devons multiplier les deux premiers nombres, 2 & 3, par le quatriéme qui eſt 5, & dire, que 2 acres nourriront 3 chevaux, auſſi longtems que 10 acres nourriront 15 chevaux; nous devons auſſi multiplier les deux derniers nombres 5 & 6, par le premier 2, & dire, que 5 acres nourriront 6 chevaux auſſi longtems que 10 acres nourriront 12 chevaux: prenez ces nombres au-lieu de ceux qui ſont dans la Queſtion propoſée, & elle ſera changée en cette autre Queſtion équivalente, ſi 10 acres nourriſſent 15 chevaux pendant 4 jours, combien de tems 10 acres nourriront-ils 12 chevaux? Effacez de cette Queſtion le premier nombre & le quatriéme, qui étant égaux ne ſervent plus à la concluſion, & vous aurez la Queſtion ſuivante: *Si 15 chevaux mangent l'herbe d'une certaine piéce de terre en 4 jours, combien de tems ſeront 12 chevaux à manger la même quantité d'herbe?*

Réponſe. 5 jours: car cette Queſtion appartient à la Règle de trois inverſe.

Si nous voulons exterminer le ſecond, & le cinquiéme des nombres de la Queſtion, nous devons multiplier les deux premiers nombres par le cinquiéme, & dire, que 2 acres nourriront 3 chevaux, auſſi longtems que 12 acres nourriront 18 chevaux; nous devons de même multiplier les deux derniers nombres par le ſecond, & dire, que 5 acres nourriront 6 chevaux, auſſi longtems que 15 acres en nourriront 18: prenez ces nombres au-lieu de ceux de la Queſtion propoſée, & elle ſera changée en celle-ci équivalente: ſi 12 acres nourriſſent 18 chevaux 4 jours, combien de tems 15 acres nourriront-ils 18 chevaux? C'eſt-à-dire (en retranchant le ſecond nombre & le cinquiéme). *Si 12 acres nourriſſent un certain nombre de chevaux pendant 4 jours, combien de tems 15 acres nourriront-ils le même nombre?*

Réponſe. 5 jours, comme ci-deſſus; car cette Queſtion appartient à la Règle de trois directe.

Dans ces deux opérations le nombre cherché eſt trouvé enfin en

multipliant 15 par 4, & en diviſant le produit par 12: à-préſent en repaſſant la ſolution précédente, & en conſidérant comment ces nombres ont été formés, on verra facilement, que le nombre 4 eſt le terme du milieu de la Queſtion; que le nombre 15 dans les deux opérations eſt le produit des nombres 3 & 5, qui étoient les termes voiſins de ce terme du milieu, de l'un & de l'autre côté; & que le Diviſeur 12 eſt dans les deux cas le produit des nombres extrêmes 2 & 6: *Ainſi, dans toutes les Queſtions qui appartiennent à la double Règle de trois inverſe, où les nombres ſont ſuppoſés rangés comme dans la double Règle de trois directe, ſi les trois nombres du milieu ſont multipliés l'un par l'autre, & le produit diviſé par le produit des deux extrêmes, le quotient de cette diviſion ſera le nombre cherché.* Par ce moyen l'embarras de faire diſparoître des termes peut être évité; mais j'ai jugé à propos d'expliquer d'abord cette méthode, pour faire comprendre aux commençans la raiſon ſur laquelle le Théorême eſt fondé.

Queſtions qui regardent l'extraction des Racines quarrées.

40. QUESTION.

Un champ eſt large de 576 verges & long de 1296 verges. Je demande le côté d'un Quarré égal à ce champ.

Réponſe. Ce côté ſera de 864 verges.

41. QUESTION.

L'enclos d'un champ eſt trois fois plus long qu'il n'eſt large, & le champ eſt de 46128 verges quarrées: je demande quelle eſt la longueur & la largeur de l'enclos.

La largeur multipliée par la longueur, c'eſt-à-dire, la largeur multipliée trois fois par elle-même, eſt 46128; donc la largeur multipliée par elle-même eſt 15376; donc la largeur eſt 124, & la longueur 372.

42. QUESTION.

Une Société a mis enſemble la ſomme de 15 livres ſt. 5 ſchellings & 1 liard, chaque membre contribuant autant de liards qu'il y a de membres dans la Société, je demande le nombre des membres.

Réponſe. 121 membres.

IN-

INTRODUCTION
A LA
DOCTRINE DES FRACTIONS VULGAIRES
ET DES
FRACTIONS DECIMALES.

DEFINITIONS.

ART. I. UNE Fraction conſidérée ſimplement & abſtraitement, eſt l'expreſſion d'une partie ou de pluſieurs parties d'une Unité: comme ſi une Unité eſt ſuppoſée diviſée en 4 parties égales, & que trois de ces parties doivent être exprimées, cela ſe fait par la Fraction trois quatriémes, & s'écrit ainſi $\frac{3}{4}$: où le nombre 4, qui marque en combien de parties égales l'Unité eſt ſuppoſée diviſée, & qui détermine la vraye valeur, grandeur, ou dénomination de ces parties, s'appelle le Dénominateur de la Fraction, & le nombre 3, qui marque combien de ces parties ſont conſidérées dans la Fraction, le Numérateur: ainſi dans la Fraction $\frac{1}{2}$ ou un demi, 1 eſt le Numérateur, & 2 le Dénominateur; dans $\frac{2}{2}$ ou deux demis, 2 eſt le Numérateur & le Dénominateur, &c.

Quand une Fraction eſt appliquée à quelque quantité particuliére, cette quantité eſt nommée l'Entier de la Fraction. Ainſi dans $\frac{3}{4}$ d'un ſou, un ſou eſt l'Entier; dans trois quarts de ſix le nombre 6 eſt l'Entier; de même dans trois quarts de cinq ſixiémes, la Fraction cinq ſixiémes eſt l'Entier; car quoique dans un ſens abſolu ce ſoit une Fraction, cependant à l'égard de la Fraction trois quarts, c'eſt un Entier: la même quantité, ſuivant qu'on la conſidére, pouvant être un Entier ou une Fraction; ainſi un pied eſt un Entier, & la troiſiéme partie d'une verge eſt une Fraction, quoique ce ſoit une ſeule & même choſe. Lorſque l'Entier d'une Fraction n'eſt pas exprimé, on ſousentend toujours que c'eſt l'Unité: ainſi $\frac{3}{4}$ ſont $\frac{3}{4}$ de l'Unité; pareillement lorſque nous diſons que $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ſont $\frac{7}{12}$, nous entendons que ſi $\frac{1}{3}$ partie de l'Unité, & $\frac{1}{4}$ partie de l'Unité ſont ajoûtées l'une à l'autre, la ſomme ſera la même, que ſi l'Unité avoit été diviſée en 12 parties égales, & qu'on eût pris 7 de ces parties; de même encore, quand nous diſons que $\frac{4}{5}$ de $\frac{3}{7}$ ſont équivalens à $\frac{12}{35}$, le ſens

eſt, que ſi l'Unité eſt diviſée en 5 parties égales, & qu'on prenne 4 de ces parties, & que cette Fraction $\frac{4}{5}$ ſoit encore diviſée en 3 parties égales, & qu'on prenne 2 de ces parties, le réſultat ſera le même que ſi on avoit d'abord diviſé l'Unité en 15 parties égales, & qu'on en eût pris 8; & ce qui eſt vrai quand il s'agit de l'Unité, ſera vrai de même quelque quantité qu'on prenne pour l'Entier: ainſi s'il eſt vrai que $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ de l'Unité ſont égaux à $\frac{7}{12}$ de l'Unité, c'eſt-à-dire, s'il eſt vrai en général que $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ajoûtés enſemble ſont égaux à $\frac{7}{12}$, il ſera auſſi vrai de quelque Entier que ce ſoit en particulier, par exemple, d'une livre ſterling, que le $\frac{1}{3}$ d'une livre & le $\frac{1}{4}$ d'une livre, ajoûtés enſemble ſeront égaux à $\frac{7}{12}$ d'une livre; de même, s'il eſt vrai en général que $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ ſont égaux à $\frac{8}{15}$, il ſera auſſi vrai en particulier que $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ d'une livre ſeront équivalens à $\frac{8}{15}$ d'une livre, &c.

Des Fractions proprement & improprement ainſi nommées, & de la Réduction d'une Fraction improprement dite à un Entier ou à un Nombre entier avec une Fraction adhérente.

2. Il y a deux ſortes de Fractions; les Fractions proprement dites, & celles qu'on déſigne improprement par ce nom. Une Fraction proprement dite, eſt celle dont le Numérateur eſt moindre que le Dénominateur, comme $\frac{1}{2}$; & une Fraction improprement ainſi nommée celle dont le Numérateur eſt égal, ou plus grand que le Dénominateur, comme $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, &c.

OBJECTION.

Mais n'y a-t-il pas d'abſurdité à ſuppoſer une Fraction impropre, de trois deuxiémes, par exemple, puiſqu'une unité ne peut être diviſée en plus de deux deuxiémes? *Réponſe.* Il n'y a à cela pas plus d'abſurdité qu'à ſuppoſer que trois demi ſous ſont le prix de quelque choſe que ce ſoit, parce qu'un ſou ne peut être diviſé en plus de deux demi-ſous. Ces Fractions ſont appellées impropres, non pas à cauſe qu'il y a quelque abſurdité dans la ſuppoſition, ou dans l'expreſſion, mais parce qu'elles peuvent être plus proprement & plus intelligiblement exprimées, ſoit par un nombre entier, ſoit par un nombre mixte, compoſé d'un Entier & d'une Fraction; par exemple, ſi le Numérateur d'une Fraction eſt égal au Dénominateur, comme $\frac{4}{4}$, cette Fraction eſt toujours équivalente à l'unité; comme $\frac{4}{4}$ d'heure, ou quatre quarts-d'heure, ſont égaux à une heure, $\frac{4}{4}$ de ſou, ou quatre liards, ſont égaux à un ſou, &c. Et la raiſon

raiſon en eſt claire; car ſi une unité eſt diviſée en quatre parties égales, & que quatre de ces parties ſoient exprimées dans une Fraction, l'unité entiére eſt exprimée dans cette Fraction, c'eſt-à-dire, que cette Fraction peut toujours être conſidérée comme égale à l'unité: ainſi, ſi le Numérateur eſt double du Dénominateur, comme $\frac{2}{1}$, la Fraction eſt égale à 2, parce que $\frac{2}{1}$ contiennent $\frac{1}{1}$ ou 1 deux fois; de même $\frac{12}{4}$ ſont égaux à 3 & peuvent être exprimés par ce nombre; $\frac{16}{4}$ ſont égaux à 4, &c. & en général une Fraction eſt égale à l'unité priſe autant de fois que le Numérateur contient le Dénominateur: mais pour trouver combien de fois le Numérateur contient le Dénominateur, il faut diviſer le Numérateur par le Dénominateur; ainſi, ſi le Numérateur d'une Fraction improprement dite eſt diviſé par le Dénominateur, le quotient, s'il n'y a pas de reſte à la Diviſion, ſera le nombre entier par lequel la Fraction peut être exprimée: mais s'il y a un reſte à la Diviſion, le quotient avec une Fraction, dont le Numérateur eſt ce reſte, & le Dénominateur le Diviſeur, ſera un nombre mixte qui exprimera la Fraction propoſée: ainſi $\frac{16}{2}$ ſont équivalens au nombre entier 8; mais $\frac{17}{2}$ ſont équivalens au nombre mixte $8\frac{1}{2}$, $\frac{26}{3}$ au nombre mixte $8\frac{2}{3}$, comme 24 pieds ſont équivalens à 8 verges, 25 pieds à 8 verges & un pied, 26 pieds à 8 verges & 2 pieds &c. & c'eſt-là ce qu'on appelle la Réduction d'une Fraction à un nombre entier ou mixte.

La Réduction d'un nombre entier ou mixte à une Fraction improprement dite.

3. Comme l'unité peut être exprimée par une Fraction de quelque forme ou dénomination que ce ſoit, pourvu que le Numérateur ſoit égal au Dénominateur, comme $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, &c. ainſi le nombre 2 eſt réductible en quelque Fraction que ce ſoit dont le Numérateur eſt double du Dénominateur, comme $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{4}$, &c. & de même tout nombre eſt réductible en quelque Fraction que ce ſoit, dont le Numérateur contient le Dénominateur auſſi ſouvent que l'unité eſt contenue dans le nombre propoſé: de ſorte que toutes les fois qu'un nombre doit être réduit en une Fraction dont le Dénominateur eſt donné, ce nombre doit être multiplié par ce Dénominateur, & le produit avec ce Dénominateur mis deſſous, eſt la Fraction équivalente; ainſi, ſi le nombre 5 doit être réduit en demis ou deuxiémes, c'eſt-à-dire, en une Fraction dont le Dénominateur ſoit 2, il faut multiplier le nombre donné 5, par le Dénominateur donné 2, & l'on aura le nombre 5 égal à $\frac{10}{2}$, comme, par exemple, 5 ſous ſont égaux à 10 demi-ſous; ſi le nombre 8 doit être réduit en tiers ou troiſiémes, il faut

le multiplier par 3, & l'on aura 8 égal à $\frac{24}{3}$, comme 8 verges ſont égales à 24 pieds: enfin, ſi le nombre 2 doit être réduit en quatriémes, il deviendra égal à $\frac{8}{4}$, comme deux ſous ſont égaux à huit liards. Si le nombre à réduire eſt un nombre mixte, compoſé d'un Entier & d'une Fraction, le nombre entier doit toujours être réduit à la même dénomination que la Fraction annexe, & la Règle eſt telle: multipliez le nombre entier par le Dénominateur de la Fraction annexe, ajoûtez à ce produit le Numérateur, & cette ſomme avec le Dénominateur ſous elle ſera la Fraction équivalente: ainſi le nombre mixte $5\frac{1}{2}$ eſt équivalent à $\frac{11}{2}$, comme cinq ſous & demi ſont équivalens à onze demi-ſous. Cette opération porte ſa démonſtration avec elle; car le nombre 5 eſt égal à $\frac{15}{3}$, comme nous venons de le voir; & partant $5\frac{1}{3}$ ſont équivalens à $\frac{16}{3}$: de même le nombre $8\frac{2}{3}$, eſt égal à $\frac{26}{3}$, comme 8 verges & 2 pieds valent 26 pieds; enfin, $2\frac{3}{4}$ ſe peuvent réduire en $\frac{11}{4}$, comme 2 ſous & 3 liards ſe peuvent réduire en 11 liards.

LEMME.

4. *Si on prend un Entier, tel qu'une livre ſterling, & une Fraction comme* $\frac{1}{3}$, *je dis que* $\frac{1}{3}$ *d'une livre ſt. eſt la même choſe que* $\frac{1}{3}$ *de* 3 *livres ſt.*

Si une quantité, grande ou petite, eſt toujours diviſée dans le même nombre de parties, ces parties ſeront grandes ou petites, à proportion que la quantité diviſée eſt grande ou petite: ainſi $\frac{1}{4}$ d'une verge eſt 3 fois auſſi grand que $\frac{1}{4}$ d'un pied, puiſqu'une verge eſt trois fois auſſi grande qu'un pied; par la même raiſon $\frac{1}{4}$ de 3 livres ſt. eſt trois fois auſſi grand que $\frac{1}{4}$ d'une livre ſt.; mais $\frac{1}{4}$ d'une livre ſt. ſont auſſi trois fois auſſi grands que $\frac{1}{4}$ d'une livre ſt. ainſi $\frac{1}{4}$ d'une livre ſt. ſont égaux à $\frac{1}{4}$ de 3 livres ſt.; car l'une & l'autre de ces ſommes ſont juſtement trois fois autant que $\frac{1}{4}$ d'une livre ſt. C. Q. F. D.

Maniére d'eſtimer quelque partie fractionelle que ce ſoit d'un Entier en parties de moindre dénomination, & réciproquement.

5. On peut faire cette opération de pluſieurs maniéres, mais voici celle qui me paroît la plus commode. Suppoſé que je cherche la valeur de $\frac{1}{6}$ d'une livre ſt. je dirois, ſuivant le Lemme précédent, que $\frac{1}{6}$ d'une livre ſont la même choſe que $\frac{1}{6}$ de 5 livres; mais le ſecond eſt plus facile que le premier: ainſi je m'attache au dernier; c'eſt-à-dire, à trouver la ſixiéme partie de 5 livres, & voici comment: 5 livres, ou 100 ſchellings diviſés par 6 donnent 16 ſchellings, & il reſte 4 ſchellings; 4 ſchellings, ou 48 ſous,

48 ſous, diviſés par 6 donnent 8 ſous ſans reſte; ainſi un ſixiéme de 5 livres, ou la fraction $\frac{1}{6}$ d'une livre, eſt 16 ſchellings & 8 ſous. Si je cherchois la valeur de $\frac{5}{7}$ d'une livre, je trouverois la valeur de $\frac{1}{7}$ de 6 livres: ainſi 6 livres ou 120 ſchellings, diviſés par 7, donnent 17 ſchellings, & il reſte 1 ſchelling: or un ſchelling, ou le nombre 12, qui exprime combien il y a de ſous dans un ſchelling, diviſé par 7, donne 1 ſou, & il reſte 5 ſous, ou 20 liards, qui diviſés par 7, donnent deux liards, & il reſte 6 liards; enfin la ſeptiéme partie de 6 liards eſt, ſuivant le Lemme précédent, la même choſe que $\frac{6}{7}$ d'un liard; d'où je conclus, que $\frac{5}{7}$ d'une livre ſt. valent 17 ſchellings, 1 ſou, 2 liards, & $\frac{6}{7}$ de liard: mais $\frac{6}{7}$ d'un liard approchent de ſi près d'un liard, que ſi je préfére à la plus grande exactitude la commodité d'éviter une fraction, je dirai que $\frac{5}{7}$ d'une livre ſont 17 ſchellings, 1 ſou & 3 liards. Enfin, ſi je veux ſavoir la valeur de $\frac{3}{5}$ de 17 ſchellings & 6 ſous, je dirai, $\frac{3}{5}$ de 17 ſchellings & 6 ſous ſont équivalens à $\frac{1}{5}$ de deux fois autant, qui eſt $\frac{1}{5}$ de 35 ſchellings: mais $\frac{1}{5}$ de 35 ſchellings eſt 11 ſchellings & 8 ſous; donc $\frac{3}{5}$ de 17 ſchellings & 6 ſous ſont 11 ſchellings & 8 ſous.

Un ſeul exemple ſuffira pour le contraire de cette réduction. S'il s'agit de réduire 1 ſchelling, 2 ſous & 3 liards en parties fractionelles d'une livre, je conſidére que dans une livre il y a 960 liards, & que dans un ſchelling, 2 ſous & 3 liards, il y a 59 liards; donc un liard eſt $\frac{1}{960}$ d'une livre, & 1 ſchelling, 2 ſous & 3 liards ſont $\frac{59}{960}$ d'une livre.

Préparations pour d'autres réductions & opérations ſur les Fractions.

6. Toutes les opérations qu'on fait pour réduire des Fractions, peuvent ſe déduire médiatement ou immédiatement du principe ſuivant. *Si le Numérateur d'une Fraction croît, le Dénominateur reſtant le même, la valeur de la Fraction croît à proportion. D'autre part, ſi le Dénominateur croît en quelque proportion que ce ſoit, le Numérateur reſtant le même, la valeur de la Fraction diminuera proportionellement.* Ainſi $\frac{3}{5}$ ſont deux fois autant que $\frac{3}{10}$, & $\frac{3}{10}$ en eſt ſeulement la moitié.

Il ſuit de ce principe, que ſi le Numérateur & le Dénominateur d'une Fraction ſont multipliés ou diviſés par le même nombre, la valeur de la Fraction n'en ſera pas changée; parce qu'autant que la Fraction eſt augmentée par la multiplication du Numérateur, autant eſt-elle diminuée par la multiplication du Dénominateur; & autant que la Fraction eſt diminuée par la diviſion du Numérateur, autant eſt-elle augmentée par la diviſion du Dénominateur. Ainſi les termes de la Fraction $\frac{1}{2}$ étant doublés, donnent $\frac{2}{4}$, Fraction de même valeur que l'autre; & au contraire, les termes de la Fraction $\frac{6}{8}$ diviſés par 2, donnent $\frac{3}{4}$.

Il

Il paroît par-là que toute Fraction eſt ſuſceptible d'une infinité d'expreſſions, puiſqu'on peut choiſir entre un nombre infini de Multiplicateurs, par leſquels le Numérateur & le Dénominateur de la Fraction peuvent être multipliés, & changer de cette maniére l'expreſſion de la Fraction, ſans que la valeur en ſoit changée. Ainſi la Fraction $\frac{1}{2}$, ſi le Numérateur & le Dénominateur ſont multipliés par 2, devient $\frac{2}{4}$; par 3, $\frac{3}{6}$; par 4, $\frac{4}{8}$, par 5, $\frac{5}{10}$, & ainſi à l'infini; & toutes ces expreſſions ſont également celles de la même Fraction: au milieu de cette variété, on ne peut s'attendre que chaque Fraction qu'on rencontre en ſon chemin, ſoit toujours réduite aux plus ſimples & aux moindres termes; mais l'article ſuivant enſeignera à les y réduire, quand elles ne le ſeront pas.

Réduction des Fractions aux plus ſimples termes.

7 Lorsque vous ſoupçonnez qu'une Fraction n'eſt pas réduite aux plus ſimples termes, trouvez, s'il eſt poſſible, quelque nombre qui diviſe ſans reſte le Numérateur & le Dénominateur de la Fraction; car ſi un tel nombre peut être trouvé, & que la diviſion ſoit faite, les deux quotiens qui en viendront, ſeront reſpectivement le Numérateur & le Dénominateur d'une Fraction égale à la Fraction propoſée, mais exprimée en termes plus ſimples, comme il eſt évident par l'article précédent. Par exemple, on propoſe la réduction de la Fraction $\frac{10}{15}$: pour trouver un nombre qui diviſe ſans reſte les nombres 10 & 15, je commence par le nombre 2, qui eſt le premier nombre entier qu'on puiſſe employer dans la Diviſion; mais je vois que le nombre 2 ne peut diviſer 15: 3, qui eſt le nombre ſuivant, ne peut ſervir non plus, car il ne diviſe pas 10; je paſſe le nombre 4, parce que 2 ne pouvant diviſer 15, 4 le peut bien moins encore: le nombre ſuivant eſt 5, & la diviſion réuſſit avec celui-ci; car ſi 10 & 15 ſont diviſés par 5, les quotiens reſpectifs ſeront 2 & 3, tous deux ſans reſte; ainſi la Fraction $\frac{10}{15}$, réduite au plus ſimple, ſe trouve équivalente à $\frac{2}{3}$; c'eſt-à-dire, que ſi l'unité eſt diviſée en quinze parties égales, & qu'on prenne 10 de ces parties, la valeur en ſera égale à celle qu'on auroit ſi on avoit diviſé l'unité en 3 parties égales, & qu'on en eût pris 2. En ſecond lieu, ſi la Fraction à réduire eſt $\frac{2520}{7560}$, diviſez-en les termes par 2, & vous aurez la Fraction $\frac{1260}{3780}$; diviſez encore par 2, & vous aurez $\frac{630}{1890}$; diviſez encore par 2, & vous aurez $\frac{315}{945}$ & toute diviſion par 2 eſt finie: diviſez ces derniers termes par 3, & vous aurez $\frac{105}{315}$; diviſez encore par 3, & vous aurez $\frac{35}{105}$; diviſez par 5 & vous aurez $\frac{7}{21}$; &

enfin

enfin diviſez par 7, & vous aurez $\frac{1}{3}$; ainſi la Fraction $\frac{2520}{7560}$ après les diviſions des deux termes par 2, 2, 2, 3, 3, 5, 7, ſe trouve égale à $\frac{1}{3}$. En troiſiéme lieu, la Fraction $\frac{15}{45}$ après les diviſions par 2, 2, 3, devient $\frac{5}{15}$. En quatriéme lieu, $\frac{15}{35}$ après les diviſions par 2, 2, 7, deviennent $\frac{3}{7}$. En cinquiéme lieu, $\frac{144}{180}$, après les diviſions par 2, 2, 3, 3, deviennent $\frac{4}{5}$. En ſixiéme lieu, $\frac{42}{126}$, après les diviſions par 2, 3, 7, deviennent $\frac{1}{3}$. En ſeptiéme lieu, $\frac{315}{840}$, après les diviſions par 3, 5, 7, deviennent $\frac{3}{8}$. En huitiéme lieu, $\frac{35}{840}$, après les diviſions par 5, 7, deviennent $\frac{1}{24}$. En neuviéme lieu, $\frac{735}{245}$, après les diviſions par 5, 7, 7, deviennent $\frac{3}{1}$, ou 3.

Voici quelques remarques qui pourront aider dans la pratique de cette règle.

1°. 2 diviſent exactement tout nombre qui finit par un chiffre pair ou par un zéro, comme 36, 30, &c. mais aucun autre.

2°. 5 diviſent tout nombre qui finit par 5, ou par zéro, comme 75, 70, &c. & point d'autre.

3°. 3 diviſent tout nombre dont les chiffres qui l'expriment additionnés font une ſomme diviſible par 3: ainſi ce nombre diviſe 471, parce qu'il diviſe 12, qui eſt la ſomme de 4, 7 & 1.

4°. Si le Numérateur & le Dénominateur finiſſent par des zéros, retranchez-en un nombre égal de l'un & de l'autre: ainſi $\frac{2500}{56000}$, eſt la même choſe que $\frac{25}{560}$, ou $\frac{7}{112}$, ou $\frac{1}{16}$.

Enfin, il y a une règle infaillible pour trouver le plus grand diviſeur commun de deux nombres, qui en ont un; & par-là une Fraction peut être réduite au plus ſimple, par une ſeule opération. Cependant je me trouve obligé de renvoyer à une autre occaſion la démonſtration de cette règle, que voici: ſoit *a* & *b* les deux nombres donnés, dont on cherche le plus grand diviſeur commun; *a* eſt le plus grand nombre & *b* le plus petit: diviſez *a* par *b*, & ſans vous embarraſſer du quotient, appellez le reſte *c*; diviſez encore *b* par *c*, & appellez le reſte *d*; diviſez *c* par *d*, & appellez le reſte *e*; diviſez *d* par *e* & appellez le reſte *f*, & continuez ainſi juſqu'à ce que vous veniez à un diviſeur, comme *f*, qui diviſe le nombre précédent *e* ſans reſte: je dis que ce dernier diviſeur eſt le plus grand diviſeur commun des nombres donnés *a* & *b*. Par exemple, ſoit *a* 1344 & *b* 582: pour trouver le plus grand diviſeur commun de ces deux nombres, je diviſe *a* (1344) par *b* (582) & il

reſte 180, que j'appelle *c*; je diviſe *b* (582) par *c* (180) & il reſte 42, que j'appelle *d*; je diviſe *c* (180) par *d* (42) & il reſte 12, que j'appelle *e*; je diviſe *d* (42) par *e* (12) & il reſte 6, que j'appelle *f*; enfin je diviſe *e* (12) par *f* (6) & il ne reſte rien : d'où je conclus que le nombre 6 eſt le plus grand diviſeur commun de 1344 & 582; & comme les quotiens des diviſions par 6, ſont 224 & 97, il ſuit que la Fraction $\frac{582}{1344}$, réduite aux plus ſimples termes eſt $\frac{97}{224}$. Si on ne trouve pas d'autre diviſeur commun que l'unité, c'eſt une preuve que la Fraction eſt toute réduite au plus ſimple.

De cet Article & du précédent il ſuit que toutes Fractions réductibles aux mêmes termes les plus ſimples ſont égales, comme $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{11}{17}$, qui ſont toutes réductibles à $\frac{a}{b}$; cependant le contraire n'eſt pas vrai, & toutes Fractions égales ne ſont pas réductibles aux mêmes termes les plus ſimples, comme je le ferai voir dans autre endroit. (Voyez *Elémens d'Algébre* Art. 193.)

Pour faciliter l'intelligence de l'Article ſuivant, il eſt à propos de dire que cette marque × eſt le ſigne de la multiplication, & qu'en ce ſigne liſant on le prononce *par*: ainſi 2 × 3, ou 2 *par* 3, ſignifient 6; 2 × 3 × 4 ſignifient 24; 2 × 3 × 4 × 5 ſignifient 120, *&c*; & dans certains cas, il vaut mieux exprimer ainſi la multiplication de ces termes l'un par l'autre, que par le produit de leur multiplication, comme il paroîtra dans l'article ſuivant. Il faut remarquer qu'il n'importe pas dans quel ordre ces chiffres ſont placés; car 2 × 3 × 4 × 5 ſont juſtement la même choſe que 4 × 5 × 2 × 3.

Réduction des Fractions de différentes Dénominations à d'autres de la même Dénomination.

8. Il y a une autre réduction des Fractions, non moins utile que la précédente, ſavoir la réduction des Fractions de différentes dénominations à d'autres de même dénomination, ou qui ayent le même Dénominateur, en conſervant la valeur qu'elles avoient: Voici comme cela ſe fait. Après avoir rangé en quelque ordre toutes les Fractions a réduire, commencez par la premiére, prenez-en le Numérateur & multipliez-le par tous les Dénominateurs de toutes les Fractions, excepté le ſien propre, & mettez le produit de toutes ces multiplications ſous cette premiére Fraction; enſuite multipliez de même le Numérateur de la ſeconde Fraction, par tous les Dénominateurs, excepté le ſien propre, & mettez

mettez ce produit ſous cette ſeconde Fraction ; & faites de-même pour tous les Numérateurs, ayant toujours l'attention d'excepter de la multiplication le Dénominateur de la Fraction, dont le Numérateur eſt actuellement multiplié. Enfin multipliez tous les Dénominateurs l'un par l'autre, & mettez-en le produit ſous chacun des produits que vous avez trouvés, & vous aurez une autre ſuite de Fractions ; toutes de la même dénomination, & dont les valeurs ſeront reſpectivement les mêmes que celles des Fractions dont elles ſont provenues. Par exemple, ſoient propoſées pour être réduites à la même dénomination les Fractions ſuivantes $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$: 1°. Le Numérateur de la premiére Fraction eſt 1, & les Dénominateurs des autres Fractions ſont 4, 6 & 8 ; or $1 \times 4 \times 6 \times 8$ donne 192 ; ainſi je mets 192 ſous $\frac{1}{2}$. 2°. Le Numérateur de la ſeconde Fraction eſt 3, & les Dénominateurs des autres ſont 6, 8 & 2 ; or $3 \times 6 \times 8 \times 2$, donnent 288 ; c'eſt pourquoi je mets 288 ſous $\frac{3}{4}$. 3°. $5 \times 8 \times 2 \times 4$, donnent 320, & je mets 320 ſous $\frac{5}{8}$. 4°. $7 \times 2 \times 4 \times 6$ donnent 336, & je mets 336 ſous $\frac{7}{8}$. Enfin le nombre $2 \times 4 \times 6 \times 8$ (ou le produit de tous les Dénominateurs) eſt 384, que je mets ſous chacun des Numérateurs que je viens de trouver ; & j'ai une autre ſuite de Fractions, ſavoir, $\frac{192}{384}, \frac{288}{384}, \frac{320}{384}, \frac{336}{384}$, toutes de la même dénomination, comme il paroît par l'opération même, & toutes reſpectivement de la même valeur que celles dont elles viennent, comme il paroîtra dans le moment ; mais premiérement faites l'opération réguliérement & la rangez ainſi.

$$\frac{1}{2}^{\circ} \quad \frac{3}{4}^{\circ} \quad \frac{5}{8}^{\circ} \quad \frac{7}{8}^{\circ}$$
$$\frac{192}{384}^{\circ} \quad \frac{288}{384}^{\circ} \quad \frac{320}{384}^{\circ} \quad \frac{336}{384}^{\circ}$$

Démonſtration de cette règle.

Pour cette Démonſtration, il ſuffit de faire voir par la nature de l'opération même, que les Fractions données ne ſouffrent aucun changement dans leurs valeurs par cette réduction ; pour cet effet, il faut écrire au long la compoſition des nouveaux Numérateurs au-lieu de les exprimer par leurs produits, comme dans l'Article précédent ; & en faire de-même de leur Dénominateur commun, & l'on aura ;

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{7}{8}$$
$$\frac{1 \times 4 \times 6 \times 8}{2 \times 4 \times 6 \times 8}^{\circ} \quad \frac{3 \times 6 \times 8 \times 2}{4 \times 6 \times 8 \times 2}^{\circ} \quad \frac{5 \times 8 \times 2 \times 4}{6 \times 8 \times 2 \times 4}^{\circ} \quad \frac{7 \times 2 \times 4 \times 6}{8 \times 2 \times 4 \times 6}^{\circ}$$

Par cette méthode d'opérer, il paroît d'abord que le Numérateur & le Dénominateur de la premiére Fraction $\frac{1}{2}$ ſont tous deux multipliés par

les mêmes nombres dans cette réduction, ſavoir, par $4 \times 6 \times 8$; & par conſéquent que la Fraction ne ſouffre aucun changement dans ſa valeur, ſuivant l'Article 6. De-même, les termes de la ſeconde Fraction $\frac{1}{4}$ ſont multipliés par les mêmes nombres $6 \times 8 \times 2$; ainſi la valeur de cette Fraction n'eſt pas non plus changée ; & il en eſt de-même de toutes les autres. *C. Q. F. D.*

Autres exemples de cette règle.

$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{8}$.	$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{12}$.	$\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{18}$.
$\frac{360}{720^{e}}$	$\frac{240}{720^{e}}$	$\frac{180}{720^{e}}$	$\frac{144}{720^{e}}$	$\frac{120}{720^{e}}$	$\frac{120}{360^{e}}$	$\frac{90}{360^{e}}$	$\frac{72}{360^{e}}$	$\frac{60}{360^{e}}$
		$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{8}$.	$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{12}$.		
		$\frac{30}{120^{e}}$	$\frac{24}{120^{e}}$	$\frac{20}{120^{e}}$	$\frac{6}{30^{e}}$	$\frac{5}{30^{e}}$		

L'uſage de cette règle paroîtra bientôt dans l'addition & dans la ſouſtraction des Fractions; en attendant il n'eſt pas mal à propos d'obſerver, qu'il ſeroit fort difficile, ſi non impoſſible, de comparer enſemble des Fractions de différentes dénominations, ſans les réduire à la même dénomination. Par exemple, ſuppoſé qu'on me demandât, laquelle de ces deux Fractions, $\frac{3}{4}$, ou $\frac{5}{7}$, eſt la plus grande; il paroîtroit difficile au premier coup d'œil de répondre à cette queſtion; mais lorſque je ſais que $\frac{3}{4}$ eſt la même choſe que $\frac{21}{28}$, & que $\frac{5}{7}$, eſt la même choſe que $\frac{20}{28}$, je vois d'abord que la Fraction $\frac{3}{4}$ eſt plus grande que $\frac{5}{7}$ de la vingt-huitiéme partie du tout. Paſſons à-préſent aux quatre opérations ſur les Fractions, ſavoir; leur Addition, Souſtraction, Multiplication & Diviſion.

De l'Addition des Fractions.

9. Lorſque pluſieurs Fractions doivent être ajoûtées enſemble, réduiſez- les d'abord à la même dénomination, ſi elles n'y ſont pas déjà, & alors additionnant les nouveaux Numérateurs enſemble, plaçez au-deſſous de cette ſomme le commun Dénominateur. Lorſque vous avez des nombres mixtes, additionnez premiérement les Fractions, & enſuite les nombres entiers: mais ſi les Fractions additionnées forment une Fraction improprement dite, réduiſez-la ſuivant l'Article 2, à un nombre entier ou mixte; & en écrivant la partie fractionnelle, s'il en reſte une, réſervez le nombre entier pour le mettre avec les entiers.

On pourroit rapporter à cette règle, ſi on ne l'avoit déjà enſeigné dans l'Article 3, la réduction d'un nombre mixte à une Fraction impro-

pre-

prement dite: car il ne faut pour cela qu'ajoûter à un nombre entier une Fraction; ce qui peut ſe faire en conſidérant le nombre entier comme une Fraction dont le Dénominateur eſt l'Unité.

Exemples d'Addition en Fractions.

1°. $\frac{3}{10}$ & $\frac{4}{10}$ ajoûtés enſemble ſont $\frac{7}{10}$, par la même raiſon que 3 ſchellings & 4 ſchellings ajoûtés enſemble ſont 7 ſchellings.

2°. Les Fractions $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, réduites à la même dénomination, par l'Article précédent, ſont $\frac{4}{12}$ & $\frac{3}{12}$, & ajoûtées enſemble ſont $\frac{7}{12}$; ainſi les Fractions $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, ajoûtées enſemble ſont $\frac{7}{12}$.

Pour confirmer ces concluſions abſtraites, & pour accoutumer les commençans à concevoir nettement les Fractions, il ne ſera pas mal d'appliquer ces exemples à quelques cas particuliers. Prenons celui de la livre ſt., & voyons ſi le $\frac{1}{3}$ & le $\frac{1}{4}$ d'une livre ſt., ajoûtés enſemble ſont $\frac{7}{12}$ d'une livre ſt. ou non: par la diviſion nous trouvons que le tiers d'une livre ſt. eſt 6 ſchellings & 8 ſous, & que le quart d'une livre ſt. eſt 5 ſchellings; ces deux ſommes ſont enſemble 11 ſchellings & 8 ſous; ainſi $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ d'une livre ſt. ajoûtés enſemble ſont 11 ſchellings & 8 ſous; mais par l'Article 5 on trouvera que $\frac{7}{12}$ d'une livre ſt. ſont auſſi 11 ſchellings & 8 ſous; donc $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ d'une livre ſt. ajoûtés enſemble ſont $\frac{7}{12}$ d'une livre ſt.; & la même choſe aura lieu dans quelque cas que ce ſoit.

3°. $\frac{2}{7}$ & $\frac{3}{7}$, c'eſt-à-dire $\frac{14}{49}$ & $\frac{21}{49}$, ajoûtés enſemble ſont $\frac{35}{49}$; ce qui ſera vrai auſſi quand il s'agira d'une livre ſt.: car par l'Article 5. $\frac{2}{7}$ d'une livre ſt. ſont 8 ſchellings, & $\frac{3}{7}$ ſont 7 ſchellings & 6 ſous; & leur ſomme eſt 15 ſchellings & 6 ſous; qu'on trouvera auſſi être la valeur de $\frac{35}{49}$ d'une livre ſt.; ainſi $\frac{2}{7}$ & $\frac{3}{7}$ d'une livre ſt. ajoûtés enſemble ſont $\frac{35}{49}$ d'une livre ſt.

4°. $\frac{5}{7}$ & $\frac{4}{7}$, c'eſt-à-dire, $\frac{10}{17}$ & $\frac{12}{17}$, ajoûtés enſemble, ſont $\frac{22}{17}$, Fraction improprement dite, laquelle réduite à un nombre mixte, ſuivant l'Art. 2, eſt 1 & $\frac{7}{17}$: voyons à-préſent ſi $\frac{5}{7}$ d'une livre ſt. & $\frac{4}{7}$ d'une pareille livre, ajoûtés enſemble, font une livre & $\frac{7}{17}$, de livre, ou non: $\frac{5}{7}$ d'une livre ſt. ou 13 ſchellings & 4 ſous, ajoûtés à $\frac{4}{7}$ d'une livre ſt. ou 16 ſchellings, font une livre 9 ſchellings & 4 ſous; & $\frac{7}{17}$ d'une livre ſt. ſont juſtement 9 ſchellings & 4 ſous; ainſi $\frac{5}{7}$ & $\frac{4}{7}$ d'une livre ſt. ajoûtés l'un à l'autre font une livre & $\frac{7}{17}$ d'une livre ſt.

5°. $\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{8}$, c'eſt-à-dire, $\frac{12}{24}$ & $\frac{3}{24}$, ajoûtés l'un à l'autre, font $\frac{15}{24}$, ou 1 $\frac{7}{12}$, ce qu'on trouvera vrai auſſi en l'appliquant à la livre ſt.

6°. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, c'eſt-à-dire, $\frac{360}{720}$, $\frac{240}{720}$, $\frac{180}{720}$, $\frac{144}{720}$, $\frac{120}{720}$, additionnés ſont $\frac{1044}{720}$; c'eſt-à-dire $\frac{87}{60}$; faites l'opération en monnoyes.

7°. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, c'eſt-à-dire, $\frac{360}{720}$, $\frac{480}{720}$, $\frac{540}{720}$, $\frac{576}{720}$, $\frac{600}{720}$, additionnés ſont $\frac{2556}{720}$, c'eſt-à-dire, $3\frac{11}{20}$.

8°. La ſomme des nombres mixtes $7\frac{1}{3}$ & $8\frac{1}{4}$ eſt $15\frac{7}{12}$; car la ſomme des Fractions eſt $\frac{7}{12}$ ſuivant le ſecond exemple, & la ſomme des Entiers eſt 15.

9°. $5\frac{1}{7}$ ajoûtés à $7\frac{4}{7}$, donnent $13\frac{7}{17}$; car la ſomme des Fractions eſt $1\frac{7}{17}$, ſuivant le quatriéme exemple; & ce nombre entier 1 ajoûté aux entiers 5 & 7, donne 13.

10°. $8\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, $10\frac{3}{4}$, $11\frac{4}{5}$, $12\frac{5}{6}$, additionnés donnent $53\frac{11}{10}$; car les Fractions donnent $3\frac{11}{10}$, ſuivant l'exemple ſeptiéme, & le nombre entier 3 joint aux autres entiers fait 53.

11°. Le nombre entier 2, ajoûté à la Fraction $\frac{3}{4}$, donne $\frac{11}{4}$; car le nombre entier 2, peut être conſidéré comme une Fraction, dont le Dénominateur eſt l'Unité; or $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{4}$, réduits à la même dénomination, ſont $\frac{8}{4}$ & $\frac{3}{4}$, qui joints enſemble ſont $\frac{11}{4}$.

C'eſt ainſi pareillement que l'Unité peut être additionnée avec quelque Fraction que ce ſoit, lorſque la ſouſtraction le rend néceſſaire. Mais il vaut mieux encore tourner la choſe ainſi : l'Unité peut être changée en une Fraction de quelque dénomination que l'on voudra, pourvu que le Numérateur ſoit égal au Dénominateur; voyez l'Art. 2. Suppoſé donc que vous vouliez ajoûter l'unité à $\frac{2}{3}$; faites l'unité égale à $\frac{1}{3}$, & cette Fraction ajoûtée à $\frac{1}{3}$, fait $\frac{2}{3}$: l'unité ajoûtée à $\frac{3}{3}$, fait $\frac{4}{3}$; car $\frac{1}{3}$, & $\frac{3}{3}$ font $\frac{4}{3}$.

Souſtraction des Fractions.

10°. Lorſqu'une moindre Fraction doit être retranchée d'une plus grande, il faut les préparer comme pour l'Addition; c'eſt-à-dire qu'il faut les réduire à la même dénomination, ſi elles n'y ſont pas déjà. Alors retranchant le Numérateur de la moindre Fraction de celui de la plus grande, écrivez le reſte avec le commun Dénominateur deſſous. Quand il s'agit de nombres mixtes, il faut ſouſtraire d'abord la Fraction du plus petit nombre de celle du plus grand, & enſuite le plus petit nombre entier du plus grand; mais ſi, comme il arrive ſouvent, le plus grand nombre mixte a la plus petite Fraction, il faut emprunter une unité du nombre entier & l'ajoûter à la Fraction, comme il a été inſinué à la fin de l'Article précédent.

Exemples de Souſtractions de Fractions.

1°. $\frac{3}{16}$ étant ſouſtraits de $\frac{4}{16}$, reſte $\frac{1}{16}$; tout comme 3 ſchellings étant retranchés de 4 ſchellings, il reſte 1 ſchelling.

2°. $\frac{3}{7}$ étant retranchés de $\frac{5}{7}$, c'eſt-à-dire $\frac{18}{42}$ de $\frac{30}{42}$, il reſte $\frac{12}{42}$ ou $\frac{2}{7}$. Ainſi $\frac{3}{7}$ de

de livre ſt., ou 15 ſchellings, étant retranchés de $\frac{1}{2}$ de livre, ou de 16 ſchellings & 8 ſous, il reſte $\frac{1}{12}$ de livre, qui eſt 1 ſchelling & 8 ſous.

3°. $7\frac{1}{3}$ étant retranchés de $8\frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire, $7\frac{2}{3}$ étant retranchés de $8\frac{1}{3}$, il reſte $1\frac{1}{3}$.

4°. $7\frac{1}{4}$ étant ſouſtraits de $8\frac{1}{4}$, c'eſt-à-dire $7\frac{1}{4}$ étant ſouſtraits de $7\frac{1}{4}$, donnent $\frac{3}{4}$, ou $\frac{1}{2}$; car le plus grand nombre ayant la plus petite Fraction, j'emprunte une unité du nombre entier 8, qui ſe trouve réduit à 7; & cette unité, je l'ajoûte ſous la forme de $\frac{4}{4}$ à la Fraction $\frac{1}{4}$, qui devient par-là $\frac{5}{4}$.

5°. $7\frac{1}{3}$ étant ſouſtraits de $8\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, $7\frac{2}{3}$ de $8\frac{1}{2}$, ou $7\frac{2}{6}$ de $7\frac{3}{6}$, donnent $\frac{1}{6}$.

6°. $7\frac{1}{7}$ étant ſouſtraits de 8, c'eſt-à-dire, $7\frac{1}{7}$ de $7\frac{1}{7}$, il reſte $\frac{1}{7}$.

Multiplication des Fractions.

11. Multiplier par un nombre entier, c'eſt prendre le Multiplicande autant de fois que ce nombre entier contient d'unités; ainſi multiplier par un nombre mixte, eſt non ſeulement prendre le Multiplicande autant de fois que le nombre entier contient d'unités, mais encore prendre par deſſus une partie, ou des parties de ce Multiplicande, autant qu'il eſt exprimé par la Fraction du nombre mixte. Ainſi 10 multipliés par $2\frac{1}{2}$, donnent 25: car, comme le nombre $2\frac{1}{2}$ eſt mitoyen entre 2 & 3, ainſi le produit doit être mitoyen entre 20 & 30, c'eſt-à-dire, 25. Pareillement, 10 multipliés par $1\frac{1}{2}$, donnent 15, & multipliés par $\frac{1}{2}$, donnent 5. Multiplier par une Fraction proprement dite, n'eſt donc autre choſe que prendre telle partie, ou telles parties du Multiplicande, qu'exprime la Fraction. Certainement, prendre 10 deux fois & une demie fois de plus, une fois & une demie fois de plus, nulle fois & une demie fois de plus (ce qui eſt prendre la moitié de 10,) ſont des opérations de même eſpéce, & ne différent l'une de l'autre qu'en degré; & ſi les deux premiéres paſſent ſous le nom de Multiplication, la derniére doit y paſſer auſſi; & s'il y a de l'abſurdité, elle n'eſt que dans le nom & point dans la choſe.

L'Arithmétique n'a d'abord été employée qu'à opérer ſur les nombres entiers, & à cet égard le nom de multiplication étoit aſſez convenable, excepté dans le cas de l'Unité. Mais lorſqu'on vint à conſidérer, qu'il n'y a point d'Unité qui ne ſoit diviſible encore; & que par conſéquent il y avoit non ſeulement une infinité de nombres fractionnels au-deſſous de l'Unité, mais auſſi qu'entre deux nombres entiers quels qu'ils ſoient, il y a une infinité de nombres mixtes; on jugea, & avec raiſon, que l'Arithmétique ſeroit très-imparfaite, ſi ſes opérations ne s'étendoient pas auſſi à ces ſortes de nombres; mais on ne changea pas le nom de ces opérations, & celui de Multiplication ſe trouva peu exact, pour ce

qu'il

qu'il ſignifioit; ce qui doit être attribué à un manque de prévoyance inévitable dans ceux qui ont impoſé ces noms, & non à aucun défaut dans la Science même. La même choſe a lieu dans bien d'autres Sciences, dont les objets ſe ſont étendus au-delà de ce qu'elles étoient quand leurs noms leur furent impoſés. Ainſi la Géométrie, dont le nom n'exprime que l'Art de meſurer le terrain, eſt à-préſent la Science qui traite de la nature & des propriétés de toutes les Figures, ou plutôt de toutes les modifications de l'Etendue; deſorte que l'Art de meſurer le terrain, ou l'Arpentage, n'en eſt à-préſent que la moindre partie. Ainſi l'Hydroſtatique, qui originairement n'eſt que l'Art de peſer les corps dans l'eau, ou plutôt l'Art de trouver les gravités ſpécifiques des corps en les peſant dans l'eau, eſt à-préſent la Science qui traite de la nature & des propriétés des Fluïdes en général; & les propriétés de l'Air & du Mercure, entant qu'ils ſont fluïdes, ſont les objets de l'Hydroſtratique, autant que l'eau même.

Mais on inſiſtera peut-être, & l'on dira, que prendre la moitié d'une quantité n'eſt pas la multiplier, mais la diviſer. A quoi je réponds, qu'il eſt impoſſible de prendre la moitié d'une quantité ſans la diviſer par 2; & par conſéquent que multiplier par $\frac{1}{2}$, a le même effet que de diviſer par 2; mais cela ne prouve pas que la Multiplication & la Diviſion ſoient la même choſe; mais bien que ces deux opérations, quoique contraires, peuvent s'employer dans certains cas l'une pour l'autre, ce qui n'eſt pas un myſtére pour quiconque eſt verſé dans l'Arithmétique, & ſera d'ailleurs expliqué dans l'Article ſuivant.

Une Fraction peut être multipliée par un nombre entier en deux maniéres; ou en multipliant le Numérateur par ce nombre, ou en diviſant le Dénominateur par ce même nombre, lorſque cette diviſion eſt poſſible: ainſi ſi la Fraction $\frac{4}{5}$ doit être multipliée par 2, le produit ſera de même valeur, ſoit qu'on double le Numérateur, comme $\frac{8}{5}$, ou qu'on diviſe le Dénominateur par 2, comme $\frac{4}{2}$: & c'eſt ce qui eſt évident par l'Art. 6. où l'on a prouvé qu'une Fraction eſt également augmentée, ſoit en augmentant le Numérateur, ſoit en diminuant le Dénominateur.

Si une Fraction doit être multipliée par une Fraction, multipliez le Numérateur & le Dénominateur du Multiplicande, par le Numérateur & par le Dénominateur du Multiplicateur reſpectivement, & la Fraction qui réſultera de ces opérations ſera le produit cherché. Ainſi, s'il s'agiſſoit de multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{5}$, ou, ce qui eſt la même choſe, s'il s'agiſſoit de ſavoir combien ſont $\frac{3}{5}$ de $\frac{2}{3}$, la réponſe eſt $\frac{6}{15}$; & la raiſon en eſt évidente: car $\frac{1}{5}$ de $\frac{2}{3}$ eſt $\frac{2}{15}$, ſuivant l'Art. 6. parceque faire le Dénominateur trois

fois

fois plus grand, c'eſt faire la Fraction trois fois plus petite; mais ſi $\frac{1}{3}$ de $\frac{4}{7}$ eſt $\frac{4}{17}$, $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{7}$ ſont deux fois autant, c'eſt-à-dire $\frac{8}{17}$; ainſi pour ſavoir le produit de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{7}$, il faut multiplier le Numérateur & le Dénominateur de $\frac{4}{7}$ par le Numérateur & le Dénominateur de $\frac{2}{3}$ reſpectivement; & le même raiſonnement a lieu en tout autre cas.

Si un nombre entier doit être multiplié par une Fraction, changez le Multiplicande en Multiplicateur, & opérez comme ci-devant; ou autrement, conſidérez le Multiplicande comme une Fraction dont le Dénominateur eſt l'Unité, & opérez comme ſi vous deviez multiplier deux Fractions l'une par l'autre : par ce moyen vous réduirez les deux règles en une. Ainſi 6 ou $\frac{6}{1}$, multipliés par $\frac{2}{3}$, donnent $\frac{12}{3}$, ou 4.

Si le Multiplicateur ou le Multiplicande, ou l'un & l'autre ſont des nombres mixtes, il faut premièrement les réduire en Fractions improprement dites, ſelon l'Art. 3; & alors les multiplier ſuivant la règle générale.

Exemples de la Multiplication des Fractions.

1°. $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{8}$, en multipliant les Numérateurs, l'un par l'autre, & les Dénominateurs, l'un par l'autre, ſont $\frac{14}{24}$ ou $\frac{7}{12}$: & cela ſe trouve auſſi dans tous les cas particuliers: car $\frac{7}{8}$ d'une livre ſt. ſont 17 ſchellings & 6 ſous; & $\frac{2}{3}$ de 17 ſchellings & 6 ſous valent (ſuivant l'Art. 5.) $\frac{2}{3}$ de 35 ſchellings, c'eſt-à-dire 11 ſchellings & 8 ſous; ainſi $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{8}$ d'une livre ſt. ſont 11 ſchellings & 8 ſous, qu'on trouvera auſſi être la valeur de $\frac{7}{12}$ d'une livre ſt.

Ici nous pouvons obſerver, que toutes les fois que deux Fractions doivent être multipliées l'une par l'autre, le produit eſt toujours le même, par laquelle des deux que l'on multiplie l'autre, tout comme il en eſt des nombres entiers, & par la même raiſon; car ſi $\frac{7}{8}$ doivent être multipliés par $\frac{2}{3}$, les nombres 7 & 8 doivent être multipliés reſpectivement par 2 & 3; mais ſi $\frac{2}{3}$ doivent être multipliés par $\frac{7}{8}$, alors les nombres 2 & 3 doivent être multipliés reſpectivement par 7 & 8, ce qui revient au même: d'où il ſuit que $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{8}$ ſont préciſément la même choſe que $\frac{7}{8}$ de $\frac{2}{3}$. En voici une autre preuve: nous avons déjà vu que $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{8}$ d'une livre ſt. ſont 11 ſchellings & 8 ſous; voyons à-préſent ce que ſont $\frac{7}{8}$ de $\frac{2}{3}$ d'une livre ſt.: $\frac{2}{3}$ d'une livre ſt. ſont 13 ſchellings & 4 ſous; & $\frac{7}{8}$ de 13 ſchellings & 4 ſous, ou $\frac{7}{8}$ de 93 ſchellings & 4 ſous, ſont 11 ſchellings & 8 ſous; ainſi $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{8}$ d'une livre ſt. ſont la même choſe, que $\frac{7}{8}$ de $\frac{2}{3}$ d'une livre ſt., puiſque chacune de ces quantités en particulier eſt égale à 11 ſchellings & 8 ſous.

2°. $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{9}{10}$ ſont $\frac{90}{180}$, ou $\frac{1}{2}$: car $2 \times 5 \times 9$ ſont 90, & $3 \times 6 \times 10$, ſont

ſont 180: ainſi $\frac{2}{15}$ d'une livre ſt. ſont 18 ſchellings; & $\frac{5}{6}$ de 18 ſchellings ſont 15 ſchellings; & $\frac{2}{3}$ de 15 ſchellings ſont 10 ſchellings, qui ſont $\frac{1}{2}$ d'une livre ſt.

3°. $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ ſont $\frac{17}{64}$: ainſi $\frac{3}{4}$ d'une livre ſt. ſont 15 ſchellings; & $\frac{2}{3}$ de 15 ſchellings ſont 11 ſchellings & 3 ſous; & $\frac{3}{4}$ de 11 ſchellings & 3 ſous ſont 8 ſchellings, 5 ſous & un liard; qu'on trouvera auſſi être $\frac{17}{64}$ d'une livre ſt.

4°. Le nombre mixte $6\frac{1}{4}$ multiplié par le nombre entier 7, ou le nombre entier 7 multiplié par le nombre mixte $6\frac{1}{4}$, donnera dans l'un & l'autre cas $47\frac{1}{4}$; car le nombre mixte $6\frac{1}{4}$ réduit (ſuivant l'Art. 3.) en une Fraction improprement dite, devient $\frac{25}{4}$; qui multipliés par 7, ou $\frac{7}{1}$ ſont $\frac{189}{4}$, leſquels réduits à un nombre mixte ſont égaux à $47\frac{1}{4}$.

Cette multiplication peut ſe faire encore de la maniére ſuivante: $\frac{1}{4}$ multipliés par 7 ſont $\frac{7}{4}$, c'eſt-à-dire, (par l'Art. 2.) $5\frac{3}{4}$; écrivez la Fraction $\frac{3}{4}$ & retenez 5; multipliez 6 par 7, & vous aurez 42, qui avec le nombre 5 retenu, ſont 47; donc le produit eſt $47\frac{1}{4}$, comme ci-devant.

5°. $3\frac{1}{3}$ multipliés par $2\frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire, $\frac{10}{3}$ multipliés par $\frac{7}{3}$, ſont $\frac{120}{12}$, c'eſt-à-dire, 10: ainſi $3\frac{1}{3}$ d'une livre ſt. ſont 3 livres ſt. & 15 ſchellings, & deux fois 3 livres ſt. & 15 ſchellings, ſont 7 livres ſt. & 10 ſchellings; de plus $\frac{1}{3}$ de 3 livres ſt. & 15 ſchellings, ou $\frac{1}{3}$ de 7 livres ſt. & 10 ſchellings, ſont 2 livres ſt. & 10 ſchellings; or ces 2 livres ſt. & 10 ſchellings, ajoûtés à la premiére partie du produit, qui eſt 7 livres ſt. & 10 ſchellings, ſont 10 livres ſt. pour le produit entier; donc $3\frac{1}{3}$ de livre ſt. multipliés par $2\frac{1}{3}$ ſont 10 livres.

6°. $96\frac{1}{2}$ multipliés par $24\frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire, $\frac{193}{2}$ par $\frac{73}{3}$ ſont $\frac{14059}{6}$, ce qui eſt, (par l'Art. 2.) $2348\frac{1}{6}$.

7°. Le nombre $36\frac{1}{4}$ multiplié par lui-même, c'eſt-à-dire, $\frac{145}{4}$ par $\frac{145}{4}$ fait $\frac{21025}{16}$, c'eſt-à-dire, $1314\frac{1}{16}$.

Avant de finir cet Article, je ne ſai ſi on trouvera que je n'ai pas tort de m'arrêter à une queſtion fort abſurde, qu'on n'a agitée que trop ſouvent, ſavoir de multiplier $\frac{1}{3}$ de livre par $\frac{1}{2}$ de livre: je l'appelle une queſtion abſurde, parce qu'elle renferme une expreſſion qui n'a aucun ſens; car dans l'idée ou définition de la Multiplication, le Multiplicateur au moins eſt ſuppoſé un nombre abſtrait, ou une Fraction abſtraite, autrement quel ſens auroient ces mots, de prendre le Multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le Multiplicateur? Si multiplier $\frac{1}{3}$ de livre par $\frac{1}{2}$ de livre, ne ſignifie autre choſe que multiplier $\frac{1}{3}$ de livre par

$\frac{1}{2}$,

$\frac{3}{4}$, pourquoi ajoûter le mot de livre au Multiplicateur? & ſi cela ſignifie quelque choſe de plus, pourquoi ceux qui propoſent la queſtion ne l'expliquent-ils pas? Qu'ils me diſent ce qu'ils entendent par 1 livre multipliée par 1 livre, & j'aurai bientôt répondu à leur queſtion ; mais s'ils ne veulent ou ne peuvent l'expliquer, la queſtion ne mérite pas de réponſe & n'en eſt pas ſuſceptible. Je n'ignore pas une autre queſtion plus ſouvent agitée encore, & qui n'auroit pas plus de ſens, ſi l'uſage ne l'expliquoit, c'eſt de multiplier 3 aunes par 2 aunes; par où l'on n'entend autre choſe, que déterminer le nombre d'aunes quarrées, contenues dans un quarré long de 3 aunes & large de 2 aunes ; & cette explication ſuffit pour lever la difficulté.

LEMME.

12. *Soit* n *un nombre quelconque entier, mixte ou Fraction; je dis que le quotient de* n *diviſé par quelque Fraction que ce ſoit, eſt égal au produit de* n *multiplié par l'inverſe de cette Fraction*: c'eſt-à-dire, par une nouvelle Fraction, qui ait pour Numérateur le Dénominateur de l'autre, & réciproquement; par exemple

Soit n diviſé par $\frac{2}{3}$; je dis que le quotient de n diviſé par $\frac{2}{3}$ ſera égal au produit de n multiplié par $\frac{3}{2}$: pour le prouver, ſoit q le quotient de n diviſé par $\frac{2}{3}$; c'eſt-à-dire, ſoit q le nombre qui exprime combien de fois la Fraction $\frac{2}{3}$ eſt contenue dans n; en ce cas $\frac{2}{3}$ multipliés par q ſont égaux à n, par la nature de la multiplication; mais le produit de $\frac{2}{3}$ multipliés par q eſt le même que le produit de q multiplié par $\frac{2}{3}$; c'eſt-à-dire $\frac{2}{3}$ de q, par l'Art. précédent ; donc n eſt égal à $\frac{2}{3}$ de q; donc $\frac{1}{3}$ de n eſt égal à $\frac{1}{3}$ de q; donc $\frac{3}{3}$ de n ſont égaux à q; mais $\frac{3}{3}$ de n ſont le produit de n multiplié par $\frac{3}{2}$; donc le produit de n multiplié par $\frac{3}{2}$ eſt égal à q; mais le quotient de n diviſé par $\frac{2}{3}$ eſt q, par la ſuppoſition; donc le quotient de n diviſé par $\frac{2}{3}$, eſt égal au produit de n multiplié par $\frac{3}{2}$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

Ainſi la règle de la Diviſion peut en toute occaſion être changée en celle de la Multiplication, ſeulement en changeant les termes du Diviſeur, & alors en multipliant, au-lieu de diviſer. La même choſe a lieu dans les nombres entiers, ſi on les conſidère comme des Fractions dont le Dénominateur eſt l'Unité : ainſi diviſer n par 2, c'eſt-à-dire par $\frac{2}{1}$, aura le même effet que de le multiplier par $\frac{1}{2}$, comme il a été dit dans l'Article précédent.

De la Diviſion des Fractions.

13. La Diviſion des Fractions, comme toute autre Diviſion, conſiſte à trouver combien une Fraction, appellée le Diviſeur, eſt contenue dans une autre, nommée le Dividende; & ce qui exprime ce rapport, eſt dit le quotient, ſoit qu'il ſe trouve être un nombre entier, ou un nombre mixte, ou une Fraction proprement dite: car dans la diviſion des Fractions, le quotient doit toujours être exact ſans aucun reſte, & par conſéquent être quelquefois un nombre entier, quelquefois un nombre mixte, & quelquefois une Fraction proprement dite. Ainſi, ſi le nombre 18 eſt diviſé par 6, le quotient eſt 3; parce que 18 contient 6, trois fois: mais ſi 21 ſont diviſés par 6, le quotient eſt $3\frac{1}{2}$; parce que 21 contiennent 6 trois fois & une demie fois de plus: enfin ſi 3 ſont diviſés par 6, le quotient ſera $\frac{1}{2}$; parce que le Diviſeur étant plus grand que le Dividende ne peut être une ſeule fois contenu dans celui-ci; donc le quotient dans ce cas, doit être une Fraction proprement dite: & c'eſt $\frac{1}{2}$, puiſque 3 ſont juſtement la moitié de 6.

Une Fraction peut être diviſée par un nombre entier de deux maniéres; ou en diviſant le Numérateur par ce nombre entier, ſi cela eſt poſſible, ou en multipliant le Dénominateur par ce même nombre: ainſi on peut prendre la moitié de $\frac{6}{7}$ (c'eſt-à-dire que $\frac{6}{7}$ ſont diviſibles par 2) ſoit en diviſant le Numérateur par 2, ce qui donnera pour quotient $\frac{3}{7}$; ſoit en doublant le Dénominateur: en ce cas le quotient ſera $\frac{6}{14}$: or ces deux Fractions ſont d'égale valeur, ſuivant les Art. 6 & 7.

Si le Diviſeur eſt une Fraction, on aura le quotient en multipliant le Dividende par l'inverſe du Diviſeur, ſuivant les règles de Multiplication ci-devant expliquées: ainſi s'il falloit diviſer $\frac{3}{7}$ par $\frac{1}{2}$, le quotient ſeroit le même que le produit de $\frac{3}{7}$ multipliés par $\frac{2}{1}$, c'eſt-à-dire $\frac{6}{7}$, ou $1\frac{1}{7}$; cela vient d'être démontré dans l'Art. précédent.

Nous pouvons obſerver ici, de même que dans l'Art. 11. que ſi le Diviſeur ou le Dividende, ou l'un & l'autre, ſont des nombres mixtes, il faut les réduire en Fractions improprement dites, afin de pouvoir leur appliquer la règle générale; & ſi l'un d'eux ou tous les deux ſont des nombres entiers, il faut les conſidérer comme des Fractions, dont le Dénominateur eſt l'Unité.

Nous inférons de la règle générale donnée ci-deſſus concernant la Diviſion, que chaque Fraction peut être conſidérée comme le quotient du Numérateur diviſé par le Dénominateur, & cela, ſoit que les termes de la Fraction ſoient des nombres entiers, ou (ce qui arrive quelquefois) des

des nombres mixtes, ou même de pures Fractions : il ſuffira de démontrer ce dernier cas, dans lequel les deux autres ſont compris, les nombres mixtes étant réductibles à des Fractions, & les nombres entiers pouvant être conſidérés comme des Fractions, dont les Dénominateurs ſont autant d'unités. Que la Fraction propoſée ſoit $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}}$; je dis, que cette Fraction eſt égale au quotient qui réſulte de la diviſion du Numérateur $\frac{4}{7}$ par le Dénominateur $\frac{2}{3}$: pour s'en convaincre, on n'a qu'à multiplier tant le Numérateur $\frac{4}{7}$, que le Dénominateur $\frac{2}{3}$, par $\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, par 3, Dénominateur de la Fraction $\frac{2}{3}$, diviſé par 2, Numérateur de cette même Fraction, & la Fraction ſe trouvera changée en celle-ci, $\frac{12}{14}$ ou $\frac{12}{14}$, qui ſera de même valeur que la premiére par l'Art. 6. Mais le quotient de la Fraction $\frac{4}{7}$ diviſée par $\frac{2}{3}$ eſt auſſi $\frac{12}{14}$ comme ci-deſſus; donc la Fraction $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}}$ eſt égale au quotient qui réſulte de la diviſion du Numérateur par le Dénominateur: & le même raiſonnement eſt applicable à tout autre cas. Cette conſidération eſt d'un très-grand uſage en Algébre, où les quantités ſont ſouvent exprimées d'une façon ſi générale, qu'il n'y a aucun autre moyen de repréſenter le quotient, que par une Fraction dont le Numérateur eſt le Dividende & le Dénominateur le Diviſeur. Ce que nous venons de dire contient donc une règle pour réduire une Fraction compliquée à une autre plus ſimple, dont le Numérateur & le Dénominateur feront des nombres entiers: c'eſt ainſi, comme nous l'avons vu, que la Fraction $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}}$ eſt la même choſe que $\frac{12}{14}$.

Autres exemples de Diviſions de Fractions.

1°. $\frac{3}{4}$ diviſés par $\frac{1}{4}$, ou, ce qui revient au même, $\frac{3}{4}$ multipliés par $\frac{4}{1}$, font $\frac{12}{4}$, ou $1\frac{8}{4}$; ce qui fait voir que $\frac{3}{4}$ ſont contenus une fois & $\frac{8}{4}$ de plus dans $\frac{3}{4}$: pour rendre la choſe plus ſenſible, je dis que $\frac{1}{4}$ d'une livre ſt. ſont 16 ſchellings & 8 ſous; & que $\frac{3}{4}$ d'une livre ſt. ſont 15 ſchellings; or 15 ſchellings ſont contenus dans 16 ſchellings & 8 ſous, une fois, & il reſte 1 ſchelling & 8 ſous, & 1 ſchelling & 8 ſous font tout juſte $\frac{1}{8}$ de 15 ſchellings. Pour qu'on ne s'y trompe pas, il eſt bon d'avertir qu'il ne faut renverſer que les termes du Diviſeur, & non pas ceux du Dividende; ainſi diviſer $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{4}$ eſt la même choſe que multiplier $\frac{1}{2}$ par $\frac{4}{1}$, & nullement multiplier $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{4}$.

2°. $\frac{17}{18}$ diviſés par $\frac{1}{3}$, ou multipliés par $\frac{3}{1}$, donnent $\frac{51}{18}$, ou $2\frac{7}{18}$, ce qu'on peut vérifier, comme ci-deſſus; car $\frac{17}{18}$ d'une livre ſt. ſont 18 ſchellings; & $\frac{1}{3}$ d'une livre ſt. eſt 6 ſchellings & 8 ſous: or 6 ſchellings & 8 ſous ſont con-

contenus deux fois dans 18 ſchellings, & il reſte 4 ſchellings, & 8 ſous, leſquels 4 ſchellings & 8 ſous ſe trouvent (par l'Art. 5.) être juſtement $\frac{2}{3}$ de 6 ſchellings & 8 ſous.

3°. Le nombre entier 10 diviſé par $2\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire le nombre $\frac{10}{1}$ diviſé par $\frac{5}{2}$, ou multiplié par $\frac{2}{5}$, donne $\frac{20}{5}$, ou $3\frac{1}{5}$.

4°. $2\frac{3}{4}$ diviſés par $\frac{10}{1}$, ou $\frac{8}{3}$ diviſés par $\frac{17}{1}$, ou multipliés par $\frac{1}{17}$ donnent $\frac{8}{51}$, ou $\frac{4}{17}$.

5°. $16\frac{1}{2}$ diviſés par $1\frac{1}{6}$, c'eſt-à-dire, $\frac{33}{2}$ diviſés par $\frac{7}{6}$, ou multipliés par $\frac{6}{7}$ donnent $\frac{294}{21}$, ou 14.

Remarques ſur la Multiplication & ſur la Diviſion des Fractions.

14. Lorſque deux Fractions ſont multipliées l'une par l'autre, ou que l'une eſt diviſée par l'autre, il arrive ſouvent que quoique les Fractions originales ſoient toutes deux réduites aux termes les plus ſimples, cependant le produit ou le quotient, qui en réſulte, aura beſoin de réduction. Par exemple, les Fractions $\frac{1}{2}$ & $\frac{5}{10}$ ſont réduites aux termes les plus ſimples; cependant étant multipliées l'une par l'autre, leur produit $\frac{5}{20}$ peut être réduit à $\frac{1}{4}$: de même dans la Diviſion $\frac{5}{6}$ & $\frac{12}{24}$ ſont des Fractions réduites aux termes les plus ſimples; cependant, ſi la derniére eſt diviſée par la premiére, le quotient $\frac{150}{144}$ peut ſe réduire à $\frac{25}{24}$. Il ne ſera pas hors de propos de rechercher la raiſon de ceci, & de voir ſi les Fractions originales ne peuvent pas être préparées avant l'opération, de maniére que leur produit, ou leur quotient ſoit toujours réduit à ſa plus grande ſimplicité. D'abord, pour ce qui regarde la multiplication de $\frac{1}{2}$ par $\frac{5}{10}$, il eſt clair que le produit de $\frac{1}{2}$ par $\frac{5}{10}$, eſt juſtement la même choſe que celui de $\frac{1}{10}$ par $\frac{5}{2}$, en faiſant un échange des Dénominateurs des Fractions; c'eſt ce qui paroît par l'opération même; car les mêmes nombres ſont multipliés l'un par l'autre dans les deux cas; mais ces deux derniéres Fractions ne ſont point du tout réduites à leur plus grande ſimplicité; la premiére $\frac{1}{10}$, peut ſe réduire à $\frac{1}{2}$, & la ſeconde $\frac{5}{2}$ à $\frac{1}{2}$: mais après qu'elles ont été réduites à ces deux derniéres $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{2}$, leur produit $\frac{1}{4}$ eſt juſtement de la même valeur que celui des deux Fractions originales, & eſt en même tems exprimé de la maniére la plus ſimple. Ainſi on voit que pour avoir le produit réduit à la derniére ſimplicité, il faut non ſeulement réduire les Fractions originales autant qu'il eſt poſſible; mais de plus faire échange de leurs Dénominateurs, réduire encore ces nouvelles Fractions, & enfin multiplier l'une par l'autre ces derniéres Fractions.

La même pratique peut ſervir pour la Diviſion, après qu'on l'a réduite

duite à la règle de la Multiplication. Par exemple, le quotient de $\frac{11}{12}$ diviſés par $\frac{5}{16}$, eſt le même que le produit de $\frac{11}{12}$ multipliés par $\frac{16}{5}$; & ce dernier eſt le même que le produit de $\frac{11}{3}$ par $\frac{16}{12}$, comme nous l'avons vu ci-deſſus; mais les Fractions $\frac{11}{3}$ & $\frac{16}{12}$ ne ſont pas reduites à leurs derniers termes; il faut les y réduire, & en faire $\frac{11}{3}$ & $\frac{4}{3}$, ſi l'on veut que leur produit $\frac{44}{3}$ ſoit auſſi ſimple qu'il eſt poſſible. Voilà donc les deux règles abrégées de Multiplication & de Diviſion, réduites à une ſeule méthode, au lieu de deux qu'on preſcrit ordinairement, & de plus à une méthode qui porte ſon évidence avec elle.

N. B. Ce que nous venons d'opérer par l'échange des Dénominateurs, & en laiſſant les Numérateurs à leurs places, pourroit auſſi bien ſe faire, en échangeant les Numérateurs & en laiſſant les Dénominateurs à leurs places; la même raiſon étant également valable dans les deux cas.

Règle de proportion en Fractions.

15. Comme cette règle eſt la même que celle qui a été donnée pour les nombres entiers, il ſuffira d'en indiquer ici quelques exemples.

Exemples de la règle de proportion en Fractions.

1°. *Si* $\frac{1}{4}$ *donne* $\frac{1}{7}$, *combien donnera* $\frac{1}{8}$? Ici $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{8}$ multipliés l'un par l'autre donnent $\frac{1}{56}$, qui diviſé par $\frac{1}{4}$ (ou multiplié par $\frac{4}{1}$) donne $\frac{4}{56}$ ou $\frac{1}{14}$; & la queſtion eſt réſolue.

2°. *Si* $2\frac{1}{2}$ *donnent* $3\frac{1}{4}$, *combien donneront* $4\frac{2}{3}$? Ces nombres mixtes réduits en Fractions improprement dites, (par l'Art. 3.) reviennent à ceci; *ſi* $\frac{5}{2}$ *donnent* $\frac{13}{4}$, *combien donneront* $\frac{14}{3}$? Ici $\frac{13}{4}$ multipliés par $\frac{14}{3}$ ſont $\frac{182}{12}$ ou 18, leſquels diviſés par $\frac{3}{2}$ donnent $6\frac{1}{2}$; & la queſtion eſt réſolue.

3°. *Si* $\frac{1}{3}$ *verge coute* $\frac{1}{3}$ *de livre, que coutera* $\frac{1}{4}$ *d'aune?* Une aune eſt $\frac{3}{4}$ de verge, & par conſéquent $\frac{1}{4}$ d'aune eſt $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{12}$ de verge; la queſtion peut donc être poſée ainſi: *ſi* $\frac{1}{3}$ *verge coute* $\frac{1}{3}$ *de livre, que couteront* $\frac{3}{12}$ *de verge?* Ici $\frac{1}{3}$ & $\frac{3}{12}$ multipliés l'un par l'autre donnent $\frac{3}{36}$, qui diviſés par $\frac{1}{3}$ donnent $\frac{3}{36}$ de livre, ou 4 ſchellings 2 ſous; & la queſtion eſt réſolue.

Méthode d'exprimer en nombres entiers la proportion qui ſe trouve entre des termes Fractionels.

Lorſqu'on propoſe deux Fractions, comme $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{7}$, dont on veut avoir la proportion en nombres entiers, il faut premiérement réduire les deux Fractions au même Dénominateur (ſuivant l'Art. 8.) c'eſt-à-dire dans l'exemple propoſé à $\frac{14}{21}$ & $\frac{11}{21}$; alors vous aurez $\frac{2}{3}$ ſont à $\frac{3}{7}$ comme $\frac{14}{21}$ à $\frac{11}{21}$; mais $\frac{14}{21}$ ſont à $\frac{11}{21}$ comme 10 à 12, ou comme 5 à 6: donc $\frac{2}{3}$ ſont à $\frac{3}{7}$ comme 5 eſt à 6.

On

On peut obſerver que, quoique pour mieux faire comprendre la raiſon de cette règle, il ſoit neceſſaire de trouver un Dénominateur commun, cependant cela n'eſt nullement néceſſaire dans la pratique; car à quoi bon chercher ce Dénominateur pour le négliger dès qu'on l'a trouvé? Dans la pratique donc, multipliez le Numérateur de la Fraction qui eſt la premiére dans la proportion, par le Dénominateur de la ſeconde, & le Numérateur de la ſeconde par le Dénominateur de la premiére, & les deux nombres trouvés donneront reſpectivement en nombres entiers la proportion de la premiére Fraction à la ſeconde, comme il eſt évident par l'exemple propoſé.

De l'extraction des racines en Fractions.

16. Comme une Fraction eſt quarrée, ou multipliée par elle-même, en quarrant ſon Numérateur & ſon Dénominateur (Voyez l'Art. 11.) par la raiſon du contraire la racine quarrée d'une Fraction ſe trouve en tirant la racine quarrée du Numérateur & celle du Dénominateur: ainſi le quarré de $\frac{1}{4}$ eſt $\frac{1}{16}$, & la racine quarrée de $\frac{9}{16}$ eſt $\frac{3}{4}$. Mais il faut obſerver que toutes les fois que l'on cherche la racine quarrée d'une Fraction, il faut réduire cette Fraction aux termes les plus ſimples, par le 7ême. Art. ſans quoi la Fraction pourroit admettre une racine quarrée, qui cependant ſeroit impoſſible à trouver: par exemple, s'il falloit extraire la racine quarrée de la Fraction $\frac{18}{32}$, il n'y auroit moyen d'exprimer ni la racine quarrée du Numérateur, ni celle du Dénominateur; & cependant dès que la Fraction ſe trouvera réduite à ſes plus ſimples termes $\frac{9}{16}$, on verra que ſa racine quarrée eſt $\frac{3}{4}$.

Quand la racine quarrée d'un nombre ne ſauroit être exprimée exactement, on a recours à la méthode d'approximation à l'aide des Fractions décimales, ou autrement, & par ce moyen on approche de la vraye racine d'auſſi près qu'on veut. Or dans le cas d'une Fraction, s'il n'eſt pas poſſible d'exprimer exactement la racine quarrée du Numérateur, non plus que celle du Dénominateur, il n'eſt pas néceſſaire d'employer deux approximations, à cauſe qu'une Fraction peut aiſément être réduite à une autre de même valeur, dont le Dénominateur ſera un quarré connu. Suppoſons, par exemple, qu'il faille trouver la racine quarrée de $46\frac{1}{5}$ ou $\frac{231}{5}$: je multiplie tant le Numérateur que le Dénominateur de cette Fraction par 5, & la change ainſi en $\frac{1155}{25}$: Ici le Dénominateur 25 eſt un quarré connu, qui a pour racine quarrée 5, & la racine quarrée de 1155 eſt à peu près 34; ainſi la racine quarrée de la Fraction propoſée eſt à peu près

près $\frac{1}{7}$, ou $6\frac{1}{7}$. Mais après tout, la meilleure méthode d'extraire la racine quarrée d'une Fraction ordinaire, conſiſte à changer cette Fraction en Fraction décimale, comme nous le verrons dans la ſuite.

N. B. Tout ce qui vient d'être dit de l'extraction de la racine quarrée en Fractions, peut aiſément s'appliquer, *mutatis mutandis*, à l'extraction de la racine cubique, *&c.*

Des Fractions décimales.

Et premiérement de la maniére de les marquer.

17. Une Fraction décimale eſt une Fraction dont le Dénominateur eſt 10, ou 100, ou 1000, ou 10000, *&c.* & ce Dénominateur n'eſt jamais exprimé, mais toujours ſouſentendu par l'endroit qu'occupe le chifre auquel il appartient; car comme tous les chifres à la gauche de la place des unités, croiſſent en valeur, ſuivant leurs diſtances de cette place, en raiſon décuple; de même tous les chifres à la droite des unités, baiſſent de valeur en raiſon ſousdécuple: comme, par exemple, le nombre 345, 6789, ou 5 occupe la place des unités, doit ſe lire ainſi: *trois cens quarante-cinq, ſix dixiémes, ſept centiémes parties, huit milliémes parties, neuf dix milliémes parties:* ou les parties décimales peuvent ſe lire ainſi; *ſix mille ſept cens quatre-vingts neuf dix milliémes parties;* le Dénominateur étant dix mille, à cauſe que le dernier chifre 9, ſuivant la premiére façon de compter, occupe la place des dix milliémes parties: la ſeconde façon de lire eſt fondée ſur un principe aſſez manifeſte par lui-même; car $\frac{6}{10}$ ſont $\frac{6000}{10000}$, & $\frac{7}{100}$ ſont $\frac{700}{10000}$, & $\frac{8}{1000}$ ſont $\frac{80}{10000}$, & $\frac{6000}{10000}$, $\frac{700}{10000}$, $\frac{80}{10000}$, & $\frac{9}{10000}$, ajoûtés enſemble, font $\frac{6789}{10000}$.

On fait uſage de zéros dans l'expreſſion des Fractions décimales auſſi-bien que de nombres entiers, & par la même raiſon. Ainſi le nombre 067 peut également ſe lire, *point de dixiémes, ſix centiémes parties, ſept milliémes parties*; ou *ſoixante-ſept milliémes parties.* Mais les zéros à la droite d'un nombre décimal (s'ils ne ſont ſuivis de rien) ont auſſi peu de valeur que des zéros à la gauche d'un nombre entier; & cependant on met quelquefois des zéros après une Fraction décimale, pour la régularité, ou quand on a beſoin d'augmenter le nombre des caractéres qui expriment la Fraction décimale.

Ce que nous venons de dire ſuffit pour faire ſentir combien il eſt facile de multiplier ou de diviſer un nombre quelconque par 10, 100, 1000, *&c.* puiſqu'il ne faut pour cela que tranſpoſer le point de ſéparation vers la gauche ou vers la droite. Ainſi le nombre 345 .6789 étant

multiplié par 10, devient 3456 .789; & étant multiplié par 100, devient 34567 .89: & le meme nombre 345 .6789 étant diviſé par 10, devient 34 .56789; & etant diviſé par 100, devient 3 .456789: que ſi l'on vouloit diviſer le nombre 345 par 10000, on auroit pour quotient .0345; car diviſer par 10000, eſt la même choſe que tranſporter le point de ſéparation quatre degrés vers la gauche, s'il ſe trouve quelque point de ſéparation dans le nombre donné; mais s'il n'y en a pas, comme dans le cas preſent, il faut mettre un point de ſéparation quatre degrés vers la gauche, ce qui ne ſauroit ſe faire dans cet exemple, à moins qu'on ne mette un zéro dans la premiére place décimale.

De l'Addition & de la Souſtraction des Fractions décimales.

18. Le principal avantage que l'Arithmétique décimale a par deſſus celle des Fractions ordinaires, conſiſte en ceci, que dans les Fractions décimales toutes les opérations ſe font préciſément comme ſi ces Fractions étoient des nombres entiers.

Pour ce qui regarde l'Addition & la Souſtraction, la choſe eſt manifeſte, pourvu qu'on ait ſoin de plaçer chaque partie décimale au-deſſous de quelque autre partie de même eſpéce: comme par exemple .567 s'additionnent à .89 ainſi;

$\begin{matrix}.89\\.567\\1.457\end{matrix}$: la ſouſtraction s'en fait ainſi; $\begin{matrix}.89\\.567\\.323\end{matrix}$ ou ainſi; $\begin{matrix}.890\\.567\\.323.\end{matrix}$

De la Multiplication des Fractions décimales.

19. Dans la multiplication des Fractions décimales, on s'y prend préciſément comme dans celle des nombres entiers; & ce n'eſt qu'après que l'on a le produit que l'on conſidére les décimales comme telles; mais alors on retranche à la droite du produit autant de caractéres qu'il s'en trouve dans le Multiplicateur & dans le Multiplicande enſemble: comme par exemple; on demande de multiplier 4 .56 par 2 .3: conſidérant ici l'un & l'autre de ces nombres comme des nombres entiers, je multiplie 256 par 23, & trouve que le produit eſt 10488; mais obſervant enſuite qu'il y a eu une partie décimale dans le Multiplicateur, & deux dans le Multiplicande, je retranche trois parties décimales à la droite du produit, & le vrai produit eſt 10 .488.

Pour qu'on comprenne mieux la raiſon de cette opération, on n'a qu'à réduire le Multiplicateur & le Multiplicande à de ſimples Fractions exprimées à la maniére ordinaire, & l'on aura 2 .3 égaux à $\frac{23}{10}$, & 4 .56 égaux à $\frac{456}{100}$. Ces deux Fractions multipliées l'une par l'autre ſont

ſont $\frac{10488}{1000}$: en diviſant ce produit par mille, ce qui ſe fait en retranchant les trois derniers caractéres, ſuivant l'Art. 17, le quotient ſera 10 .488. Voici encore un autre exemple. On demande de multiplier 45600 par .23: le produit de 45600 multipliés par 23 eſt 1048800: mais comme il y a eu deux parties décimales dans le Multiplicateur donné, & aucune dans le Multiplicande, je retranche deux parties décimales du dernier produit, & le vrai produit ſe trouve être 10488 .00, ou 10488. Enfin, s'il falloit multiplier .000456 par .23, je négligerois les zéros qui ſont à la téte du Multiplicande, & multiplierois ſimplement 456 par 23, ce qui me donneroit 10488: je me rappellerois enſuite, qu'il y a eu deux parties décimales dans le Multiplicateur, & ſix dans le Multiplicande, & que par conſéquent il faut retrancher huit parties décimales du dernier produit: mais ce produit ne contient que 5 caractéres: c'eſt pourquoi je place trois zéros à la gauche, avec le point de ſéparation au devant d'eux, & ai pour vrai produit .00010488.

Oughtred & pluſieurs autres ont donné divers abrégés de cette ſorte de Multiplication, mais qui ſont tels, que tout homme qui veut s'exercer tant ſoit peu dans cette partie de l'Arithmétique, les découvrira ſans peine.

De la Diviſion des Fractions décimales.

20. La diviſion en Fractions décimales ſe fait, premiérement en les conſidérant comme des nombres entiers, & en opérant ſur elles comme étant de pareils nombres; & puis en retranchant, apres l'opération faite, à la droite du quotient, autant de parties décimales, que le dividende en a plus que le diviſeur; c'eſt ce qui paroît manifeſtement par l'Art. 19: car puiſque le diviſeur & le quotient, multipliés l'un par l'autre, forment le dividende, le diviſeur & le quotient doivent avoir entre eux autant de parties décimales qu'il s'en trouve dans le dividende: donc le quotient ſeul doit en avoir autant que le dividende en a plus que le diviſeur.

Exemple 1er. On demande de diviſer 10 .488 par 2 .3: ſi je diviſe 10488 par 23, j'aurai pour quotient 456; mais comme il y a trois parties décimales dans le dividende, & une dans le diviſeur, je retranche deux parties à la droite du quotient, ce qui me donne pour vrai quotient 4 .56.

Exemple 2d. Soit à diviſer le nombre 5678 .9 par .06: comme il y a ici deux parties décimales dans le diviſeur, & ſeulement une dans le dividende, je remplis la place vuide en mettant un zéro après le dividende, ainſi, 5678 .90; diviſant enſuite le nombre entier 567890, par le nombre

bre entier 6, (car le nombre 6 étant conſidéré comme un nombre entier on peut ne faire aucune attention au zéro qui le précéde;) je trouve pour quotient 94648, dont aucune partie ne doit être retranchée, à cauſe que le dividende a eu, par le moyen du zéro ajoûté, autant de parties décimales que le diviſeur; mais comme ce quotient n'eſt pas exact, ſi je voulois porter la préciſion plus loin, & avoir, par exemple, dans le quotient deux parties décimales, au lieu d'un zéro après le dividende, j'en mettrois trois après le diviſeur, ce qui me donneroit pour quotient 94648.33, & ce quotient eſt bien plus exact que l'autre, comme étant entre 94648.33 & 94648.34: mais il faut obſerver de plus au ſujet de ce quotient, que ſi la diviſion devoit être continuée à l'infini, tous les caractéres des parties décimales ſeroient des 3: c'eſt ce qui paroît manifeſtement par les deux derniers caractéres, qui ne ſauroient être l'un & l'autre des 3 ſans que les ſuivans ne le ſoient pareillement.

Pour réduire une Fraction ordinaire à une Fraction décimale.

21. Comme toute Fraction n'eſt autre choſe que le quotient du Numérateur diviſé par le Dénominateur, (Voyez Art. 13,) rien n'eſt plus facile que de changer une Fraction ordinaire en Fraction décimale: pour cet effet, mettez autant de zéros après le Numérateur qu'il en faut pour égaler le nombre des parties décimales que vous voulez faire entrer dans votre nouvelle Fraction, & conſidérez ces zéros comme des parties décimales; après quoi diviſant le Numérateur par le Dénominateur, le quotient ſera un nombre décimal égal à la Fraction premiérement propoſée, ou peut-être un nombre mixte, ſi la Fraction même étoit une Fraction improprement dite.

Exemple 1er. Que la Fraction $\frac{3}{49}$ doive être changée en Fraction décimale, & que le nombre des parties décimales de cette Fraction ſoit 4. Je commence par mettre quatre zéros après le Numérateur 3, & diviſe enſuite 30000 par 49, ce qui me donne pour quotient 612: mais conſidérant alors, qu'il y a eu quatre parties décimales dans le dividende, & aucune dans le diviſeur, & par conſéquent que quatre parties décimales doivent être retranchées du quotient, qui n'en a que trois, je pourvois à cet inconvénient en mettant un zéro à la gauche, & trouve pour quotient .0612.

Exemple 2d. Qu'il s'agiſſe de changer cette Fraction $\frac{7}{16}$ en Fraction décimale de même valeur, & qui ait, s'il eſt poſſible, ſix parties décimales: ici diviſant 7.000000 par 16, je trouve que le vrai quotient eſt .4375, & que les deux derniers caractéres du dividende ſont inutiles.

N. B. Quand cette diviſion eſt continuée à l'infini, il ſera impoſſible d'ex-

d'exprimer le nombre cherché exactement par un nombre fini de termes; mais à meſure que le nombre de ces termes ira en augmentant, on pourra approcher du vrai quotient juſqu'à une différence plus petite qu'aucune qu'on voudra aſſigner.

Pour réduire les parties décimales d'un nombre entier à telles autres parties, dans leſquelles ce nombre eſt ordinairement diviſé.

22. Pour expliquer cette règle, & en donner un exemple en même tems; qu'il y ait .345 d'une livre ſt. c'eſt-à-dire, trois cens quarante-cinq mille parties d'une livre ſt. qu'il faille réduire en ſchellings, ſous & liards: j'obſerve d'abord, que comme un nombre quelconque de livres ſt. multiplié par 20, donne autant de ſchellings qu'il en faut pour égaler en valeur les livres ſt. de même un nombre quelconque de parties décimales d'une livre ſt. multiplié par 20, donnera autant de ſchellings & de parties décimales d'un ſchelling, qu'il en faut pour égaler en valeur les parties décimales d'une livre ſt. & de même rélativement aux ſous & aux liards: multipliant donc .345 par 20, le produit eſt 6 & .900, ou 6 .9, ce qui ſignifie, que .345 d'une livre ſt. valent ſix ſchellings & neuf dixiémes d'un ſchelling, ce qui s'écrit ordinairement ainſi; 6 .9 ſchellings: enſuite, multipliant cette derniére partie décimale .9 par 12 pour les ſous, je trouve que .9 d'un ſchelling valent 10 .8 de ſou: enfin, multipliant .8 par 4 pour les liards, je trouve que .8 d'un ſou ſont égaux à 3 .2 de liard; pour ce qui eſt des .2 d'un liard, je les néglige, ne me ſouciant pas de porter plus loin une préciſion inutile; & trouve ainſi que .345 d'une livre ſt. montent à ſix ſchellings, dix ſous & trois liards.

Pour réduire les différentes parties d'un entier en parties décimales équivalentes.

23. Cette réduction étant l'inverſe de la précédente, devroit naturellement être faite par la diviſion, comme l'autre l'a été par la multiplication; mais tout bien examiné, je ne ſais pas ſi la méthode ſuivante ne ſera point auſſi facile à comprendre & à pratiquer qu'aucune autre que ce ſoit. On demande, par exemple, de réduire 2 heures, 34 minutes, 56 ſecondes, en parties décimales équivalentes d'un jour. Or dans un jour il y a 86400 ſecondes; & dans 2 heures, 34 minutes, 56 ſecondes, il y a 9296 ſecondes; par conſéquent 2 heures, 34 minutes, 56 ſecondes, ſont équivalentes à $\frac{9296}{86400}$ d'un jour: réduiſez cette Fraction ordinaire, par le pénultiéme Article, à une Fraction décimale équivalente, & vous aurez .10759; d'où il ſuit que 2 heures, 34 minutes, &

& 56 ſecondes, ſont équivalentes à un point avant le nombre. 10759 parties d'un jour. Mais il reſte encore un point à ajuſter, ſavoir, la quantité de parties décimales à laquelle la Fraction précédente doit être réduite, afin d'exprimer avec une préciſion ſuffiſante les parties d'un jour à une ſeconde près. Pour réſoudre cette queſtion, je conſidére qu'une ſeconde eſt $\frac{1}{86400}$ d'un jour; ainſi je réduis $\frac{1}{86400}$ en Fraction décimale, au moins juſqu'à ce que je parvienne au premier caractére qui ſoit de quelque valeur, & que je trouve être .00001; d'où j'inſére, que pour exprimer les parties d'un jour à une ſeconde près par quelque Fraction décimale, cette Fraction ne doit pas être compoſée de moins de 5 caractéres, à cauſe qu'il y en a 5 dans la Fraction décimale .00001. Pour ſe convaincre que la Fraction décimale marquée ci-deſſus, ſavoir, .10759 exprime le tems propoſé à une ſeconde près, il n'y a qu'à faire l'opération preſcrite dans le dernier Article, & l'on trouvera que ce tems eſt 2 heures, 34 minutes, 55.8 ſecondes.

Pour avoir un autre exemple, prenons le contraire de celui du dernier Article, & propoſons nous de réduire ſix ſchellings, dix ſous, 3.2 liards en parties décimales équivalentes d'une livre ſt. Une pareille livre contient 960 liards, ou 9600 dixiémes d'un liard; & 6 ſchellings, 10 ſous 3.2 liards, ſont équivalens à $\frac{3312}{9600}$ d'une livre; mais $\frac{1}{9600}$ étant réduit en Fraction décimale, eſt .0001 &c. où le premier caractére qui ait quelque valeur occupe la quatriéme place; c'eſt pourquoi je réduis la Fraction $\frac{3312}{9600}$ à quatre caractéres décimaux, qui ſont .3450, c'eſt-à-dire, à .345 d'une livre; deſorte que dans ce cas particulier, trois caractéres décimaux ſuffiſent pour exprimer exactement la ſomme propoſée.

De l'extraction de la racine quarrée en Fractions décimales.

24. Après avoir traité de la multiplication & de la diviſion des Fractions décimales, il ſeroit aſſez inutile de nous étendre ſur la régle de proportion, qui n'eſt, comme on l'a vu, qu'une maniére d'appliquer ces deux autres régles: ainſi nous paſſerons à l'Article de l'extraction de la racine quarrée, rélativement aux Fractions décimales. Il n'y a que très-peu de nombres quarrés, c'eſt-à-dire, dont la racine quarrée peut être tirée exactement, en comparaiſon des autres; & voilà pourquoi tout Arithméticien, quand on lui demande la racine quarrée de quelque nombre, doit commencer par déterminer la quantité de caractéres décimaux qu'il veut donner à la racine cherchée; après quoi annexant des caractéres décimaux, s'il le faut, à la droite du nombre propoſé,

il

il doit avoir ſoin qu'il y ait deux fois plus de ces caractéres qu'il n'a réſolu de donner de caractéres décimaux à la racine cherchée ; enſuite, il faut qu'il place un point au-deſſus de l'endroit des unités, & puis ſautant le caractére ſuivant, auſſi un point ſur le ſecond caractére, & ainſi de ſuite, tant vers la droite, que vers la gauche : par ce moyen le nombre ſera préparé, & la racine quarrée pourra ſe tirer comme d'un nombre entier, pourvu qu'on retranche de la racine, quand on l'aura, autant de caractéres décimaux qu'on avoit réſolu auparavant de lui en donner.

Exemple 1 e. On demande la racine de 2345 .6 avec une approximation de deux caractéres décimaux. Le nombre étant préparé, ſera 2345 .6000, ou, marqué à la maniére d'un nombre entier, 23456000 ; & ſa racine quarrée ſe trouvera être 4843 à peu près ; & par conſéquent 48 .43 ſera la racine cherchée. Pour s'en aſſurer on n'a qu'à multiplier cette racine par elle-même, & les quatre premiers caractéres du quarré ſeront 2345, qui ſont tous vrais ; & il n'y en a pas d'autre vrai à attendre, à cauſe qu'il n'y a que quatre vrais caractéres dans la racine, & qu'on a négligé le reſte ; mais ſi, pouſſant la préciſion plus loin, on vouloit que la racine eût cinq caractéres, c'eſt-à-dire, autant qu'en a le quarré dont il eſt queſtion de tirer la racine, on auroit 48 .431 ; ce nombre étant multiplié par lui-même, les cinq premiers caractéres du produit ſeront 2345 .6, c'eſt-à-dire le quarré même dont il s'agiſſoit d'extraire la racine quarrée.

Exemple 2d. On demande la racine de .0023456 en cinq caractéres décimaux. Après avoir mis un zéro dans la place des unités pour diriger la ponctuation, ainſi, 0 .00234560000 ; je tire la racine quarrée de 23456000 comme d'un nombre entier, & trouve qu'elle eſt 4843, comme auparavant : mais conſidérant que cette racine doit être abbaiſſée de cinq degrés, c'eſt-à-dire, ne doit conſiſter qu'en cinq caractéres décimaux, je mets un zéro à la gauche, & par ce moyen j'ai pour racine 04843.

On peut démontrer, tant *à priori*, qu'*à poſteriori*, que le quarré propoſé doit avoir un nombre de caractéres décimaux double de celui qu'a la racine : *à priori*, parce qu'en tirant la racine quarrée, le quarré perd deux caractéres pour un que la racine gagne ; & *à poſteriori*, parce que la racine multipliée par elle-même doit produire le quarré ; d'où il ſuit, par la nature de la multiplication, que le quarré doit avoir un nombre de caractéres décimaux double de celui qu'a la racine.

ELE-

ELEMENS D'ALGEBRE.

LIVRE I.

Définition de l'Algébre.

ART. I. JE n'ai pas deſſein de commencer cet Ouvrage par un long détail hiſtorique touchant l'origine & les progrès de l'Algébre, & je paſſerai même ſous ſilence l'étymologie de ce mot; ceux qui auront quelque curioſité à ces égards, pouvant conſulter le Dr. *Wallis* & quelques autres. D'ailleurs, il eſt d'autant moins néceſſaire d'entrer dans une diſcuſſion étymologique au ſujet du nom d'Algébre, que cet Art a en quelque ſorte changé de nature, & eſt fréquemment employé à des opérations Arithmétiques, qui ne répondent nullement à la ſignification de ſon nom. Je dirai donc ſimplement par voye de définition, que l'*Algébre*, dans le ſens moderne du mot, *eſt l'Art de calculer par ſymboles*, c'eſt-à-dire, généralement parlant, par lettres de l'Alphabet. Car de tous les caractéres qu'on peut employer, il n'y en a aucun auſſi commode que ces lettres, qui ſont faciles à diſtinguer les unes des autres, tant à la vue, qu'en les entendant prononcer.

On ſubſtitue des lettres non ſeulement à la plaçe des quantités qui ſont inconnues, & par cela même telles, qu'on ne ſauroit guéres les repréſenter autrement; mais auſſi à des quantités connues, afin d'empêcher qu'on ne confonde celles-ci avec les premiéres, & de former des concluſions générales. Comme par exemple; ſuppoſons qu'on me demande deux nombres; dont la ſomme eſt 48 & la différence 14: en ce cas, ſi je mets ſeulement x, ou quelque autre lettre, à la place d'une des quantités inconnues, & que je me ſerve des nombres 48 & 14 tels que je les trouve dans le problême, je n'arriverai qu'à cette concluſion particuliére, que le plus grand nombre eſt 31 & le plus petit 17: nombres qui répondent l'un & l'autre aux conditions du problême. Mais ſi au lieu des nombres connus 48 & 14, je ſubſtitue les quantités générales a & b reſpectivement, & que je propoſe le problême ainſi; *on demande deux nombres dont la ſomme eſt* a *& la différence* b: je parviendrai alors à cette concluſion générale, ſavoir, que *la moitié de la ſomme de* a & b *ſera le plus grand nombre, & la moitié de leur différence le plus petit*: théoréme

géné-

général, qui conviendra non ſeulement au cas mentionné ci-deſſus, mais auſſi à tous les autres cas poſſibles du problême en queſtion. J'aurai occaſion de marquer dans la ſuite de cet Ouvrage comment je parviens à ces deux concluſions, & indiquerai encore quelques autres avantages qui réſultent de cette méthode de ſubſtituer des lettres à des quantités connues.

Ce que je viens de dire ſur cet article, n'a d'autre but que d'aider à éclaircir la définition que j'ai donnée de l'Algébre, & de faire voir que des lettres y ſont employées, moins pour déſigner quelques quantités particuliéres comme telles, que pour marquer la rélation qu'elles ont entre elles dans quelque problême ou calcul. D'où l'on peut inférer, que les lettres repréſentent des quantités en Algébre, préciſément comme elles repréſentent des perſonnes dans le train ordinaire de la vie, quand il s'agit de conſidérer diſtinctement un certain nombre de perſonnes, rélativement à quelque contract, ou à quelque procès.

N. B. Une quantité unique eſt quelquefois déſignée par deux ou même par plus de deux lettres, quand on la conſidére comme le produit de la multiplication de ces lettres l'une par l'autre: c'eſt ainſi que ab eſt le produit de la multiplication de a & de b; & abc le produit de la multiplication de a par b, & de ab par c. Mais ceci ſera expliqué plus clairement, quand nous ſerons parvenus à l'article de la multiplication.

Des Quantités affirmatives & négatives en Algébre.

2. Il y a deux ſortes de quantités Algébraïques, les unes affirmatives, & les autres négatives Une quantité affirmative, eſt celle qui eſt plus grande que rien, & eſt reconnoiſſable à cette marque $+$; une quantité négative eſt moindre que rien, & eſt diſtinguée par la marque $-$: ainſi $+a$ ſignifie que la quantité a eſt affirmative, & doit ſe lire ainſi, plus a: $-b$ ſignifie que la quantité b eſt négative, & doit ſe lire, moins b.

La poſſibilité qu'une quantité ſoit plus petite que rien, paroît à bien des gens un grand paradoxe, pour ne pas dire une abſurdité ſans égale; & l'on ne ſauroit nier que la choſe ne fût ainſi, ſi nous ſuppoſions la poſſibilité qu'il y eût un corps, ou une ſubſtance moindre que rien. Mais on peut facilement concevoir des quantités, qui, après avoir été affirmatives, deviennent égales à rien, & enſuite négatives: c'eſt ainſi qu'on peut dire d'un homme, qu'il poſſéde 40000 livres, ou 20000, ou rien, ou bien qu'il a $-$ 20000, ou $-$ 40000; étant dans ces deux derniers cas, endetté de 20000 ou de 40000; on peut dire de même qu'un corps a 2 degrés de chaleur, ou un degré, ou aucun degré, ou $-$ un

degré, ou moins deux degrés: pareillement on peut dire, qu'un corps a deux degrés de viteſſe vers en bas, ou un degré, ou aucun degré, ou — un degré, ou — 2 degrés &c. Il eſt certain que toutes les quantités contraires ſont néceſſairement ſuſceptibles d'un état intermédiaire, qui tient également des deux extrêmes, & qu'on ne ſauroit mieux repréſenter que par un zéro ou 0; & ſi l'on peut dire que les degrés, comptés depuis l'un des deux côtés de cette limite commune ſont plus grands que rien, je ne vois point pourquoi l'on ne diroit pas auſſi bien que les degrés comptés depuis l'autre côté ſont plus petits que rien, au moins en comparaiſon des premiers. Ce qui embarraſſe le plus ſur cet article les eſprits bornés, eſt, que dans le ſtile ordinaire, la plupart des quantités perdent leurs noms quand elles ceſſent d'être affirmatives, & prennent de nouveaux noms en devenant négatives: c'eſt ainſi que nous appellons des biens négatifs, dettes; un gain négatif, perte; une chaleur négative, froid &c. & véritablement dans ce ſens, on doit avoir peine à concevoir comment une quantité peut être plus petite que rien, c'eſt-à-dire, comment une quantité déſignée par un nom comme étant quelque choſe de réel, peut, dans ce même tems, être conſidérée comme moindre que rien. Mais la queſtion eſt proprement, ſi, de deux quantités contraires déſignées par deux noms différens, une quantité ſous un nom ne peut pas être appellée plus petite que rien, étant comparée avec l'autre quantité, quoique cette derniére porte un nom différent; ſi l'on ne peut pas dire, que tel degré de froid eſt éloigné de tel degré de chaleur plus que n'en eſt éloignée la tiedeur, quantité intermédiaire entre la chaleur & le froid. Les difficultés qui naiſſent de ce que des quantités illimitées en elles-mêmes ſont déſignées par des noms dont la ſignification eſt bornée, doivent être imputées à ces noms, & non pas aux choſes, comme je l'ai remarqué dans une autre occaſion. Voyez l'Introduction Art. 11. En Algébre, où les quantités doivent être conſidérées d'une maniére abſtraite, ſans aucun égard aux degrés de grandeur, les noms des quantités s'étendent auſſi loin que les quantités mêmes; de ſorte que toutes les quantités qui différent ſeulement l'une de l'autre en degré, quelque oppoſées qu'elles puiſſent être l'une à l'autre, paſſent ſous le même nom; & les quantités, tant affirmatives que négatives, ſont uniquement diſtinguées par leurs ſignes, comme nous l'avons remarqué ci-deſſus, & point par leurs noms, une même lettre repréſentant la même quantité affirmée & niée. D'où il ſuit, qu'en Algébre les ſignes emportent avec eux la même diſtinction, que font les particules & les adjectifs dans le ſtile ordinaire, comme dans les mots d'habile & d'inhabile, d'heu-

d'heureux & de malheureux, de bonne ſanté & de mauvaiſe ſanté, &c.

Comme ces quantités affirmatives & négatives ſont contraires l'une à l'autre par leur nature, elles le ſont pareillement dans leurs effets: conſidération, qui ſeule ſuffit pour ôter toutes les difficultés concernant les ſignes que l'addition, la ſouſtraction, la multiplication & la diviſion donnent aux quantités: car le réſultat de ces différentes opérations ſur des quantités affirmatives étant connu, on peut connoître celui des mêmes opérations ſur des quantités négatives par la règle des contraires.

Avant d'aller plus loin, il ſera bon d'avertir, que toute quantité qui n'eſt précédée d'aucun ſigne, doit toujours être conſidérée comme affirmative, & que ſi elle n'a devant elle aucun coëfficient numérique, l'unité doit toujours être ſouſentendue: ainſi $2a$ ſignifie $+2a$, & a ſignifie $1a$ ou $+1a$.

Par le coëfficient numérique d'une quantité, j'entends le nombre entier ou rompu par lequel cette quantité eſt multipliée: ainſi $2a$ ſignifie deux fois a, ou la quantité a priſe deux fois, & le coëfficient eſt 2; $\frac{3}{4}a$, ou $\frac{3a}{4}$, ſignifie $\frac{1}{4}$ de la quantité a, & le coëfficient eſt $\frac{3}{4}$.

N. B. Le ſigne d'une quantité négative n'eſt jamais ômis, non plus que celui d'une quantité affirmative, à moins qu'on ne conſidére celle-ci en elle-même, ou qu'il n'arrive qu'elle ſoit la premiére dans une ſérie de quantités qui ſe ſuivent l'une l'autre. Par exemple, on ne dit guéres la quantité $+a$, mais la quantité a; ni la ſérie $+a-b-c+d$, mais la ſérie $a-b-c+d$. Nous allons donner à-préſent les régles qu'il faut obſerver dans les différentes opérations qu'on fait ſur les quantités Algébraïques.

De l'Addition des Quantités Algébraïques.

3. Cet Article ſera partagé en divers paragraphes.

1°. Toutes les fois que deux ou plus de deux quantités de même dénomination, & qui ſont précédées du même ſigne, doivent être ajoûtées enſemble, écrivez la ſomme de leurs coëfficiens numériques en mettant au-devant de cette ſomme le ſigne commun, & le Dénominateur commun après elle: ainſi $+2a$ & $+3a$ ajoûtés enſemble font $+5a$, par la même raiſon que 2 douzaines & 3 douzaines ajoûtées enſemble font 5 douzaines: de même $-3ab-4ab-5ab$ ajoûtés enſemble font $-12ab$; préciſément comme pluſieurs dettes ajoûtées enſemble forment une plus grande dette.

2°. Si deux quantités de même dénomination, qui ſont précédées de

différens ſignes, doivent être ajoûtées enſemble, écrivez ſimplement la différence de leurs coëfficiens numériques avec le Dénominateur commun après elle, & au-devant le ſigne de la plus grande quantité: car en ce cas, les quantités qui doivent être ajoûtées, étant contraires l'une à l'autre, la plus petite quantité, de quelque côté qu'elle ſoit, détruira dans l'autre une quantité égale à celle qui eſt exprimée par ſon propre coëfficient. Ainſi $+5a$ ajoûtés à $-2a$ font $+3a$, comme ſi quelqu'un me devoit 5000 livres pour certaine choſe, & que je lui en duſſe 2000 pour une autre, il me reſteroit redevable de 3000. Si l'on m'objecte, que c'eſt-là une ſouſtraction, & pas une addition, je réponds que l'addition de $-2a$ produit toujours le même effet que la ſouſtraction de $+2a$: mais je nie que l'addition de $-2a$ ſoit la même, ou produiſe le même effet que la ſouſtraction de $-2a$. Voici quelques autres exemples de ce même cas: $+7a$ ajoûtés à $-7a$ donnent 0; $+3a$ ajoûtés à $-12a$ donnent $-9a$; $+a$ ajoûté à $-5a$ donne $-4a$; $+5a$ ajoûtés à $-a$ donnent $+4a$; $+\frac{1}{2}a$ ajoûté à $-\frac{1}{2}a$ donne $\frac{1}{12}a$, &c.

3°. Quand pluſieurs quantités de même dénomination doivent être ajoûtées enſemble, & que les unes ſont affirmatives & les autres négatives, il faut commencer par les réduire au nombre de deux, en faiſant une ſomme de toutes les quantités affirmatives, & une autre ſomme de toutes les quantités négatives, & puis ajoûter ces deux ſommes enſemble, comme il a été dit dans le dernier paragraphe. Ainſi $+10a-9a+8a-7a$, ajoûtés enſemble, font $2a$; car $+10a$ & $+8a$ font $+18a$, & $-9a$ & $-7a$ font $-16a$; & $+18a$ & $-16a$ font $+2a$.

4°. Des quantités de différentes dénominations ne ſauroient former un même tout, & par conſéquent ne peuvent être ajoûtées qu'en les plaçant dans l'ordre qu'on juge à propos l'une après l'autre, en les faiſant précéder de leurs ſignes propres, à l'exception de la premiére, dont on peut ômettre le ſigne, en cas qu'elle ſoit affirmative. Ainſi $+2a$ & $-3b$ & $+4c$ & $-5d$, étant ajoûtés enſemble, font $2a-3b+4c-5d$; de même a & b ajoûtés enſemble font $a+b$; & de-là vient que toutes les fois qu'on trouve entre deux quantités le ſigne $+$, cela ſignifie la ſomme qui réſulte de l'addition de ces deux quantités: par exemple, ſi a eſt 7 & que b ſoit 3, $a+b$ ſera 10: mais ſi $-b$ devoit être ajoûté à la quantité a, la ſomme devroit s'écrire ainſi, $a-b$; car ajoûter $-b$ eſt la même choſe que ſouſtraire $+b$.

5°. Des quantités Algébraïques, dont les membres ſont tous de différentes dénominations, ne ſauroient pareillement être ajoûtées d'aucune autre maniére qu'en les plaçant l'une après l'autre ſans changer leurs ſignes:

gnes: ainſi $3a+4b$ ajoûtés à $5c-6d$ ne peuvent faire que $3a+4b+5c-6d$. Que ſi les membres ne ſont pas tous de différentes dénominations, il ſera bon alors de plaçer une quantité compoſée au-deſſous de l'autre de même eſpéce, autant que faire ſe pourra, comme dans les exemples ſuivans:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline 2a\ *. \end{array}$$

‡ Car a & a ajoûtés enſemble font $2a$; & $+b$ & $-b$ ajoûtés enſemble s'entre-détruiſent, & font ainſi o ou *: caractére dont on ſe ſert toujours en Algébre pour déſigner une plaçe vuide. ‡

$$\begin{array}{r} 2x-3a+4b-5c+6d-7e\ \ * \\ 10x+9a-8b-7c-6d\ \ *-5f \\ \hline 12x+6a-4b-12c\ \ *-7e-5f. \end{array}$$

N. B. Dans l'addition, la ſouſtraction & la multiplication des quantités Algébraïques compoſées, il n'importe guéres ſi l'opération ſe fait de la gauche à la droite, ou de la droite à la gauche, ce qui n'eſt point vrai de la diviſion.

De la Souſtraction des Quantités Algébraïques.

4. Toutes les fois qu'une quantité Algébraïque ſimple doit être retranchée d'une autre quantité ſimple ou compoſée, il faut commencer par changer le ſigne de la quantité qu'il s'agit de retrancher, c'eſt-à-dire, en cas qu'elle ſoit affirmative, il faut la faire, ou du-moins la nommer négative, & réciproquement, & puis l'ajoûter ainſi changée à l'autre quantité: car puiſque (comme nous l'avons indiqué ci-deſſus) ſouſtraire une quantité d'une autre, eſt réellement la même choſe qu'ajoûter cette quantité en la faiſant précéder d'un ſigne contraire; & puiſque changer le ſigne de la quantité qu'on veut retrancher, rend cette quantité préciſément contraire à ce qu'elle étoit auparavant, il eſt manifeſte qu'après un pareil changement elle peut être ajoûtée à l'autre, & que le réſultat de cette addition ſera le même que celui de la ſouſtraction propoſée. Ainſi la règle de ſouſtraction, en changeant le ſigne de la quantité qu'il s'agit de ſouſtraire, peut toujours être changée en celle d'addition, tout comme la règle de diviſion en fractions ſe change en celle de multiplication, pourvu que le Numérateur devienne le Dénominateur, & réciproquement. Comme par exemple, $+b$ ſouſtrait de a laiſſe $a-b$, à cauſe que $-b$ ajoûté à a fait $a-b$; deſorte que $a-b$ peut être conſidéré ou comme la ſomme de a & de $-b$ ajoûtés enſemble, ou comme ce qui reſte après que $+b$ aura été ſouſtrait de a, ou comme la différence entre a

& b, ou comme l'excès de a par deſſus b, ces différentes expreſſions déſignant parfaitement la même choſe : comme ſi a ſignifioit 7, & b 3, $a-b$ marqueroit 4, & ainſi du reſte.

La règle de ſouſtraction donnée ici eſt univerſelle, quoiqu'il ne ſoit pas toujours néceſſaire d'y avoir recours : car ſuppoſé qu'il faille ſouſtraire $3a$ de $7a$, on voit du premier coup d'œil qu'il doit reſter $4a$, préciſément comme ſoixante étant ſouſtraits de cent quarante, il reſte quatre-vingts.

Voici encore quelques autres exemples de Souſtraction Algébraïque.

1°. $7a$ ſouſtraits de $5a$ laiſſent $-2a$, à cauſe que $-7a$ ajoûtés à $+5a$ ſont $-2a$, par le 2d. paragraphe du dernier Article.

2°. $9a$ ſouſtraits de o laiſſent $-9a$, à cauſe que $-9a$ ajoûtés à o ſont $-9a$.

3°. $12a$ ſouſtraits de $-3a$ laiſſent $-15a$, à cauſe que $-12a$ ajoûtés à $-3a$ ſont $-15a$, par le premier paragraphe du dernier Article.

4°. $-3a$ ſouſtraits de $-8a$ laiſſent $-5a$, à cauſe que $+3a$ ajoûtés à $-8a$ ſont $-5a$.

5°. $-7a$ ſouſtraits de $-3a$ laiſſent $+4a$, à cauſe que $+7a$ ajoûtés à $-3a$ ſont $+4a$.

6°. $-6a$ ſouſtraits de o laiſſent $+6a$, à cauſe que $+6a$ ajoûtés à o ſont $+6a$.

7°. $-5a$ ſouſtraits de $+5a$ laiſſent $+10a$, à cauſe que $+5a$ ajoûtés à $+5a$ ſont $+10a$.

8°. $-b$ ſouſtrait de a laiſſe $a+b$, à cauſe que $+b$ ajoûté à a fait $a+b$, par le 4ème. paragraphe du dernier Article.

9°. -2 ſouſtraits de 7 laiſſent 9, à cauſe que $+2$ ajoûtés à 7 ſont 9.

Il paroît par le premier de ces exemples, qu'on peut retrancher une plus grande quantité d'une plus petite, mais qu'alors le reſte ſera négatif; préciſément comme un joueur qui n'a que cinq guinées peut en perdre ſept, après quoi il reſtera à ſa charge une dette de deux guinées. Il paroît par le dernier exemple, que -2 ſouſtraits de 7 laiſſent 9, c'eſt-à-dire, que ſi l'on ſouſtrait une quantité négative d'une autre quantité affirmative, cette derniére, bien loin d'éprouver par-là quelque diminution, ſera au contraire augmentée: principe un peu dur à digérer pour ceux qui ont la compréhenſion foible. Je tâcherai cependant de leur en faciliter l'intelligence par les conſidérations ſuivantes.

1ment. Dans toute ſouſtraction, ſi le reſte & le plus petit nombre ajoûtés enſemble, ſont égaux au plus grand nombre, la ſouſtraction eſt juſ-

te:

tê: mais dans le cas préſent, le reſte 9 ajoûté au plus petit nombre — 2 eſt égal au plus grand nombre 7: donc — 2 ſouſtraits de 7 laiſſent 9.

2ment. Dans toute ſouſtraction, le reſte eſt la différence entre le plus grand nombre & le plus petit; mais la différence entre $+7$ & -2 eſt 9: donc -2 ſouſtraits de 7 laiſſent 9.

3ment. Le nombre de 7 eſt égal à $\overline{9-2}$ par le ſecond paragraphe du dernier Article; ainſi — 2 ſouſtraits de 7 auront le même reſte que — 2 ſouſtraits de $\overline{9-2}$: mais — 2 ſouſtraits de $\overline{9-2}$ laiſſent 9: donc — 2 ſouſtraits 7 laiſſent 9. En un mot, ôter une négation, dans quelque cas que ce ſoit, revient au même qu'ajoûter quelque choſe de réel: comme quand une Terre eſt chargée de quelque redevance, la valeur de la Terre augmente par cela même que la redevance eſt ôtée.

4ment. Moins on ôte de 7 plus il reſtera: ſi on n'en ôte rien, il reſtera 7: donc ſi on ôte moins que rien, il doit reſter plus que 7.

5ment. Si après tout ce que nous venons de dire, ou peut-être après tout ce qu'il eſt poſſible de dire ſur cette matiére, qui a quelque choſe d'abſtrait, il reſte encore des ſcrupules, ſervons-nous du principe avancé ci-deſſus, & voyons ce qu'il nous donnera. Qu'il faille ſouſtraire la quantité compoſée $a-2$ de la quantité compoſée $6a+7$: pour cet effet, je plaçe a ſous $6a$ & -2 ſous 7, après quoi je dis; a étant ſouſtrait de $6a$, il reſte $5a$; -2 de 7, & (ſi notre aſſertion eſt vraie) il reſte 9; ainſi la ſomme totale eſt $5a+9$. Cela étant, j'en appelle à tout homme qui a le ſens-commun, ſi cette ſouſtraction n'eſt pas juſte: car il eſt certain que ſi l'on ſouſtrait a de $6a+7$, le reſte ſera $5a+7$; & par cela même il n'y a pas le moindre lieu de douter, que ſi l'on ſouſtrait $a-2$, quantité plus petite que la premiére de 2, le reſte ne ſoit plus grand de 2, c'eſt-à-dire, égal à $5a+9$.

Autres exemples de Souſtraction de Quantités Algébraïques compoſées.

$a+b$	Ainſi $7-3$, ou 4, ſouſtraits de $7+3$,	$*+12$
$a-b$	ou 10, laiſſent deux fois 3, ou 6.	$3a+7$
$*+2b$		$-3a+5.$

De	$12x+6a-4b-12c$	$*-7e-5f$
Otez	$2x-3a+4b-5c+6d-7e$	$*$
Reſte	$10x+9a-8b-7c-6d$	$*-5f$
Preuve	$12x+6a-4b-12c$	$*-7e-5f.$

Si aucun des membres de la quantité qu'il s'agit de ſouſtraire ne ſe trouve être de même dénomination qu'aucun membre de la quantité dont

dont la ſouſtraction doit ſe faire, changez le ſigne de chaque membre de la premiére de ces quantités, & ajoûtez le tout ainſi changé à l'autre quantité. Comme ſi $5c-6d$ devoient être ſouſtraits de $3a-4b$, commencez par changer $5c-6d$ en $-5c+6d$, & puis ajoûtez cette quantité à l'autre, & vous aurez $3a-4b-5c+6d$, pour reſte de la ſouſtraction.

De la Multiplication des Quantités Algébraïques.

Et premiérement, comment les ſignes du Multiplicateur & du Multiplicande étant donnés, on trouve le ſigne du produit.

5. Avant de paſſer à la Multiplication des quantités Algébraïques, nous obſerverons, que ſi les ſignes du Multiplicateur & du Multiplicande ſont les mêmes, c'eſt-à-dire, tous deux affirmatifs, ou tous deux négatifs, le produit eſt affirmatif; mais négatif, ſi les ſignes ſont différens: ainſi $+4$ multipliés par $+3$, ou -4 par -3 donnent, dans l'un & l'autre cas, $+12$; mais -4 multipliés par $+3$, ou $+4$ par -3, donnent dans les deux cas -12.

Si le Lecteur s'attend à une démonſtration de cette règle, il doit avant tout être averti de deux choſes: 1°. qu'on appelle progreſſion Arithmétique toute ſuite de nombres qui croiſſent ou décroiſſent avec d'égales différences, comme 0, 2, 4, 6; ou 6, 4, 2, 0; comme auſſi 3, 0, -3; 4, 0, -4; 12, 0, -12; ou -12, 0, $+12$: d'où il ſuit, qu'il faut aumoins trois termes pour former une progreſſion Arithmétique; & que ſi les deux premiers termes de la progreſſion ſont connus, le troiſiéme ſe trouve aiſément. Par exemple, ſi les deux premiers termes étoient 4 & 2, le ſuivant ſeroit 0; ſi les deux premiers étoient 12 & 0, le ſuivant ſeroit -12; ſi les deux premiers étoient -12 & 0, le ſuivant ſeroit $+12$, &c.

2°. Si une ſuite de nombres en progreſſion Arithmétique, comme 3, 2 & 1, eſt ſucceſſivement multipliée par un Multiplicateur commun, tel que 4, ou ſi un ſimple nombre, tel que 4, eſt ſucceſſivement multiplié par chaque nombre d'une ſuite en progreſſion Arithmétique, comme 3, 2 & 1, les produits 12, 8 & 4, formeront auſſi une progreſſion Arithmétique.

Cela étant, la règle, dont nous devons donner la démonſtration, ne peut avoir lieu que dans quatre cas.

1ment. Celui où $+4$ multipliés par $+3$ donnent $+12$.

2ment. Celui où -4 multipliés par $+3$ donnent -12.

3ment. Celui où $+4$ multipliés par -3 donnent -12.

Et

Et enfin, celui où -4 multipliés par -3 donnent $+12$. L'expreſſion générale & abrégée de ces quatre cas eſt : premiérement $+$ par $+$ donne $+$; ſecondement $-$ par $+$ donne $-$; en troiſiéme lieu $+$ par $-$ donne $-$; enfin $-$ par $-$ donne $+$.

1er. Cas. Que $+4$ multipliés par $+3$ font $+12$, eſt une choſe qui n'a pas beſoin de démonſtration ; ou ſi elle en avoit beſoin, il ſuffiroit de jetter les yeux ſur le premier paragraphe du 3éme. Article ; car multiplier $+4$ par $+3$ eſt la même choſe qu'ajoûter $4+4+4$ en une ſomme ; mais $4+4+4$ ajoûtés en une même ſomme donnent $+12$; donc $+4$ multipliés par $+3$, donnent $+12$.

2d Cas. On prouvera de même par le ſecond paragraphe du 3éme. Article, que -4 multipliés par $+3$ donnent -12 : mais j'ai deſſein de prouver ici la même vérité d'une autre maniére : multipliez les termes de cette progreſſion Arithmétique $4, 0, -4$, par $+3$, & les produits ſeront en progreſſion Arithmétique, comme ci-deſſus : or les deux premiers produits ſont 12 & 0 ; donc le troiſiéme ſera -12 ; donc -4 multipliés par $+3$, font -12.

3éme. Cas. Pour prouver que $+4$ multipliés par -3 font -12, multipliez $+4$ ſucceſſivement par $+3, 0$ & -3, & les produits ſeront en progreſſion Arithmétique ; mais les deux premiers produits ſont 12 & 0 ; donc le troiſiéme ſera -12 ; & le produit de $+4$ par -3 égal à -12.

4éme Cas. Enfin, pour démontrer que -4 multipliés par -3 font $+12$, multipliez -4 par $3, 0$ & -3 ſucceſſivement, & les produits ſeront en progreſſion Arithmétique, mais les deux premiers produits ſont -12 & 0, par le ſecond cas ; donc le troiſiéme produit ſera $+12$; donc -4 multipliés par -3 font $+12$.

Caſ 2d. $+4, \quad 0, -4$
$+3, +3, +3$
$+12, \quad 0, -12.$

Caſ 3éme. $+4, +4, +4$
$+3, \quad 0, -3$
$+12, \quad 0, -12.$

Caſ 4éme. $-4, -4, -4$
$+3, \quad 0, -3$
$-12, \quad 0, +12.$

Ces quatre cas peuvent ſe démontrer plus briévement ainſi : $+4$ multipliés par $+3$ font $+12$; donc -4 par $+3$, ou $+4$ par -3 doivent produire quelque choſe de contraire à $+12$, c'eſt-à-dire -12 ; mais ſi -4 multipliés par $+3$ produiſent -12, alors -4 multipliés par -3 doi-

vent produire quelque choſe de contraire à -12, c'eſt-à-dire, $+12$; ſi bien que ce dernier cas, qui fait tant de peine aux commençans, n'eſt après tout qu'un principe admis par tous ceux qui ont quelque idée de Grammaire, ſavoir, que deux négatives affirment *.

De la Multiplication des Quantités Algébraïques ſimples.

6. La Multiplication des Quantités Algébraïques ſimples ſe fait, premiérement en multipliant l'un par l'autre les coëfficiens numériques, & puis en mettant, après le produit, toutes les lettres qui compoſent les quantités à multiplier, le ſigne (quand il le faut) étant placé au-devant du produit, comme nous l'avons marqué ci-deſſus. Ainſi $4b$ multipliés par $3a$ donnent $12ab$.

Quoique ce langage (car c'en eſt un) ſoit, comme tous les autres, purement arbitraire, j'oſe dire qu'il n'eſt pas poſſible d'en inventer quelque autre mieux imaginé. C'eſt ce qui paroîtra par les conſidérations ſuivantes. Si quelque quantité comme b, doit être multipliée par un nombre, comme 2, 3, ou 4, le produit ne ſauroit être mieux repréſenté que par $2b$, $3b$, $4b$, &c.; c'eſt pourquoi ſi b doit être multiplié par a, le produit ſera bien déſigné par ab: mais ſi b multiplié par a produit ab, il s'enſuit que $4b$ multipliés par a, doivent donner un produit quatre fois plus grand, c'eſt-à-dire, $4ab$; enfin, ſi $4b$ multipliés par a donnent $4ab$, il faut que $4b$ multipliés par $3a$, donnent un produit 3 fois plus grand, c'eſt-à-dire, $12ab$.

De-là vient, que toutes les fois qu'on trouve en Algébre deux ou plus de deux lettres jointes enſemble, comme elles le ſont quand elles forment un mot, c'eſt-à-dire, ſans qu'il y ait rien qui les ſépare, ces lettres marquent le produit de la multiplication des quantités qu'elles repréſentent: ainſi ab ſignifie le produit de a & de b multipliés l'un par l'autre: de même aa ſignifie le produit de a multiplié par lui-même, ou le quarré de a, & point $2a$. Ce qui fait voir que celui qui ne trouve aucune différence entre $2a$ & aa, eſt préciſément auſſi habile que celui qui confondroit 2 douzaines avec 12 fois 12.

Il n'importe guéres en quel ordre on place les lettres dans un produit; car ab & ba ne différent pas davantage l'un de l'autre, que 3 fois 4, & 4 fois 3: cependant il eſt bon d'obſerver à cet égard une eſpéce de méthode, afin de ne pas prendre des quantités pareilles pour diſſemblables; pour

* Voici une autre maniére très-ſimple d'enviſager la choſe. Le premier cas contient une affirmation affirmée; le ſecond une négation affirmée; le troiſiéme une affirmation niée; & le dernier une négation niée.

pour cet effet, il conviendra d'aſſigner aux lettres d'un produit le même ordre qu'elles occupent dans l'Alphabet, excepté quand quelque quantité inconnue eſt multipliée par une quantité connue, celle-ci devant précéder l'autre en ce cas.

N. B. La ſignification de cette marque × a été expliquée vers la fin de l'Art. 7. de l'Introduction. Pour ce qui eſt de la marque =, elle indique l'égalité, & donne à connoître que les quantités entre leſquelles elle ſe trouve, ſont égales l'une à l'autre: ainſi $2\times6=3\times4=12$ ſignifient; 2×6 ſont égaux à 3×4 égaux à 12: ou bien, le nombre 2×6 eſt égal à 3×4, c'eſt-à-dire, égal à 12.

Exemples de Multiplication Algébraïque ſimple.

1er. $4ab\times5a=20aab$. 2d. $-5ab\times6bc=-30abbc$.
3éme. $6ac\times-7bd=-42abcd$. 4éme. $-7a\times-b=+7ab$.
5éme. $x\times3x=3xx$. 6éme. $-x\times-x=+xx$.
7éme. $-5ab\times+3=-15ab$. 8éme. $\frac{1}{2}a\times\frac{2}{3}b=\frac{2}{6}ab$.

Diſtinctions à faire entre l'Addition & la Multiplication.

Pour que le jeune Algébriſte ne confonde pas des opérations auſſi différentes que l'Addition & la Multiplication, comme cela n'arrive que trop ſouvent, j'indiquerai ici quelques marques diſtinctives, qu'il fera bien de graver dans ſa mémoire:

Comme 1ment, a ajoûté à a fait $2a$, mais $a\times a$ fait aa.

2ment, $a+o$ fait a, mais a multiplié par o fait o.

3ment, a ajoûté à $-a$ fait o, mais a multiplié par $-a$ fait $-aa$.

4ment, $-a$ ajoûté à $-a$ fait $-2a$, mais $-a$ multiplié par $-a$ fait $+aa$.

5ment, a ajoûté à 1 fait $a+1$, mais a multiplié par 1 fait a.

6ment, $2a$ ajoûtés à $-3b$ font $2a-3b$, mais $2a$ multipliés par $-3b$ font $-6ab$.

J'ajoûterai ici quelques équations, qui pourront aider ceux, qui en feront le calcul, à s'accoutumer aux premiers élémens du langage des Algébriſtes. Suppoſons $a=7$, & $b=3$: en ce cas nous aurons 1°, $a+b=10$. 2°, $a-b=4$. 3°, $4a+5b=43$. 4°, $4a-5b=13$. 5°, $aa=49$. 6°, $ab=21$. 7°, $bb=9$. 8°, $aaa=343$. 9°, $aab=147$. 10°, $abb=63$. 11°, $bbb=27$. 12°, $aa+2ab+bb=49+42+9=100$. 13°, $aa-2ab+bb=49-42+9=16$. 14°, $aaa+3aab+3abb+bbb=343+441+189+27=1000$. 15°, $aaa-3aab+3abb-bbb=343-441+189-27=64$.

Des Puiſſances & de leurs expoſans.

7. Toutes les fois qu'en multiplication une lettre doit être marquée plus qu'une fois, on écrit la lettre avec un nombre en petit caractére vers la droite de la lettre: ce nombre indique combien de fois la lettre eſt priſe; ainſi au-lieu de xx on écrit x^2, au-lieu de xxx, x^3, au-lieu de $xxxx$, x^4, *&c.* Ces produits s'appellent les puiſſances de x; les caractéres qui repréſentent le nombre des répétitions, s'appellent les expoſans de ces puiſſances; & la quantité x, dont toutes ces puiſſances tirent leur origine, s'appelle la racine de ces puiſſances, ou la premiére puiſſance de x; x^2 ſe nomme la ſeconde puiſſance de x; x^3 la troiſiéme puiſſance; x^4 la quatriéme puiſſance, *&c.* *Viete*, *Oughtred*, & quelques autres Analyſtes, au-lieu de petites lettres, employoient des lettres capitales, & au-lieu d'expoſans numériques diſtinguoient ces puiſſances par des noms: ainſi *Viete* en particulier, appelloit x^2, *X quarré*; x^3, *X cube*; x^4, *X quarré-quarré*; x^5, *X quarré-cube*; x^6, *X cube-cube*; x^7, *X quarré-quarré-cube*, &c. noms qu'*Oughtred* a abrégés, en les écrivant ainſi; Xq, Xc, Xqq, Xqc, Xcc, $Xqqc$, *&c.* mais ces noms ne ſont preſque plus en uſage, excepté les deux premiers, quand on les applique à une ligne élevée à la ſeconde ou à la troiſiéme puiſſance.

Si nous ſuppoſons $x=5$, nous aurons $2x=10$, $x^2=25$, $3x=15$, $x^3=125$, $4x=20$, $x^4=625$, *&c.*

La multiplication de ces puiſſances eſt facile: ainſi $x^2 \times x^3=x^5$, à cauſe que $xx \times xxx=xxxxx$: ce qui fait voir, que l'addition des expoſans répond toujours à la multiplication des puiſſances, pourvu que ce ſoient les puiſſances de la même quantité; car comme $2+3=5$, ainſi $x^2 \times x^3=x^5$, *&c.* mais ſi c'étoient les puiſſances de différentes quantités, leurs expoſans ne devroient point être ajoûtés: ainſi $a^2 \times x^3=a^2x^3$, & $a^2x^3 \times a^4x^3=a^6x^6$. Et il faut obſerver ici, que ſi un nombre ſe trouve entre deux lettres, c'eſt toujours à la premiére lettre qu'il faut le rapporter: ainſi a^4x^3 ne ſignifie point $a \times 2x^3$, mais $a^2 \times x^3$.

La Multiplication des Nombres irrationels.

8. Cette marque $\surd$ déſigne la racine quarrée du nombre au devant duquel elle eſt placée, & ſe met ordinairement au devant d'un nombre dont la racine quarrée ne ſauroit s'exprimer autrement, ſoit en nombres entiers, ou en fractions: ainſi $\surd 2$ ſignifie la racine quarrée de 2; $\surd a$ la racine quarrée de a, *&c.* Ces racines s'appellent ordinairement racines ſourdes, ou racines irrationelles, à cauſe que leur raiſon à l'unité ne ſauroit être exprimée en nombres.

Toutes

Toutes les fois que deux nombres ſourds doivent être multipliés enſemble, la voye la plus abrégée eſt de multiplier l'un par l'autre les nombres eux-mêmes, ſans aucun égard à leur ſigne radical, & puis de mettre le ſigne radical au devant du produit. Ainſi s'il étoit queſtion de multiplier la $\surd a$ par $\surd b$, le produit ſeroit $\surd ab$; ce que je prouve ainſi: Soit $\surd a = x$, & $\surd b = y$; en ce cas $x^2 = a$, & $y^2 = b$, & $x^2 y^2 = ab$, & $xy = \surd ab$; mais xy, ou $x \times y = \surd a \times \surd b$ par la ſuppoſition; donc $\surd a \times \surd b = \surd ab$. Ainſi $\surd 2 \times \surd 3 = \surd 6$.

Ces multiplications ſont d'un grand uſage non ſeulement dans des matiéres de ſpéculation, mais auſſi dans la pratique: car ſi je devois, par exemple, multiplier la racine quarrée de 2 par la racine quarrée de 3, & que je n'euſſe point cette règle, je devrois premiérement extraire la racine de 2, avec le degré de préciſion que je croirois convenir le mieux à mon deſſein; il faudroit enſuite faire la même opération à l'égard de la racine de 3; & enfin multiplier les deux racines l'une par l'autre, avant de pouvoir obtenir le nombre cherché; mais dès que je ſais que $\surd 2 \times \surd 3 = \surd 6$, toute l'opération ſe trouve réduite à la ſeule extraction de la racine de 6: & il arrive même quelquefois, que les deux racines, quoique l'une & l'autre irrationelles, donnent un produit rationel: ainſi $\surd 2 \times \surd 8 = \surd 16 = 4$ & la $\surd ab^2 \times \surd ac^2 = \surd a^2 b^2 c^2 = abc$.

De la Multiplication des Quantités Algébraïques compoſées.

9. La multiplication des Quantités Algébraïques compoſées ſe fait premiérement en multipliant le Multiplicande par chaque membre particulier du Multiplicateur, & puis en marquant le produit de la maniére la plus ſimple.

Comme par exemple; on demande de multiplier cette quantité compoſée $6x - 7a - 8b$ par cette autre quantité compoſée $2x - 3a + 4b$: ayant écrit le Multiplicateur au-deſſous du Multiplicande, & commençant à la gauche (quoique l'opération puiſſe auſſi ſe faire dans l'autre ſens) je multiplie le Multiplicande entier par $2x$, premier membre de mon Multiplicateur, & le produit eſt $12xx - 14ax - 16bx$, que j'écris tout de ſuite: je multiplie après cela le Multiplicande par $-3a$, membre ſuivant du Multiplicateur, & le produit eſt $-18ax + 21aa + 24ab$, dont je place le premier membre $-18ax$ au-deſſous des $-14ax$ déjà trouvés, pour ajoûter enſuite plus aiſément enſemble ces deux quantités, qui ſont de même dénomination; je place le reſte, ſavoir $+21aa + 24ab$ dans la premiére ligne; après quoi je multiplie par $4b$ le dernier membre du Multiplicateur, & le produit eſt $24bx - 28ab - 32bb$,

dont je mets $24bx$ au-deſſous de $-16bx$ & $-28ab$ ſous $+24ab$, & le dernier membre $-32bb$, je le mets dans la premiére ligne, à cauſe que je n'ai aucune autre quantité qui lui réponde: enfin je marque de la maniére la plus ſimple tout le produit, qui ſe trouve être: $12xx-32ax+8bx+21aa-4ab-32bb$. Voyez l'opération:

$$\begin{array}{l} 6x-7a\ \ -8b \\ 2x-3a\ \ +4b \\ \hline 12xx-14ax-16bx+21aa+24ab-32bb \\ \quad -18ax+24bx\qquad -28ab \\ \hline \text{Somme } 12xx-32ax+8bx+21aa-4ab-32bb. \end{array}$$

Exemple 2.

$$\begin{array}{l} 3x+4a\ \ -5b \\ 3x-4a\ \ +5b \\ \hline 9xx+12ax-15bx-16aa+20ab-25bb \\ \quad -12ax+15bx\qquad +20ab \\ \hline 9xx\quad *\quad *\quad -16aa+40ab-25bb. \end{array}$$

Exemple 3.

$$\begin{array}{l} 6xx-7ax+8aa \\ 2xx-3ax+4aa \\ \hline 12x^4-14ax^3+16a^2x^2-24a^3x+32a^4 \\ \quad -18ax^3+21a^2x^2-28a^3x \\ \qquad +24a^2x^2 \\ \hline 12x^4-32ax^3+61a^2x^2-52a^3x+32a^4. \end{array}$$

Exemple 4.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline aa+ab-bb \\ \quad -ab \\ \hline aa\quad *-bb. \end{array}$$

Exemple 5.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab+bb \\ \quad +ab \\ \hline aa+2ab+bb. \end{array}$$

Exemple 6.

$$\begin{array}{l} a-b \\ a-b \\ \hline aa-ab+bb \\ \quad -ab \\ \hline aa-2ab+bb. \end{array}$$

N. B.

N. B. Un trait au-deſſus de deux ou de plus de deux quantités, ſignifie que toutes ces quantités doivent être conſidérées comme ne formant enſemble qu'une ſeule quantité compoſée: ainſi $\overline{a+b} \times \overline{c-d}$ ne ſignifie point la quantité qui réſulte de la multiplication de $b \times c$, en ajoûtant enſuite $a-d$ au produit, comme on pourroit ſe l'imaginer s'il n'y avoit point de trait; mais le ſens en eſt, qu'il faut multiplier toute la quantité $\overline{a+b}$ par toute la quantité $\overline{c-d}$.

La preuve de la Multiplication compoſée.

10. Dans le troiſiéme exemple nous avons multiplié $\overline{6xx-7ax+8aa}$ par $\overline{2xx-3ax+4aa}$, & trouvé que le produit étoit $12x^4-32ax^3+61a^2x^2-52a^3x+32a^4$. Voyons comment la choſe réuſſira en nombres. Pour cet effet, ſuppoſons a & x égaux à deux nombres donnés, & pour rendre la ſuppoſition auſſi ſimple qu'il eſt poſſible, faiſons $a=1$, & pareillement $x=1$: nous aurons alors dans le Multiplicande $6xx=6$, $-7ax=-7$, & $8aa=+8$, & $6-7+8=7$, donc le Multiplicande eſt 7: de plus, nous avons dans le Multiplicateur $2xx=2$, $-3ax=-3$, $+4aa=+4$, & $2-3+4=3$; donc le Multiplicateur eſt 3; & le Multiplicande 7, multiplié par le Multiplicateur 3, donne pour produit 21. Examinons préſentement les différentes parties du produit, telles qu'elles ſont repréſentées ici en lettres, & voyons ſi elles forment la ſomme que nous venons d'indiquer: $12x^4=12$, $-32ax^3=-32$, $+61a^2x^2=+61$, $-52a^3x=-52$, $+32a^4=+32$ & $12-32+61-52+32$ font préciſément 21. Ceci peut ſervir de preuve que l'opération a été bien faite, quoique cette preuve ne ſoit pas au-deſſus de toute exception; mais il arrive rarement qu'il y ait de l'erreur. Pour qu'il ne reſte aucun doute au ſujet de l'opération, on peut faire $a=1$, & $x=-1$; car en ce cas le Multiplicande ſera $6+7+8=21$, & le Multiplicateur $2+3+4=9$; & le produit $12+32+61+52+32=189$, qui eſt le même que le produit du Multiplicande 21, multiplié par le Multiplicateur 9.

Comment par la Multiplication en Algébre on trouve des Théorêmes généraux.

11. Par le moyen de ces Multiplications Algébraïques, on peut découvrir & démontrer pluſieurs Théorêmes d'un grand uſage dans toutes les parties des Mathématiques. J'en vais donner quelques exemples avant que d'aller plus loin.

Dans le quatriéme exemple de la Multiplication compoſée, nous avons trouvé, que $a+b$ multiplié par $a-b$ donnoit $aa-bb$; d'où j'infére, que

que *la ſomme & la différence de deux nombres quels qu'ils ſoient, multipliées l'une par l'autre donneront la différence de leurs quarrés, & réciproquement:* car a & b repréſentent deux nombres pris à diſcrétion; $a+b$ leur ſomme, $a-b$ leur différence, & $aa-bb$ la différence de leurs quarrés; ainſi prenant deux nombres, ſuppoſons 7 & 3, la différence de leurs quarrés ſera $49-9=40$; & leur ſomme 10, multipliée par leur différence 4, fait auſſi 40.

Mais ici j'avertis une fois pour toutes, que les exemples pris en nombres ſuffiſent bien pour éclaircir un Théorême général, mais ne peuvent jamais tenir lieu de preuves; à cauſe qu'une propoſition peut ſe trouver vraie dans quelques cas particuliers, & fauſſe dans d'autres; mais dès qu'une propoſition eſt vraie en lettres ou ſymboles, elle emporte ſa démonſtration avec elle, à cauſe que ce ſont des marques univerſelles.

Dans le cinquiéme exemple il a été prouvé, que la quantité $a+b$, multipliée par elle-même, donnoit $aa+bb+2ab$; d'où j'infére, que *ſi un nombre eſt partagé en deux parties à diſcrétion, le quarré de la toute ſera égal au quarré de chaque partie, & à deux fois le rectangle, ou produit de la multiplication de ces parties, ajoûtés enſemble:* par exemple, ſi le nombre 10 étoit partagé en 7 & 3; le nombre 100 quarré de 10, ſeroit égal à 49 quarré de 7, & à 9 quarré de 3, & à 42 double produit de 7 & de 3, multipliés l'un par l'autre: car $49+9+42=100$.

Dans le ſixiéme exemple on a vu, que la quantité $a-b$ multipliée par elle-même, donnoit $aa-2ab+bb$; d'où il ſuit, que *ſi de la ſomme des quarrés de deux nombres pris à diſcrétion, on retranche deux fois le produit de ces nombres, il reſtera le quarré de leur différence:* car $aa+bb$ eſt la ſomme des quarrés de a & de b, & le double de leur produit eſt $2ab$, & le quarré de $aa-2ab+bb$, c'eſt-à-dire le quarré de la différence de a & de b, a été trouvé être le produit de la quantité $a-b$ multipliée par elle-même: c'eſt ainſi que dans les nombres 7 & 3, le quarré de 7 eſt 49, le quarré de 3 eſt 9, & la ſomme de leurs quarrés eſt 58; & ſi de cette ſomme on ôte le double produit 42, le reſte ſera 16, quarré de 4, c'eſt-à-dire, quarré de la différence des nombres 7 & 3.

Ces deux derniers Théorêmes ſont en ſubſtance les mêmes que la quatriéme & la ſeptiéme propoſitions du ſecond Livre d'*Euclide*.

Comment on peut exprimer les trois côtés d'un Triangle rectangle en nombres rationels.

12. Les deux Théorêmes, dont il s'agit, peuvent ſervir à réſoudre un Problême de grande importance en Algébre; qui eſt, de trouver trois nom-

nombres qui repréſentent les trois côtés d'un triangle rectangle ; ou plutôt, de trouver autant de pareils nombres, pris trois à trois, qu'on voudra ; c'eſt-à-dire, en d'autres termes, *Trouver trois nombres tels, que la ſomme des quarrés de deux de ces nombres ſoit égale au quarré du troiſiéme.* Or il eſt clair que ces trois nombres $aa-2ab+bb$, & $4ab$, & $aa+2ab+bb$, ſont de telle nature, que les deux premiers ajoûtés enſemble ſont égaux au troiſiéme : il eſt certain auſſi, que le premier & le troiſiéme ſont des nombres quarrés ; car $aa-2ab+bb$, eſt le quarré de $a-b$; & $aa+2ab+bb$ eſt le quarré de $a+b$; c'eſt pourquoi ſi le nombre du milieu $4ab$ étoit un nombre quarré comme les deux autres, nous aurions trois nombres quarrés, dont les deux premiers ajoûtés enſemble ſeroient égaux au troiſiéme ; & par conſéquent, les racines de ces trois quarrés ſeroient trois nombres qui ſatisferoient aux conditions du Probléme. Mais le nombre du milieu $4ab$ ſera un quarré, ſi a & b ſont des nombres quarrés : car ſi l'on ſuppoſe $a=rr$ & $b=ss$, on aura $4ab=4rrss$, qui eſt un nombre quarré dont la racine eſt $2rs$: mais la racine du premier quarré $aa-2ab+bb$ étoit $a-b$, qui en ce cas eſt $rr-ss$; & la racine du troiſiéme quarré $aa+2ab+bb$ étoit $a+b$, qui eſt $rr+ss$; ainſi ces trois nombres, $rr-ss$, $2rs$ & r^2+s^2 ſont tels, que le quarré du premier ajoûté au quarré du ſecond ſera le quarré du troiſiéme ; & ce cas aura lieu quels que ſoient les nombres qu'on veuille mettre pour r & s. Mais $rr-ss$ eſt la différence des quarrés de r & de s, & la quantité $2rs$ eſt le double produit de leur multiplication, & enfin $rr+ss$ eſt la ſomme des quarrés de r & de s. Puis donc qu'il nous eſt permis de prendre quels nombres il nous plaît pour r & s, le Problême admettra la ſolution ſuivante : *Prenez deux nombres à diſcrétion, & de ces deux nombres formez-en trois autres ainſi : prenez la différence de leurs quarrés, le double produit de leur multiplication, & la ſomme de leurs quarrés, & les trois nombres ainſi trouvés répondront à la condition du Problême.* Par exemple, que les nombres pris ſoient 2 & 1 : la différence des quarrés de ces nombres eſt $4-1=3$; le double produit de leur multiplication eſt $2\times2\times1=4$; & la ſomme de leurs quarrés eſt $4+1=5$; ainſi les nombres 3, 4 & 5, ſervent à réſoudre la queſtion propoſée ; car $3\times3+4\times4=5\times5$; c'eſt-à-dire $9+16=25$. Suppoſons que les nombres choiſis ſoient $2+3$: la différence de leurs quarrés ſera $9-4=5$, leur double produit $2\times3\times2=12$, & la ſomme de leurs quarrés $9+4=13$; donc 5, 12 & 13, ſont trois autres nombres qui répondent à la condition du Problême : car $5\times5+12\times12=13\times13$, c'eſt-à-dire, $25+144=169$. Enfin, que les nombres pris ſoient 4 & 1 ; & la différence

ce de leurs quarrés ſera $16-1=15$, leur double produit $2\times4\times1=8$, & la ſomme de leurs quarrés $16+1=17$; c'eſt pourquoi 8, 15 & 17, répondent auſſi aux conditions du Problême: car $8\times8+15\times15=17\times17$, c'eſt-à-dire, $64+225=289$.

De la Diviſion des Quantités Algébraïques ſimples.

13. La diviſion des Quantités Algébraïques ſimples, quand elle eſt poſſible en nombres entiers, ſe fait, premiérement en diviſant le coëfficient numérique du dividende par le coëfficient numérique du diviſeur, & puis en mettant après le quotient toutes les lettres du dividende qui ne ſe trouvent pas dans le diviſeur; le ſigne du quotient dans la diviſion étant déterminé par ceux du diviſeur & du dividende, préciſément de même que le ſigne du produit dans la multiplication eſt déterminé par ceux du Multiplicateur & du Multiplicande; c'eſt-à-dire, ſi les ſignes du diviſeur & du dividende ſont ſemblables, ſavoir, tous deux affirmatifs, ou tous deux négatifs, le quotient ſera affirmatif, & s'ils ſont diſſemblables, négatif: par exemple, ſi la quantité $-12ab$ eſt diviſée par $-3a$, le quotient ſera $+4b$; ce que je démontre ainſi. Dans toute diviſion le quotient doit être une quantité telle, qu'étant multipliée par le diviſeur elle forme le dividende; ainſi rechercher le quotient dans le cas dont il s'agit, n'eſt autre choſe, que rechercher quel nombre, ou quelle quantité, multipliée par $-3a$, le diviſeur formera le dividende. Je demande donc premiérement, quel ſigne multiplié par $-$, ſigne du diviſeur, donne $-$, ſigne du dividende, & la réponſe eſt $+$; par conſéquent $+$ eſt le ſigne du quotient: je demande enſuite, quel nombre multiplié par 3, coëfficient du diviſeur, donnera 12, coëfficient du dividende, & la réponſe eſt 4; donc 4 eſt le coëfficient du quotient: enfin je demande, quelle lettre multipliée par a, lettre du diviſeur, produira ab, dénominateur, ou partie litérale du dividende, & la réponſe eſt b; donc b eſt la lettre du quotient: & de cette maniére nous avons le quotient entier, qui eſt $+4ab$. Le même raiſonnement eſt applicable à tous les autres cas.

Exem-

Exemples de Diviſion Algébraïque ſimple.

Exemple 1. $4ab)\ 24abbc\ (6bc.$
2. $+7)\ -35ab\ (-5ab.$
3. $-x)\ -3xx\ (+3x.$
4. $-9ab)\ +72ab\ (-8.$
5. $-4a^3)\ -60a^8\ (+15a^5.$
6. $4x^4)\ 60x^9\ (+15x^7.$
7. $+4a^3x^2)\ -60a^8x^9\ (-15a^5x^7.$
8. $b)\ \frac{1}{4}ab\ (\frac{1}{4}a.$
9. $\frac{1}{3})\ \frac{2}{3}b\ (\frac{2}{3}b.$

Comment on marque les Fractions en Algébre.

Quand la diviſion ſe trouve impoſſible ſuivant la méthode que nous venons d'indiquer, le quotient ne peut s'exprimer que par une fraction, dont le Numérateur eſt le dividende, & le Dénominateur le diviſeur; Voyez l'Introduction Art. 13. Comme s'il falloit diviſer a par b (diviſion impoſſible ſuivant la règle précédente) le quotient doit être exprimé par cette fraction $\frac{a}{b}$, c'eſt-à-dire, a diviſé par b, ou le quotient de a diviſé par b.

Si le Numérateur, ou le Dénominateur, ou l'un & l'autre, ſont des quantités compoſées, les fractions reſpectives doivent s'écrire ainſi; $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{b+c}$, $\frac{a+b}{c-d}$.

Si la diviſion eſt en partie poſſible ſuivant les règles précédentes, & en partie impoſſible, il faut la continuer auſſi loin qu'il eſt poſſible, & le reſte doit être déſigné par une fraction, comme la diviſion ordinaire: par exemple, s'il falloit diviſer $ad+bd+c$ par d, le quotient ſeroit $a+b+\frac{c}{d}$.

De la diviſion des Quantités Algébraïques compoſées.

14. La diviſion des Quantités Algébraïques compoſées ſe fait, premiérement, en rangeant les différens membres, tant du diviſeur que du dividende, ſuivant les dimenſions de quelque lettre commune à tous deux, & puis en procédant comme dans l'Arithmétique vulgaire.

N. B. On dit qu'une quantité eſt diſpoſée ſuivant les dimenſions de quelqu'une des lettres qu'elle contient, quand la plus haute puiſſance de cette lettre eſt placée la premiére, & ainſi de ſuite, comme dans l'exemple que nous allons donner, ou le diviſeur & le dividende ſont rangés ſuivant les dimenſions de la lettre x.

On demande de diviſer la quantité $48x^3 - 76ax^2 - 64a^2x + 105a^3$ par cette quantité $2x - 3a$. Ici, comme mon diviſeur eſt compoſé de deux membres, je prends les deux premiers membres du dividende pour commencer mon opération ſur eux; enſuite je diviſe le premier nombre de cette partie du dividende par le premier membre du diviſeur, ſavoir $48x^3$ par $2x$, & le quotient eſt $24xx$, que je mets au quotient: ceci étant fait, je multiplie le diviſeur $2x - 3a$ par le quotient $24xx$, & le produit eſt $48x^3 - 72ax^2$, que je place ſous les deux premiers membres de mon premier dividende $48x^3 - 76ax^2$, & puis ſouſtrayant la premiére de ces quantités de la derniére, je trouve qu'il reſte $4ax^2$: j'ajoûte à ce reſte le membre ſuivant de mon dividende, qui eſt $-64a^2x$, & me trouve par-là avoir un ſecond dividende, ſavoir $-4ax^2 - 64ax^2$: ici je diviſe de nouveau le premier membre de ce dividende, par le premier membre du diviſeur, c'eſt-à-dire, $-4ax^2$ par $2x$, & le quotient eſt $-2ax$, que j'ajoûte au quotient général; multipliant enſuite le diviſeur $2x - 3a$ par ce dernier quotient $-2ax$, le produit eſt $-4ax^2 + 6a^2x$, lequel étant ſouſtrait du ſecond dividende $-4ax^2 - 64a^2x$ laiſſe pour reſte $-70a^2x$; j'ajoûte à ce reſte $+105a^3$ dernier membre du dividende général, & me trouve par-là avoir un troiſiéme dividende particulier, qui eſt $-70a^2x + 105a^3$; le premier membre de ce dividende, diviſé par le premier membre du diviſeur, donne $-35aa$, que j'ajoûte au quotient: multipliant enſuite $-35aa$ par le diviſeur, j'ai pour produit $-70a^2x + 105a^3$, leſquels étant ſouſtraits du dernier dividende ne laiſſent aucun reſte; deſorte que le quotient entier eſt $24xx - 2ax - 35aa$. Pour que le Lecteur puiſſe ſe faire une idée plus nette de l'opération, nous la donnerons ici dans l'ordre où elle doit ſe faire, rangée de la maniére qu'il faut, & augmentée encore de quelques exemples.

Exemple 1.

$$
\begin{array}{l}
2x-3a)\ 48x^3-76ax^2-64a^2x+105a^3\ (24x^2-2ax-35a^2 \\
\quad 48x^3-72ax^2 \\
\quad\overline{} \\
\quad * \quad -4ax^2-64a^2x \\
\quad\quad -4ax^2+6a^2x \\
\quad\quad\overline{} \\
\quad\quad * \quad -70a^2x+105a^3 \\
\quad\quad\quad -70a^2x+105a^3 \\
\quad\quad\quad\overline{} \\
\quad\quad\quad * \qquad *
\end{array}
$$

Exem-

Exemple 2.

$$
\begin{array}{l}
4x-5a)\ 48x^3-76ax^2-64a^2x+105a^3\ (12x^2-4ax-21aa \\
\quad 48x^3-60ax^2 \\
\quad\overline{\ *\ -16ax^2-64a^2x} \\
\quad\quad -16ax^2+20a^2x \\
\quad\quad\overline{\quad *\ -84a^2x+105a^3} \\
\quad\quad\quad -84a^2x+105a^3 \\
\quad\quad\quad\overline{\quad\quad * \quad\quad *}
\end{array}
$$

Exemple 3.

$$
\begin{array}{l}
6x+7a)\ 48x^3-76ax^2-64a^2x+105a^3\ (8x^2-22ax+15a^2 \\
\quad 48x^3+56ax^2 \\
\quad\overline{\ *\ -132ax^2-64a^2x} \\
\quad\quad -132ax^2-154a^2x \\
\quad\quad\overline{\quad *\ +90a^2x+105a^3} \\
\quad\quad\quad +90a^2x+105a^3 \\
\quad\quad\quad\overline{\quad\quad * \quad\quad *}
\end{array}
$$

Exemple 4.

$$
\begin{array}{l}
3x^2-4x+5)\ 18x^4-45x^3+82x^2-67x+40\ (6x^2-7x+8 \\
\quad 18x^4-24x^3+30x^2 \\
\quad\overline{\ *\ -21x^3+52x^2-67x} \\
\quad\quad -21x^3+28x^2-35x \\
\quad\quad\overline{\quad *\ +24x^2-32x+40} \\
\quad\quad\quad +24x^2-32x+40 \\
\quad\quad\quad\overline{\quad\quad * \quad\quad * \quad\quad *}
\end{array}
$$

Cette méthode de faire la diviſion eſt la plus claire à mon avis, comme s'éloignant le moins de la diviſion ordinaire; mais on peut l'abréger tant ſoit peu, en faiſant les différentes opérations de la maniére ſuivante.

Exemple 1.

$$
\begin{array}{l}
2x-3a)\ 48x^3-76ax^2-64a^2x+105a^3\ (24x^2-2ax-35aa \\
\quad 48x^3-72ax^2 \\
\quad\ *\ \ -4ax^2 \\
\quad\ \ -4ax^2+6a^2x \\
\quad\ \ \ -70a^2x \\
\quad\ \ \ -70a^2x+105a^3 \\
\quad\ \ \ \ *\ \ \ *
\end{array}
$$

Exemple 2.

$$
\begin{array}{l}
4x-5a)\ 48x^3-76ax^2-64a^2x+105a^3\ (12x^2-4ax-21a^2 \\
\quad 48x^3-60ax^2 \\
\quad\ *\ \ -16ax^2 \\
\quad\ \ -16ax^2+20a^2x \\
\quad\ \ \ *\ \ -84a^2x \\
\quad\ \ \ \ -84a^2x+105a^3 \\
\quad\ \ \ \ \ *\ \ \ *
\end{array}
$$

Exemple 3.

$$
\begin{array}{l}
6x+7a)\ 48x^3-76ax^2-64a^2x+105a^3\ (8x^2-22ax+15aa \\
\quad 48x^3+56ax^2 \\
\quad\ *\ \ -132ax^2 \\
\quad\ \ -132ax^2-154a^2x \\
\quad\ \ \ *\ \ +90a^2x \\
\quad\ \ \ \ +90a^2x+105a^3 \\
\quad\ \ \ \ \ *\ \ \ *
\end{array}
$$

Exemple 4.

$$
\begin{array}{l}
3x^2-4x+5)\ 18x^4-45x^3+82x^2-67x+40\ (6x^2-7x+8 \\
\quad 18x^4-24x^3+30x^2 \\
\quad\ *\ \ -21x^3+52x^2 \\
\quad\ \ -21x^3+28x^2-35x \\
\quad\ \ \ *\ \ +24x^2-32x \\
\quad\ \ \ \ +24x^2-32x+40 \\
\quad\ \ \ \ \ *\ \ \ *\ \ \ *
\end{array}
$$

La juſteſſe de cette ſorte de diviſion peut ſe prouver de la même maniére que dans la diviſion ordinaire, ſavoir, en multipliant le diviſeur par le quotient, ou le quotient par le diviſeur, & en ajoûtant le reſte s'il y en a; car alors ſi le produit, ou la ſomme, égale le dividende, la diviſion eſt bien faite, ſans cela point: par exemple, ſi au lieu de diviſer $48x^3 - 76ax^2 - 64a^2x + 105a^3$ par $2x - 3a$, nous diviſons $48x^3 - 76ax^2 - 64a^2x + 110a^3$ par $2x - 3a$, le quotient ſera le même qu'auparavant, ſavoir, $24x^2 - 2ax - 35a^2$, mais il y aura un reſte de $5a^3$; donc ſi le quotient $24x^2 - 2ax - 35aa$ eſt multiplié par le diviſeur $2x - 3a$, le produit conjointement avec le reſte $5a^3$ formera le dividende $48x^3 - 76ax^2, -64a^2x + 110a^3$.

$$
\begin{array}{l}
24x^2 - 2ax - 35a^2 \\
2x - 3a \\
\hline
48x^3 - 4ax^2 - 70a^2x + 105a^3 \\
\quad - 72ax^2 + 6a^2x \\
\hline
48x^3 - 76ax^2 - 64a^2x + 105a^3 \\
\qquad\qquad + 5a^3 \\
\hline
48x^3 - 76ax^2 - 64a^2x + 110a^3.
\end{array}
$$

Si, quand le diviſeur & le dividende ſont placés ſuivant les dimenſions de quelque lettre commune, il reſte un ou pluſieurs endroits vuides, on peut mettre une étoile à chacun de ces endroits: comme s'il étoit queſtion de diviſer $16x^4 - 72a^2x^2 + 81a^4$ par $2x - 3a$: on voit du premier coup d'œil, qu'il y a deux endroits vuides dans le dividende, ſavoir les endroits que la premiére & la troiſiéme des puiſſances de x devoient occuper: le tout étant rempli, voici quel ſera le dividende; $16x^4 * - 72a^2x^2 * + 81a^4$.

$$
\begin{array}{l}
2x - 3a) \; 16x^4 \; * \; - 72a^2x^2 * + 81a^4 \; (8x^3 + 12ax^2 - 18a^2x - 27a^3 \\
\quad \underline{16x^4 - 24ax^3} \\
\quad\; * \quad + 24ax^3 \\
\quad\quad \underline{+ 24ax^3 - 36a^2x^2} \\
\quad\quad\quad * \quad - 36a^2x^2 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{- 36a^2x^2 + 54a^3x} \\
\quad\quad\quad\quad\quad * \quad - 54a^3x \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{- 54a^3x + 81a^4} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad * \qquad *
\end{array}
$$

Nous ajoûterons encore un exemple du même genre: on demande le quotient de la diviſion de $81x^4 - 256a^4$ par $3x + 4a$.

$3x+4a)\ 81x^4 \ * \ * \ * -256a^4 (27x^3-36ax^2+48a^2x-64a^3$

$81x^4+108ax^3$

$* \ -108ax^3$

$-108ax^3-144a^2x^2$

$* \ +144a^2x^2$

$+144a^2x^2+192a^3x$

$* \ -192a^3x$

$-192a^3x-256a^4$

$* \ *$

Comme la diviſion en fractions décimales peut, à l'aide des o, être continuée à diſcrétion, il en eſt de même de la diviſion Algébraïque, qu'on peut pouſſer auſſi loin qu'on veut en mettant à chaque place vuide une étoile: par exemple, ſi l'on diviſe 1 par $1+x$, le quotient ſera $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5$ &c. à l'infini: mais ſi l'on diviſe 1 par $1-x$, le quotient ſera, $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ &c. à l'infini. Voyez l'operation:

$1+x)\ 1 \ * \ * \ * \ * \ * \ (1-x+x^2-x^3+x^4-x^5$ &c.

$1+x$

$* \ -x$

$-x-x^2$

$* \ +x^2$

$+x^2+x^3$

$* \ -x^3$

$-x^3-x^4$

$* \ +x^4$

$+x^4+x^5$

$* \ -x^5.$

$1-x)\ 1 \ * \ * \ * \ * \ * \ (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ &c.

$1-x$

$* \ +x$

$+x-x^2$

$* \ +x^2$

$+x^2-x^3$

$* \ +x^3$

$+x^3-x^4$

$* \ +x^4$

$+x^4-x^5$

$* \ +x^5.$

Comme

Les Quotiens qui réſultent de cette ſorte de diviſion ſont ordinairement ſi réguliers, qu'un petit nombre de termes ſuffit pour trouver ce qu'on veut ſavoir, à peu près avec autant de préciſion que ſi l'opération étoit continuée à l'infini. Pour s'en convaincre on n'a qu'à jetter les yeux ſur les quatre ou cinq premiers termes du quotient.

Pour donner un autre exemple de cette eſpéce de diviſion, je demande le quotient que donnera l'unité diviſée par la quantité $1-2x+xx$. Voici quel ſera le réſultat de l'opération:

$$
\begin{array}{l}
1-2x+xx\,)\;1\;\;*\;\;*\;\;*\;\;*\;\;(1+2x+3xx+4x^3+5x^4\;\&c.\\
\quad\;\;1-2x+xx\\
\quad\;\;\overline{}\\
\quad\;\;*+2x-xx\\
\quad\;\;+2x-4xx+2x^3\\
\quad\;\;\overline{}\\
\quad\;\;\;\;*+3xx-2x^3\\
\quad\;\;\;\;+3xx-6x^3+3x^4\\
\quad\;\;\;\;\overline{}\\
\quad\;\;\;\;\;\;*+4x^3-3x^4\\
\quad\;\;\;\;\;\;+4x^3-8x^4\\
\quad\;\;\;\;\;\;\overline{}\\
\quad\;\;\;\;\;\;\;\;*+5x^4\\
\quad\;\;\;\;\;\;\;\;+5x^4.
\end{array}
$$

1. Les quatre étoiles annexées à l'unité qui ſert de dividende, marquent que cette diviſion, quoique pouvant aller à l'infini, ne ſera cependant point portée ici plus loin que la quatriéme puiſſance de x.

2. La régularité du quotient $1+2x+3xx+4x^3+5x^4$, ne laiſſe aucun lieu de douter que les termes ſuivans ne ſoient $+6x^5+7x^6+8x^7$, &c. à l'infini.

3. Si les quotiens ſont réguliers, les reſtes le ſeront auſſi: ainſi dans le cas préſent les reſtes ſont $2x-1x^2$, $3x^2-2x^3$, $4x^3-3x^4$, $5x^4-4x^5$; mais de ce dernier reſte, la partie qui termine la ſuite, ſavoir $-4x^5$, doit être négligée, comme inutile: nous en diſons autant de tous les autres termes qui ſont dans le même cas, ſoit qu'il s'agiſſe de multiplication, de diviſion, d'extraction de racines, ou d'une autre opération quelconque.

Examinons préſentement la diviſion précédente par le moyen de la multiplication, c'eſt-à-dire, que le quotient $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$ ſoit multiplié par le diviſeur $1-2x+xx$, & voyons ſi le produit ſera $1\;*\;*\;*\;*$; car comme le quotient n'eſt point réel au-delà de cinq termes,

mes, il ne faut pas s'attendre que le produit ſoit réel pour un nombre de termes plus grand. Voycz l'opération, dans laquelle la multiplication s'eſt faite de la gauche à la droite:

$$\begin{array}{l} 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4 \\ 1-2x+x^2 \\ \hline 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4 \\ \quad -2x-4x^2-6x^3-8x^4 \\ \qquad\quad +x^2+2x^3+3x^4 \\ \hline 1\quad *\quad *\quad *\quad *. \end{array}$$

Il y a encore une autre méthode de faire ces multiplications, que je donnerai ici, moins pour le grand uſage dont elle eſt dans de pareils cas, qu'à cauſe qu'elle peut ſervir à éclaircir la règle d'*Oughtred* ſur la manière d'abréger la multiplication. Cette règle ſe trouve dans le Chap. 4 de ſa *Clavis* &c.

Ici le Multiplicateur doit être diſpoſé dans un ordre oppoſé à celui ſuivant lequel il étoit rangé auparavant, c'eſt-à-dire, que la place des unités doit être au-deſſous de la puiſſance du Multiplicande, qu'on a deſſein de mettre à la fin du produit; comme dans le préſent cas 1 doit ſe trouver au-deſſous de $5x^4$:

$$\begin{array}{l} 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4 \\ \qquad\qquad x^2-2x+1. \end{array}$$

Le Multiplicateur & le Multiplicande étant placés ainſi, chaque terme du Multiplicateur doit commencer par multiplier ce terme du Multiplicande au-deſſous duquel il ſe trouve, & enſuite tous les autres termes en allant vers la gauche; ainſi 1 doit multiplier $5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$; mais le terme ſuivant du Multiplicateur, ſavoir $-2x$, doit multiplier ſeulement $4x^3+3x^2+2x+1$; & le dernier terme du Multiplicateur, ſavoir xx, doit multiplier uniquement $3xx+2x+1$, comme on le voit ici:

$$\begin{array}{l} 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4 \\ \qquad\qquad x^2-2x+1 \\ \hline 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4 \\ \quad -2x-4x^2-6x^3-8x^4 \\ \qquad\quad +x^2+2x^3+3x^4 \\ \hline 1\quad *\quad *\quad *\quad * \end{array}$$

N. B.

N. B. Dans l'application de cet exemple à la règle d'*Ougthred*, il faut faire x égal à $\frac{1}{10}$, xx à $\frac{1}{100}$, &c.

Je ne pouvois guéres dire moins que je n'ai fait concernant la diviſion, pour donner au jeune Algébriſte une notion paſſable de cette opération; mais ſi j'en avois dit davantage, & que j'euſſe entré dans le détail de tous les cas particuliers qui peuvent avoir lieu en fait de diviſion litérale, je lui aurois rempli la tête d'idées abſtraites, qu'il auroit ſurement oubliées avant d'avoir eu occaſion d'en faire uſage. C'eſt par la même raiſon que je ne m'étendrai point préſentement ſur l'invention des diviſeurs, la doctrine des quantités irrationelles, la réduction des racines ſourdes, & quelques autres choſes de même nature, attendant à l'égard de chacune de ces matiéres que l'occaſion d'en parler ſe rencontre en chemin faiſant; & c'eſt-là l'unique méthode que j'obſerverai à leur égard.

De la Proportion en Nombres.

15. La règle de proportion en Algébre différe ſi peu de la règle de proportion en Arithmétique vulgaire, qu'il ſuffira d'en indiquer un ſeul exemple. On demande: *Si* a *donne* b, *qu'eſt-ce que* c *donnera*? Ici le ſecond & le troiſiéme terme, multipliés l'un par l'autre, produiſent bc, & le quotient de ce produit diviſé par le premier terme a ne ſauroit être exprimé autrement que par la fraction $\frac{bc}{a}$: c'eſt ce qui paroît manifeſtement par ce qui a été dit des fractions dans l'Artic. 13. Mais comme j'ai évité juſqu'ici à deſſein toute idée de proportion, aimant mieux en appeller ſur ce ſujet aux notions communes que tout le monde en a, ou croit en avoir, que d'entamer trop tôt une matiére aſſez difficile, je penſe qu'à-préſent que le Lecteur a déjà fait certains progrès, il eſt tems que j'explique diſtinctement la nature de la proportion rélativement aux nombres, & que je faſſe voir en quoi elle conſiſte.

Suivant *Euclide*, quatre nombres ſont appellés proportionels, ou, ce qui revient au meme, le premier nombre eſt dit avoir la même raiſon au ſecond, que le troiſiéme a au quatriéme; ou le premier eſt dit être au ſecond, comme le troiſiéme eſt au quatriéme, quand le premier nombre eſt le même multiple, la même partie ou les mêmes parties du ſecond, que le troiſiéme eſt du quatriéme: mais on demandera peut-être: Comment pouvons-nous ſavoir quelles parties, partie, ou multiple un nombre quelconque eſt d'un autre? A quoi je réponds, qu'on peut le ſavoir par une fraction, dont le Numérateur eſt le premier nombre, & le Dénominateur le ſecond: ainſi la fraction $\frac{3}{4}$ marque expreſſément que le Nu-

Numérateur 2 contient les deux tiers du Dénominateur 3 ; car on ne ſauroit douter, que 1 ne ſoit $\frac{1}{3}$ de trois, & par conſéquent que 2 ne ſoient les $\frac{2}{3}$ de ce même nombre : par la même raiſon la fraction $\frac{12}{4}$ marque que le nombre 12 eſt $\frac{12}{8}$ ou $\frac{3}{2}$ du nombre 8 ; & enfin la fraction $\frac{12}{4}$ marque que le nombre 12 eſt $\frac{12}{4}$ du nombre 4, ou, ce qui revient au même, contient exactement 3 fois le nombre 4, & par conſéquent, que 12 eſt un multiple de 4, puiſqu'il le contient juſte 3 fois ſans aucun reſte : ainſi pour tout homme qui eſt au fait des fractions, la définition de proportion donnée par Euclide pourroit être exprimée plus clairement ainſi : *Quatre nombres s'appellent proportionels, quand une fraction dont le Numérateur eſt le premier nombre & le Dénominateur le ſecond, eſt égale à une fraction dont le Numérateur eſt le troiſième nombre, & le Dénominateur le quatrième.* Ainſi 2 ſont à 3 comme 4 à 6, à cauſe que $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$; ainſi 12 ſont à 8 comme 15 à 10, à cauſe que $\frac{12}{8}=\frac{15}{10}$, ces deux fractions pouvant également ſe réduire à $\frac{3}{2}$; ainſi 2 ſont à 6 comme 4 ſont à 12, à cauſe que $\frac{2}{6}=\frac{4}{12}$, & que chacune de ces fractions eſt $=\frac{1}{3}$; enfin 6 ſont à 2, comme 12 à 4, à cauſe que $\frac{6}{2}=\frac{12}{4}=3$.

Cette idée de proportionalité peut ſervir à démontrer un théorême de grand uſage en Algébre, qui eſt, *Que toutes les fois que quatre nombres ſont proportionels, le produit des extrêmes multipliés l'un par l'autre ſera égal au produit des deux termes du milieu multipliés de même.* Suppoſons, par exemple, que a ſoit à b comme c eſt à d ; je dis en ce cas, que ad produit des extrêmes, ſera égal à bc produit des termes du milieu : car puiſque a eſt à b comme c eſt à d, il ſuit de ce qui a déjà été prouvé, que la fraction $\frac{a}{b}$ eſt égale à la fraction $\frac{c}{d}$: multipliez l'un & l'autre terme de la fraction $\frac{a}{b}$ par d, & les deux termes de la fraction $\frac{c}{d}$ par b (multiplication qui ne change rien aux valeurs des fractions) & vous aurez $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$; c'eſt-à-dire, le quotient de ad diviſé par bd, eſt égal au quotient de bc diviſé par bd ; donc ad doit être égal à bc, c'eſt-à-dire, le produit des extrêmes doit être égal au produit des termes du milieu. *C. Q. F. D.*

L'inverſe de cette propoſition eſt véritable auſſi, ſavoir, que *Toutes les fois qu'on a une équation en nombres, dans laquelle le produit de deux nombres d'un côté ſe trouve égal au produit de deux nombres de l'autre, une pareille équation peut ſe réſoudre en quatre proportionelles, en formant des deux qui compoſent l'un des produits, les extrêmes, & de ceux qui compoſent l'autre produit, les termes du milieu.* Soit, par exemple $ad=bc$; en faiſant de

a &

Digitized by Google

a & de d les extrêmes, & de b & c les termes du milieu, nous aurons a à b, comme c à d; ſi on le nie, que a ſoit à b, comme c à e; alors nous aurons $ae=bc$; mais par l'hypothéſe $ad=bc$; dono $ae=ad$; donc e eſt égal à d & a eſt à b, comme c eſt à d. *C. Q. F. D.*

Corollaire.

Il ſuit de ce que nous venons de dire, que ſi a, b & c, ſont en proportion continue, c'eſt-à-dire, ſi a eſt à b comme b eſt à c, on a $b^2=ac$: & de plus, ſi $b^2=ac$, que les quantités a, b, c, ſont en proportion continue.

Les propriétés communes de la proportionalité en nombres démontrées.

16. De ce qui eſt dit dans le dernier Article, on peut déduire aiſément les preuves de la plupart des propriétés communes des nombres proportionels. J'ai deſſein de raſſembler les plus utiles de ces propriétés dans cet Article, auquel le Lecteur pourra avoir recours, quand il croira en avoir beſoin.

Premiérement donc, à l'aide de ce qui vient d'être prouvé, on peut démontrer clairement la règle de trois, qui conſiſte à trouver une quatriéme proportionelle; car ſoient a, b & c trois nombres donnés, & qu'il s'agiſſe de trouver d, quatriéme terme proportionel; en ce cas, puisque a eſt à b comme c eſt à d, on aura ad produit des extrêmes, égal à bc, produit des termes du milieu: diviſez les deux membres de l'équation par a, & vous aurez $d=\frac{bc}{a}$, ce qui revient au même que ſi on diſoit, Quand trois nombres ſont donnés, on peut trouver un quatriéme nombre proportionel, en multipliant le ſecond & le troiſiéme de ces nombres l'un par l'autre, & en diviſant le produit par le premier.

Dans la règle de trois inverſe, les nombres peuvent être encore a, b & c: mais tout homme qui fera attention à la nature de cette règle, s'appercevra facilement que le quatriéme nombre cherché n'eſt pas un quatriéme terme proportionel aux trois nombres donnés tels qu'ils ſont rangés dans l'ordre a, b, c, mais tels qu'ils ſont dans l'ordre c, b, a, ou c, a, b, & par conſéquent, en ce cas le quatriéme nombre ſera $\frac{ab}{c}$.

2°. Si deux proportions ſont égales à une troiſiéme, il faut qu'elles ſoient égales entre elles, à cauſe que deux fractions ne ſauroient etre égales à une troiſiéme, ſans l'etre entre elles: par exemple, ſi a eſt à b, comme c eſt à d, & que c ſoit à d, comme e eſt à f, nous aurons a à b, comme e à f.

3°. Si a eſt à b, comme c eſt à d; en ce cas b ſera à a, comme d eſt à c; ce qui s'appelle une proportion inverſe: car ſi a eſt à b, comme c eſt à d, nous aurons $ad=bc$; faites de b & de c les extrêmes, & vous aurez b à a, comme d à c.

4°. Si a à eſt b, comme c à d, nous aurons (*alternando*) a à c, comme b à d: car puiſque a eſt à b, comme c à d, & par conſéquent $ad=bc$, faites de a & de d les extrêmes, & de c & b les termes moyens, & vous aurez a à c comme b à d.

5°. Si a eſt à b, comme c à d, & qu'on prenne deux Multiplicateurs quels qu'ils ſoient, comme e & f; je dis que ea eſt à fb, comme ec à fd: car puiſque a eſt à b, comme c à d, & par conſéquent $ad=bc$; ſi l'on multiplie les deux membres de l'équation par le produit ef, on aura $ad\times ef=bc\times ef$; mais $ad\times ef=ea\times fd$, & $bc\times ef=fb\times ec$; donc $ea\times fd=fb\times ec$; faites de ea & de fd les extrêmes, & vous aurez ea eſt à fb, comme ec eſt à fd. On peut démontrer de même (*mutatis mutandis*) que ſi a eſt à b, comme c eſt à d, on aura $\frac{a}{e}$ à $\frac{b}{f}$ comme $\frac{c}{e}$ à $\frac{d}{f}$.

6°. Si a eſt à b, comme c eſt à d, il s'enſuit que a^2 eſt à b^2, comme c^2 eſt à d^2; car a étant à b comme c eſt à d, & par cela même $ad=bc$, il ſuffit d'élever au quarré les deux membres de l'équation, pour avoir $a^2d^2=b^2c^2$: faiſant de a^2 & de d^2 les deux extrêmes, il en réſulte cette proportion, a^2 eſt à b^2, comme c^2 à d^2. En revenant ſur nos pas nous trouverons pareillement, que ſi a^2 eſt à b^2, comme c^2 eſt à d^2, il faut que a ſoit à b, comme c eſt à d, & $\sqrt{a}$ à $\sqrt{b}$, comme $\sqrt{c}$ à $\sqrt{d}$.

7°. Si a eſt à b, comme c eſt à d, (*componendo*) $\overline{a+b}$ eſt à b, comme $\overline{c+d}$ eſt à d; ou $\overline{a+b}$ eſt à a, comme $\overline{c+d}$ eſt à c: car puiſque a eſt à b, comme c eſt à d, & par conſéquent $ad=bc$, on n'a qu'à ajoûter bd à chaque membre de l'équation, & on aura $ad+bd=bc+bd$; mais $ad+bd$ eſt le prodnit $\overline{a+b}$ multiplié par d; & $bc+bd$ eſt le produit de b multiplié par $\overline{c+d}$; donc $\overline{a+b}\times d=b\times\overline{c+d}$; faites de $\overline{a+b}$ & de d les extrêmes, & vous aurez $\overline{a+b}$ à b, comme $\overline{c+d}$ eſt à d. De plus, puiſque $bc=ad$, ajoûtés ac des deux côtés, & vous aurez $ac+bc=ac+ad$, c'eſt-à-dire, $\overline{a+b}\times c=a\times\overline{c+d}$; faites de $\overline{a+b}$ & de c les extrêmes, & vous aurez $\overline{a+b}$ à a, comme $\overline{c+d}$ à c.

8°. Si a eſt à b, comme c eſt à d, (*dividendo*) $\overline{a-b}$ ſera à b, comme

me $\overline{c-d}$ eſt à d; ou $\overline{a-b}$ eſt à a, comme $\overline{c-d}$ eſt à c. Cette propoſition ſe démontre par la ſouſtraction, préciſément comme la propoſition précédente l'a été par l'addition.

9°. Si à deux nombres qui ſont entre eux dans une certaine proportion, l'on ajoûte deux nombres qui ſoient dans la même proportion, ou bien, ſi l'on ſouſtrait de deux nombres deux autres nombres, qui ayent entre eux la même proportion que les nombres dont ils ont été ſouſtraits, les ſommes ou les reſtes ſeront dans la même proportion que les nombres premiérement propoſés: par exemple, ſi les nombres c & d ſont entre eux comme a & b, c'eſt-à-dire, ſi a eſt à b, comme c eſt à d, & qu'on ajoûte aux deux premiers nombres les derniers, ou qu'on les en retranche, on aura non ſeulement $\overline{a+c}$ à $\overline{b+d}$ comme a à b, mais auſſi $\overline{a-c}$ à $\overline{b-d}$, comme a à b: car puiſque par la ſuppoſition, a eſt à b, comme c eſt à d, (*alternando*) a eſt à c, comme b à d; & (*componendo*) $a+c$ eſt à a, comme $b+d$ à b; & encore (*alternando*) $a+c$ eſt à $\overline{b+d}$, comme a eſt à b: de même (*alternando* & *dividendo*) nous aurons $\overline{a-c}$ à $\overline{b-d}$, comme a eſt à b.

10°. S'il y a trois nombres a, b & c, & trois autres nombres d, e & f, en même proportion que les premiers, & rangés dans le même ordre, c'eſt-à-dire, ſi a eſt à b, comme d eſt à e, & que b ſoit à c, comme e eſt à f; je dis, que par égalité de raiſon, les extrêmes ſeront dans la même proportion, ſavoir, que a ſera à c, comme d eſt à f: car puiſque par la ſuppoſition, a eſt à b, comme d eſt à e, (*alternando*) a eſt à d, comme b eſt à e; & pareillement, puiſque b eſt à c, comme e eſt à f, nous aurons b à e, comme c à f: puis donc que a eſt à d, comme b à e, & b à e, comme c à f; il ſuit de la ſeconde propoſition, que a eſt à d, comme c à f; & (*alternando*) a à c, comme d à f.

11°. S'il y a trois nombres a, b & c, & trois autres nombres d, e & f en même proportion que les premiers, mais dans un ordre oppoſé, en ſorte que a ſoit à b comme e à f & b à c comme d à e; je dis que les extrêmes ſeront en proportion, ſavoir que a ſera à c comme d à f: car puiſque a eſt à b comme e à f, nous avons $af=be$; d'ailleurs puiſque b eſt à c comme d à e, nous avons $cd=be$; donc $af=cd$; faites de a & de f les extrêmes, & vous aurez a à c comme d à f.

N. B. S'il y a deux ſéries de nombres comme a, b, c, &c. d, e, f, &c. chaque ſérie étant compoſée du même nombre de termes, & que toutes les proportions entre les termes contigus dans une ſérie, ſoient reſpecti-

pectivement égales à toutes celles dans l'autre, c'eſt-à-dire, a à b, comme d à e, & b à c, comme e à f, &c. je dis, que les termes extrêmes d'une des ſéries ſeront proportionels aux termes extrêmes de l'autre: car la démonſtration de la dixiéme propoſition peut s'étendre à autant de termes qu'on voudra; & cette proportionalité des extrêmes découle de ce qu'on appelle une *égalité bien ordonnée*, à cauſe que l'égalité reſpective de toutes les proportions d'une ſérie à celle de leurs termes correſpondans dans l'autre eſt bien rangée. Que ſi chaque proportion dans une ſérie, a une proportion égale qui lui correſpond dans l'autre, mais pas préciſément dans le même ordre, par exemple, ſi a étoit à b, comme e à f, & b à c, comme d à e; en ce cas, quoique les extrêmes ſoient proportionels, comme on pourra s'en convaincre en continuant la démonſtration de cette onziéme propoſition, on déſigne cette proportionalité des extrêmes par les mots d'*égalité troublée*; c'eſt-à-dire, d'égalité de toutes les proportions dans une ſérie à toutes celles dans l'autre, mais mal rangée.

12°. Si a eſt à b, comme c à d, nous aurons $\overline{a+b}$ à $\overline{a-b}$, comme $\overline{c+d}$ eſt à $\overline{c-d}$: car puiſque a eſt à b, comme c à d, nous aurons (*componendo*) $\overline{a+b}$ à a, comme $\overline{c+d}$ à c; nous aurons auſſi (*dividendo*) $\overline{a-b}$ à a, comme $\overline{c-d}$ à c; & (*invertendo*) a à $\overline{a-b}$, comme c à $\overline{c-d}$: puis donc que nous avons $\overline{a+b}$ à a, comme $\overline{c+d}$ à c; & a à $\overline{a-b}$, comme c à $\overline{c-d}$, c'eſt-à-dire, puiſque nous avons trois nombres $\overline{a+b}$, a & $\overline{a-b}$, & trois autres nombres qui leur ſont proportionels dans le même ordre, ſavoir, $\overline{c+d}$, c & $\overline{c-d}$, il s'enſuit (*ex æquo*) que les extrêmes ſeront proportionels, c'eſt-à-dire que $\overline{a+b}$ ſera à $\overline{a-b}$, comme $\overline{c+d}$ eſt à $\overline{c-d}$.

13°. S'il y a une ſérie de nombres, k, l, m, n, dont k eſt à l, comme a à b, & l à m, comme c à d, & m à n, comme e à f, je dis que k le premier terme ſera à n le dernier, comme ace le produit de tous les autres antécédens à bdf le produit de tous les autres conſéquens: car k eſt à l, comme a eſt à b, par l'hypothéſe; & nous trouverons que a eſt à b, comme ace eſt à bce par la multiplication des extrêmes & par celle des termes moyens; ainſi k eſt à l comme ace à bce; & par la même raiſon, l eſt à m, comme bce à bde, & m eſt à n comme bde à bdf; donc (*ex æquo*) k eſt à n comme ace à bdf.

Com-

Comment on tire les racines quarrées des Quantités Algébraïques ſimples.

17. L'extraction de la racine quarrée d'une Quantité Algébraïque ſimple eſt ſi aiſée qu'il ſeroit inutile de s'y arreter. Ainſi la racine de aa eſt $+$ ou $-a$, la racine quarrée de $9aa$ eſt $+$ ou $-3a$, & celle de $4aabb$ eſt $+$ ou $-2ab$: c'eſt ce qui paroît clairement par la definition même de la racine quarrée; car la racine quarrée de quelque quantité, ſuppoſons de $4aabb$, eſt celle qui étant multipliée par elle-même produira $4aabb$: or la quantité $-2ab$ multipliée par elle-même produira $4aabb$, préciſément comme feroit $+2ab$; d'où il ſuit qu'une de ces quantités n'eſt pas moins la racine quarrée que l'autre.

Quand la racine quarrée d'une quantité ne peut être tirée, on déſigne la choſe par cette marque $\surd$: ainſi le $\surd 2aa$ ſignifie la racine quarrée de $2aa$; pareillement $\surd\overline{aa-4b}$ ſignifie la racine quarrée de toute la quantité $\overline{aa-4b}$; de même encore $\frac{\surd\overline{aa-4b}}{2a}$ déſigne une fraction dont le Numérateur eſt la racine quarrée de toute la quantité $\overline{aa-4b}$, & dont le Dénominateur eſt $2a$; enfin, $\surd\frac{4ab-a^3}{12a}$ ſignifie la racine quarrée de toute la fraction $\frac{4ab-a^3}{12a}$, c'eſt-à-dire, la racine quarrée tant du Numérateur que du Dénominateur.

Quand on ne ſauroit tirer exactement la racine quarrée de quelque quantite, on peut cependant quelquefois réſoudre cette quantité en deux autres, dont l'une ſera un quarré & l'autre point; & toutes les fois que cela eſt poſſible, la racine du quarré peut s'extraire, & le ſigne radical être mis au-devant de l'autre quantité: ainſi $12aa = 4aa \times 3$; donc $\surd 12aa = 2a \times \surd 3$.

Comment on tire les racines quarrées des Quantités Algébraïques compoſées.

18. L'extraction de la racine quarrée d'une Quantité Algébraïque compoſée reſſemble ſi fort à celle des nombres entiers dans l'Arithmétique ordinaire, particuliérement en cas de ſeries où la choſe eſt principalement néceſſaire, qu'on ſeroit en quelque ſorte fondé à croire, qu'un ſimple coup d'œil jetté ſur l'opération ſuffiroit pour faire voir à tout homme tant ſoit peu exercé au calcul des nombres de quelle maniére il doit s'y prendre; mais ſi cela ne ſuffit pas, voici quelques directions accompagnées d'un exemple.

On demande d'extraire la racine quarrée de cette quantité x^6+4x^5

$+10x^4+20x^3+25x^2+24x+16$: ici, je cherche d'abord le quarré du premier membre à la gauche, c'eſt-à-dire, de x^6, & je trouve que c'eſt x^3, que je mets au quotient: j'éléve enſuite au quarré x^3, & retranche x^6 de x^6, & il ne reſte rien. Je continue mon opération ſur les deux membres ſuivans, ſavoir, $4x^5+10x^4$, & je les diviſe par $2x^3$, qui eſt le double de la racine déjà placée au quotient, c'eſt-à-dire, je diviſe $4x^5$, premier membre de mon nouveau dividende, par $2x^3$, & le quotient eſt $2x^2$, que je mets au quotient après $2x^3$. Je multiplie enſuite la quantité $2x^3+2x^2$ par ſon dernier membre $2x^2$, & ſouſtrais le produit $4x^5+4x^4$ du dividende $4x^5+10x^4$, & il reſte $6x^4$: à ce reſte j'ajoûte les deux membres ſuivans $20x^3+25x^2$, & forme ainſi un nouveau dividende $6x^4+20x^3+25x^2$: je diviſe cette quantité par le double de la racine déjà trouvée, c'eſt-à-dire, par $2x^3+4x^2$, diviſant le premier membre de ce dividende par le premier membre de cette double racine, & le quotient eſt $+3x$, que j'ajoûte au quotient général & auſſi après le diviſeur $2x^3+4x^2$; puis multipliant tout ce quotient $2x^3+4x^2+3x$, par ſon dernier membre $3x$, le produit eſt $6x^4+12x^3+9x^2$, qui étant ſouſtrait du dernier dividende, laiſſe $8x^3+16x^2$; j'ajoûte à ce reſte les deux derniers membres $24x+16$, & trouve ainſi un nouveau dividende $8x^3+16x^2+24x+16$, que je diviſe par le double de la racine déjà trouvée, c'eſt-à-dire, par $2x^3+4x^2+6x$, & le quotient eſt $+4$; ce quotient étant mis au quotient général, & après le diviſeur $2x^3+4x^2+6x$ me donne la quantité $2x^3+4x^2+6x+4$, laquelle étant multipliée par ſon dernier membre 4, devient $8x^3+16x^2+24x+16$: or ſi je retranche cette derniére quantité du dernier dividende, il ne reſte rien; donc la racine totale eſt x^3+2x^2+3x+4. Voyez l'opération:

$$x^6+4x^5+10x^4+20x^3+25x^2+24x+16\,(x^3+2x^2+3x+4$$
$$x^6$$

$$2x^3+2x^2)\ *+4x^5+10x^4$$
$$+2x^2)\quad 4x^5+4x^4$$

$$2x^3+4x^2+3x)\ *+6x^4+20x^3+25x^2$$
$$+3x)\quad 6x^4+12x^3+9x^2$$

$$2x^3+4x^2+6x+4)\ *+8x^3+16x^2+24x+16$$
$$+4)\quad 8x^3+16x^2+24x+16$$

* * * *

Au-

Autrement ainſi.

$$x^6+4x^5+10x^4+20x^3+25x^2+24x+16 \;(x^3+2x^2+3x+4$$

x^6

$2x^3+2x^2$) $+4x^5+4x^4$

$2x^3+4x^2+3x$) $+6x^4$

$6x^4+12x^3+9x^2$

$2x^3+4x^2+6x+4$) $+8x^3+16x^2$

$8x^3+16x^2+24x+16$

Le dernier membre $+16$ de la quantité donnée étant un quarré, j'aurois pu commencer l'extraction à ce bout-là, & la racine auroit été la même qu'auparavant, mais dans un ordre contraire.

N. B. Par un nombre quarré j'entends un nombre qui admet une racine quarrée; ainſi la quantité -16 n'eſt pas un nombre quarré, puiſqu'il n'y a aucune racine, ſoit affirmative, ſoit négative, qui multipliée par elle-même puiſſe produire -16.

Pour donner encore un autre exemple, on demande d'extraire la racine quarrée de la quantité ſuivante, ou du moins d'en réduire la racine à l'expreſſion la plus ſimple, $12x^3-72x^2+108x$: comme aucun des extrêmes de cette quantité n'eſt un quarré, il faut lui donner une forme plus convenable de la maniére ſuivante; ſi $12x^3$ ſont diviſés par $12x$, le quotient xx ſera un nombre quarré: je diviſe donc le tout par $12x$, & le quotient eſt $xx-6x+9$; d'où j'infére, que $xx-6x+9$ étant multipliés par $12x$, le produit ſera la quantité propoſée, ſavoir, $12x^3-72x^2+108x$; donc par l'Art. 8. $\sqrt{12x^3-72x^2+108x}$ eſt égale à $\sqrt{xx-6x+9}$ multipliée par $12x$: mais $\sqrt{x^2-6x+9}$ étant tirée comme ci-deſſus, eſt $x-3$, ou $3-x$; & comme $12x=4\times 3x$, nous avons $\sqrt{12x}=2\times\sqrt{3x}$; donc, $\sqrt{12x^3-72x^2+108x}=x-3$ ou $3-x$, multipliés par $2\times\sqrt{3x}=2x-6$ ou $6-2x$ multipliés par $\sqrt{3x}$. Si la racine quarrée du multiplicande $xx-6x+9$, n'avoit pas pu ſe tirer autrement, il y auroit pourtant eu moyen de l'avoir par approximation, comme celle du binome de l'Article ſuivant.

Tirer la racine quarrée d'un binome par le moyen d'une ſuite infinie.

19. J'entends ici par un binome une quantité compoſée de deux quantités ſimples liées par le ſigne $+$ ou $-$, comme $a+b$, $1-z$, &c.:

or quoiqu'une pareille quantité ne puiſſe être exprimée par une ſuite finie de termes, elle peut l'être néanmoins par une ſuite infinie, comme dans les cas ſuivans.

1er Cas. La racine quarrée du binome $1+x$, ſuppoſant x moindre que l'unité, ſe trouve par l'opération ſuivante être $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+$ &c. La régularité de cette ſérie ne ſe remarque pas du premier coup d'œil; mais j'aurai ſoin de faire voir dans la ſuite de cet Ouvrage, que ces ſéries ſont auſſi réguliéres, & auſſi faciles à calculer que quelque autre que ce ſoit.

$$1+x \;*\;*\;*\;*\;*\;*\;*\;(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\text{&c.}$$

$$\frac{1}{2+\frac{x}{2})\;*\;+x}$$

$$+\frac{x}{2} \qquad x+\frac{x^2}{4}$$

$$2+x-\frac{x^2}{8})\;*\;-\frac{x^2}{4}$$

$$-\frac{x^2}{8} \qquad -\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{64}$$

$$2+x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{16})\;*\;+\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{64}$$

$$+\frac{x^3}{16} \qquad \frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}$$

$$2+x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}-\frac{5x^4}{128})\;*\;-\frac{5x^4}{64}$$

$$-\frac{5x^4}{128} \qquad -\frac{5x^4}{64}$$

Comme dans toutes ces ſéries, les puiſſances de x montent ou deſcendent réguliérement, on pourra tirer les racines, par le ſecours des ſeuls coëfficiens, & ſuppléer enſuite les puiſſances; mais il faut avoir ſoin alors de placer l'un ſous l'autre tous les termes du même genre, pour empêcher à cet égard qu'il ne ſe gliſſe quelque erreur dans l'opération.

Eſſayons préſentement ce que la racine ainſi trouvée nous donnera quand elle aura été multipliée par elle-même: mais avant que d'aller plus loin, j'avertirai le Lecteur, que comme cette racine ne s'étend point au-delà de la quatriéme puiſſance de x, on ne doit pas non plus s'attendre que le quarré de cette racine, quand elle aura été multipilée par elle-

elle-même, ſoit réel à un degré plus élevé; ainſi dans cette Multiplication toutes les puiſſances de x au-delà de la quatriéme puiſſance doivent être exclues du produit comme autant de termes inutiles. Cela étant, pour élever au quarré la quantité $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{128}x^4$, il faut la multiplier,

Premiérement par 1, & le produit ſera $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{128}x^4$ &c.
puis par $\frac{1}{2}x$, & le produit ſera $+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{32}x^4$ &c.
puis par $-\frac{1}{8}x^2$, & le produit ſera $-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{64}x^4$ &c.
puis par $\frac{1}{16}x^3$ & le produit ſera $+\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{32}x^4$ &c.
puis par $-\frac{1}{128}$ & le produit ſera $-\frac{1}{128}x^4$ &c.

ajoûtez ces quantités enſemble & la ſomme ſe trouvera être $1+x$ * * *

Comme en élevant cette racine au quarré, on n'a fait entrer en ligne de compte aucune des puiſſances de x au-delà de la quatriéme, de même en tirant la racine quarrée, il ne faut pas continuer l'opération plus loin que la puiſſance qui doit terminer la ſérie, c'eſt-à-dire, que toutes les autres puiſſances doivent être exclues de l'opération, ainſi qu'elles le ſont de la racine.

2d. Cas. On demande la racine quarrée du binome $1-z$: où z doit être plus petit que l'unité, ſans quoi $1-z$ ſe trouveroit une quantité négative, & ne ſauroit avoir de racine quarrée: mettez donc $-z$ au-lieu de x dans le cas précédent, & vous aurez $xx=+z^2$, $x^3=-z^3$, $x^4=+z^4$ &c.; $\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}z$, $-\frac{1}{8}x^2=-\frac{1}{8}z^2$, $+\frac{1}{16}x^3=-\frac{1}{16}z^3$, $-\frac{1}{128}x^4=-\frac{1}{128}z^4$ &c.: donc $\sqrt{1-z}=1-\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}z^2-\frac{1}{16}z^3-\frac{1}{128}z^4-$ &c.

3éme Cas. On demande la racine quarrée du binome $z+1$, ſuppoſant z plus grand que l'unité: ici quoique 1 ſoit un nombre quarré, par cela même que la racine doit être exprimée par une ſuite infinie convergente, la ſuite ne doit tirer ſon origine que de la plus grande partie du binome, c'eſt-à-dire, depuis z: diviſez donc la quantité $z+1$ par z, & le quotient ſera $1+\frac{1}{z}$, où $\frac{1}{z}$ ſera plus petit que 1, à cauſe que z eſt plus grand que l'unité: puis donc que $\frac{z+1}{z}$ eſt égal à $1+\frac{1}{z}$, il s'enſuit que $\sqrt{1+\frac{1}{z}}\times z=z+1$; par conſéquent $\sqrt{1+\frac{1}{z}}\times\sqrt{z}=\sqrt{z+1}$: mettez $\frac{1}{z}$ à la place de x dans le premier cas, & vous aurez $\sqrt{1+\frac{1}{z}}$ $=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{z}-\frac{1}{8}\times\frac{1}{z^2}+\frac{1}{16}\times\frac{1}{z^3}-\frac{5}{128}\times\frac{1}{z^4}$ &c. $=1+\frac{1}{2z}-\frac{1}{8z^2}$

$+\frac{1}{16z^3}-\frac{5}{128z^4}$ &c.: ſuppoſez cette ſérie continuée à l'infini, & vous aurez pour ſomme totale $\sqrt{z+1}=s\sqrt{z}$, c'eſt-à-dire, $s\times\sqrt{z}$.

4ème Cas. On demande d'exprimer par une ſuite infinie la racine quarrée du binome $a+b$: en ſuppoſant que a eſt la plus grande partie du binome: ici $\frac{a+b}{a}=1+\frac{b}{a}$ donc $\sqrt{1+\frac{b}{a}}\times a=a+b$; mais $\sqrt{1+\frac{b}{a}}$ par le premier cas eſt $1+\frac{b}{2a}-\frac{b^2}{8a^2}+\frac{b^3}{16a^3}-\frac{5b^4}{128a^4}$ &c.: ſuppoſez cette ſérie continuée à l'infini, & vous aurez $\sqrt{a+b}=s\sqrt{a}$.

Préparations pour la démonſtration de la règle par le moyen de laquelle on trouve le plus grand Diviſeur commun de deux nombres donnés.

20. Avant d'éclaircir par des exemples les différentes maniéres de réduire des fractions Algébraïques, je m'attacherai à donner quelques idées de la règle, par le moyen de laquelle on trouve la plus grande meſure commune, ou, ce qui revient au même, le plus grand commun diviſeur de deux nombres propoſés: règle fort utile pour les fractions ordinaires, & quelquefois auſſi en Algébre, quand tant le Numérateur que le Dénominateur d'une fraction ſont des quantités compoſées.

La choſe auroit déjà été faite ſi je n'avois pas craint qu'une pareille Démonſtration ne fût peut-être pas à la portée des commençans: & cette crainte ſubſiſte encore en partie: que s'ils la trouvent trop difficile, le meilleur avis que je puis leur donner, eſt de la paſſer, juſqu'à ce qu'à force d'attention & d'exercice leur imagination ſe ſoit plus familiariſée avec ces ſortes d'objets.

Pour faciliter l'intelligence de cette règle & de la Démonſtration qui y a rapport, je ferai précéder quelques définitions & quelques axiômes.

Déf. 1. *Un nombre eſt dit en meſurer un autre, quand il eſt exactement contenu dans cet autre ſans aucun ſurplus ou reſte.* Ainſi on peut dire que le nombre 3 meſure 12, à cauſe qu'il eſt contenu dans 12 exactement quatre fois.

2. *Un nombre s'appelle la meſure commune de deux autres, quand il les meſure tous deux.* Ainſi 3 eſt la meſure commune de 12 & de 21.

AXIOME 1.

Si une quantité en meſure une autre, & que cette autre en meſure une troiſiéme, en ce cas la premiére meſure la troiſiéme. Comme ſi le nombre 3 meſuroit 12, & que le nombre 12 meſurât 24, le nombre 3 meſurera 24.

AXIOME

Axiome 2.

Si un nombre eſt la meſure commune de deux autres, il ſera la meſure de leur ſomme & de leur différence. Ainſi le nombre 3, qui eſt la meſure commune de 12 & de 21, meſurera leur ſomme 33, & leur différence 9; car ſi le nombre 3 eſt contenu quatre fois dans 12, & ſept fois dans 21, il faut qu'il ſoit contenu onze fois dans leur ſomme, à cauſe que $4+7=11$; & qu'il ſoit contenu trois fois dans leur différence, à cauſe que $7-4=3$.

Axiome 3.

Si un nombre eſt diviſé par un autre, & qu'il y ait quelque reſte, ôtez ce reſte du dividende, & le diviſeur meſurera le reſte. Par exemple, ſi l'on diviſe 14 par 3, & qu'il reſte 2, ôtez 2 de 14, & le nombre 3 meſurera le reſte, qui eſt 12. Ce théorême peut s'exprimer d'une maniére générale en ces termes: *Si* a *eſt diviſé par* b, *& qu'il reſte* c, *alors* b *meſurera* $\overline{a-c}$.

La règle expliquée & démontrée.

21. Tout ceci poſé, je viens préſentement à la règle qu'il faut ſuivre pour trouver la plus grande meſure commune de deux nombres propoſés: Voici quelle eſt cette règle. *Soient* a *&* b *les deux nombres, dont il s'agit de trouver la meſure commune, ſavoir* a *le plus grand &* b *le plus petit: que* a *ſoit diviſé par* b, *& ſans s'embarraſſer du quotient, que le reſte ſoit* c; *alors diviſez* b *par* c, *& que le reſte ſoit* d; *diviſez alors* c *par* d, *& que le reſte ſoit* e; *enfin diviſez* d *par* e, *& qu'il n'y ait plus aucun reſte; je dis alors, que ce dernier diviſeur* c, *qui n'a point de reſte, ſera non ſeulement la meſure commune de* a *&* b, *mais auſſi la plus grande meſure commune dont ces nombres ſoient ſuſceptibles.*

Commençons par prouver que *e* eſt la meſure commune de *a* & de *b*; ce que je fais ainſi:

1. *e* meſure *d* par l'hypothéſe; & *d* meſure $\overline{c-e}$, par le troiſiéme axiôme, à cauſe que quand *c* étoit diviſé par *d*, le reſte étoit *e*; donc *e* meſure $\overline{c-e}$, par le premier axiôme; mais *e* ſe meſure lui-même; donc *e* meſure *e* & $\overline{c-e}$; mais la ſomme de *e* de $\overline{c-e}$ eſt *c*; donc *e* meſure *c*, par le ſecond axiôme.

2. Nous venons de prouver que *e* meſure *c*; mais *c* meſure $\overline{b-d}$; donc *e* meſure $\overline{b-d}$; mais *e* meſure *d* par l'hypothéſe; donc *e* meſure tant *d* que $\overline{b-d}$; mais la ſomme de *d* & de $\overline{b-d}$ eſt *b*; donc *e* meſure *b*.

3. Il

3. Il a été prouvé que e mesure b; & b mesure $\overline{a-c}$; donc e mesure $\overline{a-c}$; mais il a été prouvé auparavant, que e mesuroit c; donc e mesure tant c que $\overline{a-c}$; or la somme de c & de $\overline{a-c}$ est a; donc e mesure a. Ainsi nous avons démontré la premiére partie de notre assertion, qui étoit, que e est la mesure commune de a & de b.

En revenant à-présent sur nos pas, nous nous proposons de faire voir, que e est aussi la plus grande mesure commune des nombres a & b: si on le nie, supposons que f, plus grand que e, soit pourtant une mesure commune de a & de b, & voyons ce qui résultera de cette supposition.

1. f mesure b, & b mesure $\overline{a-c}$; donc f mesure $\overline{a-c}$; or f mesure a par l'hypothése; donc f mesure tant a que $\overline{a-c}$; mais la difference entre a & $\overline{a-c}$ est c; donc f mesure c par le second axiôme.

2. f mesure c, comme on vient de dire, & c mesure $\overline{b-d}$; donc f mesure $\overline{b-d}$; or f mesure b par la supposition; donc f mesure b & $\overline{b-d}$; mais * la différence entre b & $\overline{b-d}$ est d; donc f mesure d.

3. f mesure d, & d mesure $\overline{c-e}$; donc f mesure $\overline{c-e}$; mais f mesure c, comme il a déjà été prouvé; ainsi f mesure tant c & que $\overline{c-e}$; mais la différence entre c & $\overline{c-e}$ est e; donc f mesure e; c'est-à-dire, qu'une plus grande quantité en mesure une plus petite, ce qui est absurde; donc la supposition, que a & b pouvoient admettre une plus grande mesure commune que e, étoit fausse; car la vérité ne conduit jamais à une conséquence absurde; donc e est la plus grande mesure commune dont les deux nombres a & b soient susceptibles. C. Q. F. D.

N. B. Cette Démonstration est la même que celle d'*Euclide* tant soit peu changée, & peut servir d'échantillon de la subtilité d'esprit des Anciens.

L'Article 7. de l'Introduction contient un exemple de la règle précédente.

Corollaire.

1. Si en trouvant la plus grande mesure commune, nous ne pouvons point avoir de diviseur sans reste qu'en parvenant à l'unité, nous en devons conclurre que les nombres proposés sont *premiers entre eux*, c'est-à-dire tels,

* *Mais la différence entre* b & b−d *est* d.] Ceux qui auront quelque peine à concevoir ceci, se ont bien de se rappeller, que la différence de deux quantités se trouve par la soustraction, & que pour soustraire une quantité de l'autre, il n'y a qu'à l'y ajoûter avec des signes contraires: ainsi pour soustraire $b-d$ de b, je n'ai qu'à ajoûter à b, $-b+d$; & comme b & $-b$ se détruisent, il me restera d.

tels, qu'ils n'admettent aucune autre meſure que l'unité: car *comme tout nombre eſt appellé nombre premier, quand il n'admet aucun autre diviſeur que lui-même & l'unité; ainſi deux nombres ſont dits premiers entre eux, quand ils n'admettent que l'unité comme diviſeur commun.*

2. *Tout nombre qui en meſure deux autres, meſurera auſſi leur plus grand diviſeur commun:* c'eſt ainſi que dans la ſuppoſition que le nombre f meſuroit a & b, nous avons prouvé qu'il meſuroit pareillement e, leur plus grande meſure commune.

Les différentes règles données au ſujet des Fractions éclaircies par des exemples en Quantités Algébraïques.

22. Les fractions ſe manient en Algébre préciſément comme dans l'Arithmétique ordinaire. C'eſt ce qui paroîtra par les exemples ſuivans.

Exemples de la maniére de réduire des Fractions compoſées à de plus ſimples termes. Voyez Introd. Art. 7.

La fraction $\frac{4ab}{6bc}$, ſi l'on diviſe le Numérateur & le Dénominateur par la même quantité $2b$, ſera réduite à la fraction $\frac{2a}{3c}$, qui eſt de même valeur que la premiére, mais exprimée plus ſimplement: d'où nous inférons, que toutes les fois qu'une même lettre ſe trouve dans chaque membre du Numérateur & du Dénominateur, elle peut être effacée par-tout ſans altérer en rien la valeur de la fraction: ainſi la fraction $\frac{ac+bc}{cd+ce}$, ſi l'on effacе c, devient $\frac{a+b}{d+e}$, & eſt la même en valeur que la premiére; mais s'il y a quelque membre où le Multiplicateur en queſtion ne ſe trouve pas, il ne faut l'effacer nulle part: ainſi la fraction $\frac{ac+bc}{cd+e}$, ne ſauroit être réduite à de plus ſimples termes, à cauſe que la quantité e n'eſt point multipliée par c.

N. B. Effacer ici n'eſt pas ſouſtraire, mais diviſer: ainſi effacer la lettre b dans la quantité ab, qu'on réduit par cette opération à n'être plus ſimplement que a, n'eſt pas ſouſtraire b de ab, mais diviſer ab par b, ce qui donne pour quotient a.

Exemples des Fractions réduites à la même dénomination. Voyez Intr. Art. 8.

1. Les fractions $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{3}$ & $\frac{c}{4}$, étant réduites à la même dénomination, ſeront $\frac{12a}{24}$, $\frac{8b}{24}$ & $\frac{6c}{24}$. 2. Les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ réduites de-mê-

me, ſeront $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$. 3. Les fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$, $\frac{t}{u}$ & $\frac{x}{y}$, après leur réduction, ſe trouveront être $\frac{psuy}{qsuy}$, $\frac{qruy}{qsuy}$, $\frac{qsty}{qsuy}$ & $\frac{qsux}{qsuy}$. Et il eſt bon d'obſerver ici que la règle preſcrite pour cette réduction, ſe démontre préſentement elle-même: car on voit clairement dans l'exemple propoſé, que toutes ces fractions, quoique réduites ſous une autre forme, conſervent néanmoins leurs premiéres valeurs; c'eſt ainſi que la premiére fraction $\frac{psuy}{qsuy}$ ſe trouve, ſi l'on efface les Multiplicateurs communs, réduite à $\frac{p}{q}$, ſa premiére valeur; & la même remarque eſt applicable à toutes les autres. Au reſte, cet exemple comprend une démonſtration proprement dite, par cela même qu'il eſt exprimé en termes généraux. 4. Les fractions $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ & $\frac{1}{c}$, réduites à la même dénomination, deviennent $\frac{bc}{abc}$, $\frac{ac}{abc}$ & $\frac{ab}{abc}$. 5. Enfin $\frac{1}{a+b}$ & $\frac{1}{a-b}$, après la réduction dont il s'agit, deviennent $\frac{a-b}{aa-bb}$ & $\frac{a+b}{aa-bb}$: car le nombre 1, Numérateur de la premiére fraction, multiplié par $a-b$, Dénominateur de la ſeconde, fait $a-b$; & pareillement 1, Numérateur de la ſeconde fraction, multiplié par $a+b$, Dénominateur de la premiére, fait $a+b$; & le produit des deux Dénominateurs $a+b$ & $a-b$, multipliés l'un par l'autre, eſt $aa-bb$, comme dans le quatriéme exemple de l'Art. 9. de l'Introduction.

Exemples d'Addition en fractions. Voyez Introd. Art. 9.

1. Les fractions $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ & $\frac{-c}{2}$, ajoûtées enſemble font $\frac{a+b-c}{2}$.

2. La fraction $\frac{a+b}{2}$ ajoûtée à $\frac{a-b}{2}$, fait $\frac{2a}{2}$ ou a.

3. Les fractions $\frac{a}{2}$, $\frac{-b}{3}$ & $\frac{+c}{4}$, ajoûtées enſemble font $\frac{12a-8b+6a}{24}$.

4. La fraction $\frac{a}{b}$ ajoûtée à la fraction $\frac{c}{d}$ fait $\frac{ad+bc}{bd}$.

5. a ajoûté à $\frac{b}{c}$, c'eſt-à-dire, $\frac{a}{1}$ ajoûté à $\frac{b}{c}$ fait $\frac{ac+b}{c}$.

6. $\frac{1}{a}$ ajoûté à $-\frac{1}{b}$ fait $\frac{b-a}{ab}$.

7. Les fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$, $\frac{t}{u}$ & $\frac{x}{y}$, ajoûtées enſemble, font $\frac{psuy+qruy+qsty+qsux}{qsuy}$.

8.

8. $\frac{a}{b}$ ajoûté à $\frac{1}{c}$ donne $\frac{ac+b}{bc}$.

9. $\frac{1}{a+b}$ ajoûté à $\frac{1}{a-b}$ donne $\frac{2a}{aa-bb}$. Voyez le 5ème exemple des fractions réduites à la même dénomination.

Exemples de Souſtraction en Fractions. Voyez Introd. Art. 10.

Premiérement, ſi les ſignes, tant du Numérateur que du Dénominateur, ſont changés, ce qui n'eſt autre choſe que la multiplication de l'un & l'autre de ces termes par -1, la valeur de la fraction reſtera la même.

En ſecond lieu, le Dénominateur d'une fraction eſt toujours ſuppoſé affirmatif; & toutes les fois qu'il arrive que cela n'eſt pas, il faut le rendre affirmatif en changeant les ſignes des deux termes.

En troiſiéme lieu, $+\frac{a}{b}$ & $-\frac{a}{b}$ ſont la même choſe que $\frac{+a}{+b}$ & $\frac{-a}{-b}$, comme il paroît par la nature même de la diviſion: la ſeule différence conſiſte en ce que quelquefois cette derniére façon de marquer ces quantités eſt plus commode que la premiére.

En quatriéme lieu, il ſuit de l'Article précédent, que le ſigne du Numérateur eſt le ſigne de toute la fraction; & que quand on donne au Numérateur un autre ſigne, c'eſt préciſément comme ſi on en donnoit un autre à la fraction même.

En cinquiéme lieu, quand il faut ſouſtraire une fraction Algébraïque d'une autre, la meilleure méthode eſt de changer le ſigne du Numérateur de la fraction qu'il eſt queſtion de ſouſtraire, & de la placer après l'autre, & puis de réduire les deux fractions à une ſeule: car ſi l'on différe la ſouſtraction juſqu'à ce que la réduction ſoit faite, on pourroit ſe tromper, & ſouſtraire ce qui doit reſter. Ainſi

1°. $\frac{4b}{5}$ étant ſouſtrait de $\frac{2a}{3}$, il reſte $\frac{2a}{3} - \frac{4b}{5} = \frac{10a-12b}{15}$.

2°. $\frac{r}{s}$ étant ſouſtraits de $\frac{p}{q}$, il reſte $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps-qr}{qs}$.

3°. $\frac{b}{c}$ étant ſouſtrait de a, il reſte $\frac{a}{1} - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}$.

4°. $\frac{1}{a+b}$ étant ſouſtrait de $\frac{1}{a-b}$, il reſte $\frac{1}{a-b} \frac{-1}{a+b} = \frac{2b}{aa-bb}$.

Exemples de Multiplication en fractions.

La multiplication des fractions ſe fait, en multipliant le Numérateur & le Dénominateur du Multiplicande par le Numérateur & par le Dénominateur du Multiplicateur reſpectivement.

Ainſi 1°. $\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$.

2°. $\frac{3p}{4q} \times \frac{5q}{6r} = \frac{15pq}{24qr} = \frac{5p}{8r}$.

3°. $\frac{a}{b} \times c$ ou $\frac{a}{b} \times \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}$.

4°. $\frac{a}{b} \times b = \frac{ab}{b} = a$.

5°. $\frac{3a}{4b} \times 20b = \frac{60ab}{4b} = 15a$.

6°. $\frac{4a}{5} \times \frac{7}{8a} = \frac{28a}{40a} = \frac{7}{10}$.

7°. $\frac{3a}{4b} \times \frac{3a}{4b} = \frac{9aa}{16bb}$.

8°. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$.

9°. $\overline{a + \frac{b}{c}} \times d$, ou $\frac{\overline{ac+b}}{c} \times \frac{d}{1} = \frac{acd+bd}{c}$.

10°. $\overline{d + \frac{e}{f}} \times \frac{g}{b}$, ou $\frac{df+e}{f} \times \frac{g}{b} = \frac{dfg+eg}{fb}$.

11°. $\overline{a + \frac{b}{c}} \times \overline{d + \frac{e}{f}}$, ou $\frac{ac+b}{c} \times \frac{df+e}{f} = \frac{acdf+ace+bdf+be}{cf}$.

Cette derniére multiplication pouvoit auſſi ſe faire ainſi:

$$d + \frac{e}{f}.$$

$$a + \frac{b}{c}$$

$$\overline{ad + \frac{ae}{f} + \frac{bd}{c} + \frac{be}{cf}}.$$

12°. $\overline{a + \frac{b}{c}} \times \overline{a + \frac{b}{c}} = \frac{aacc+2abc+bb}{cc}$.

Ou $aa + \frac{2ab}{c} + \frac{bb}{cc}$. Voyez l'opération.

$$a + \frac{b}{c}.$$

$$a + \frac{b}{c}.$$

$aa +$

$$\overline{aa+\frac{ab}{c}+\frac{bb}{cc}}$$
$$+\frac{ab}{c}.$$
$$\overline{aa+\frac{2ab}{c}+\frac{bb}{cc}}$$

Exemples de Diviſion en fractions.

La Diviſion en fractions ſe fait en multipliant les termes directs du dividende par les termes inverſes du diviſeur: ainſi,

1. $\frac{r}{s}) \frac{p}{q} (\frac{ps}{qr}$.
2. $\frac{b}{c}) \frac{1}{a} (\frac{c}{ab}$.
3. $\frac{1}{c}) \frac{a}{b} (\frac{ac}{b}$.
4. $c) \frac{a}{b} (\frac{a}{bc}$.
5. $\frac{1}{c}) \frac{ab}{c} (\frac{abc}{c}$, ou ab.
6. $\overline{d+\frac{e}{f}}) a+\frac{b}{e} (\frac{acf+bf}{cdf+ce}$.
7. $\sqrt{b}) \sqrt{a} (\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$: car ſi l'on fait $x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ on aura $xx = \frac{a}{b}$, & $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Je n'ajoûterai plus qu'un exemple, qui ſera rélatif à la règle de proportion: *Si* $\frac{a}{b}$ *donne* $\frac{c}{d}$, *que donnera* $\frac{e}{f}$? Réponſe, $\frac{bce}{adf}$; car $\frac{c}{d}$ le ſecond nombre multiplié par $\frac{e}{f}$ le troiſiéme, produit $\frac{ce}{df}$; & cette quantité diviſée par le premier membre $\frac{a}{b}$ donne pour quotient $\frac{bce}{adf}$.

Des Equations en Algébre, & particuliérement des Equations ſimples. Comment on réſout ces Equations.

23. Une équation en Algébre eſt une propoſition dans laquelle une quantité eſt déclarée égale à une autre, ou dans laquelle une expreſſion d'une quantité eſt déclarée égale à une autre expreſſion de la même quantité; comme, par exemple $\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$; où $\frac{3}{4}$ forment un côté de l'équation, & $\frac{1}{2}$ l'autre côté.

Une équation du ſecond degré eſt une équation compoſée de trois différentes ſortes de quantités; l'une, dans laquelle ſe trouve le quarré de la quantité inconnue; l'autre, où ſe trouve la premiére puiſſance de

cette même inconnue; & une troiſiéme, où l'inconnue ne ſe trouve abſolument point: comme ſi $xx-2x=3$, & que x fût la quantité inconnue.

Si le terme où ſe trouve la premiére puiſſance de x, comme $-2x$, ou celle qu'on nomme le terme abſolu, ſavoir 3, manquoit, l'équation ſeroit toujours du ſecond degré quoique incomplette. A-la-vérité, quelques Algébriſtes rangent cette derniére ſorte d'équations ſous la dénomination d'équations ſimples; & nous en ferons de-même, à cauſe de la facilité qu'il y a à les réſoudre, quoique, à proprement parler, une équation ſimple ſoit celle dans laquelle ſe trouve une ſimple puiſſance de la quantité inconnue, à l'excluſion de toute autre; comme $3x=6$ $2x+3=4x-5$, &c.

L'uſage de ces équations eſt de repréſenter plus diſtinctement les conditions des Problêmes, quand, au-lieu d'employer le langage ordinaire, on veut les exprimer en ſtile Algébraïque. Comme, par exemple: on demande un nombre qui ait la propriété ſuivante, ſavoir, que ſes $\frac{2}{3}$, plus 4, ſoient égaux à ſes $\frac{7}{12}$, plus 9: ici, mettant x pour la quantité inconnue, la condition de ce Problême, exprimé Algébraïquement, ſera repréſentée par l'équation ſuivante, ſavoir, $\frac{2x}{3}+4=\frac{7x}{12}+9$; car $\frac{2}{3}$ de x, c'eſt-à-dire, $\frac{2}{3}$ de $\frac{x}{1}$ ſont $\frac{2x}{3}$; donc $\frac{2x}{3}+4$ ſignifient $\frac{2}{3}$ de x avec quatre de plus; & puiſque cette expreſſion, ſuivant le Problême, déſigne une quantité égale à $\frac{7x}{12}+9$, on eſt en droit de placer entre elles le ſigne d'égalité.

On a pu voir dans l'équation précédente, auſſi-bien que dans la plupart des autres qui naiſſent immédiatement des conditions du Problême, que la quantité inconnue ſe trouve embarraſſée & mêlée avec d'autres quantités connues: la dégager de ces ſortes de quantités, deſorte qu'elle occupe ſeule un des côtés de l'équation, & ſe trouve égale à la ſomme des quantités connues qui occupent l'autre côté, c'eſt-à-dire, dans le préſent cas, déterminer la valeur de la quantité inconnue x, eſt ce qu'on appelle ordinairement réſoudre une équation. Pour en venir à bout, nous commencerons par poſer quelques axiômes, & quelques-unes des règles dont l'uſage eſt le plus fréquent. Pour ce qui eſt de celles dont on a plus rarement beſoin, je les indiquerai à meſure que l'occaſion s'en préſentera.

De

De la réſolution des Equations ſimples.

AXIOME 1.

Quand une fraction doit être multipliée par un nombre entier, il ſuffira de multiplier le Numérateur par ce nombre, en laiſſant le Dénominateur tel qu'il étoit auparavant. Ainſi $\frac{2}{7}$ multipliés par 2 donnent $\frac{4}{7}$, par la même raiſon qui fait que 4 ſchellings multipliés par 2 donnent 8 ſchellings: ainſi dans le premier des exemples ſuivans, $\frac{7x}{12}$ multipliés par 3, donnent $\frac{21x}{12}$.

AXIOME 2.

Mais ſi le nombre entier par lequel la fraction doit être multipliée, eſt égal au Dénominateur de la fraction, en ce cas, négligez le Dénominateur, & le Numérateur ſeul formera le produit. Ainſi la fraction $\frac{a}{b}$, multipliée par b, donne $\frac{ab}{b} = a$: de-même dans le premier exemple $\frac{2x}{3}$, multipliés par 3, donnent $2x$; & $\frac{21x}{12}$, multipliés par 12, donnent $21x$.

AXIOME 3.

Si les deux côtés ou membres d'une équation ſont multipliés ou diviſés par le même nombre, les deux produits, ou les deux quotiens ſeront encore égaux entre eux. Ainſi dans le premier exemple, où $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{7x}{12} + 9$, ſi les deux membres de l'équation ſont multipliés par 3, on aura $2x + 12 = \frac{21x}{12} + 27$; & ſi l'on multiplie encore cette derniére équation par 12, on aura $24x + 144 = 21x + 324$.

AXIOME 4.

Si l'on ôte quelque quantité d'un des membres d'une équation, & qu'on la mette dans l'autre membre avec un ſigne contraire, ce qu'on appelle communément tranſpoſition, les deux membres conſerveront leur égalité. Si dans l'équation $7 + 3 = 10$, on tranſpoſe $+3$, on aura $7 = 10 - 3$: ſi dans l'équation $7 - 3 = 4$, on tranſpoſe -3, on aura $7 = 4 + 3$: de-même, ſi (comme dans le premier exemple) $24x + 144 = 21x + 324$, on aura, en tranſpoſant $21x$, l'équation $24x - 21x + 144 = 324$, c'eſt-à-dire,

dire, $3x+144=324$; & puis encore, en tranſpoſant 144, il viendra $3x=324-144=180$.

Il ſuit de ce que nous venons de dire, que la tranſpoſition Algébraïque n'eſt autre choſe qu'un nom général pour déſigner l'addition ou la ſouſtraction de quantités égales dans les deux membres d'une équation; ainſi il n'y a pas lieu d'être ſurpris ſi les ſommes ou les différences continuent à être égales. Comme, par exemple, dans cette équation $a-b=c$, tranſpoſant $-b$, nous avons $a=c+b$: & qu'eſt ceci après tout, ſinon ajoûter b, tant à l'un qu'à l'autre membre de l'équation? car ſi b eſt ajoûté à $a-b$, la ſomme ſera a; & ſi b eſt ajoûté à c, la ſomme ſera $c+b$; donc $a=c+b$: mais ſi dans l'équation $a+b=c$, on tranſpoſoit $+b$, on auroit $a=c-b$, ce qui n'eſt autre choſe que ſouſtraire b des deux membres de l'équation.

Premiére Règle.

Si, quand il s'agit de réſoudre une équation, on trouve des fractions dans un des membres ou dans tous les deux, il faut s'en défaire en multipliant toute l'équation par les Dénominateurs de ces fractions l'un après l'autre.

Seconde Règle.

Après que l'équation eſt ainſi dégagée de fractions, ſi la quantité inconnue ſe trouve des deux côtés de l'équation, il faut, par le ſecours de la tranſpoſition, la faire paſſer d'un ſeul & même côté, ſavoir, du côté qui après la réduction, donnera l'inconnue affirmée.

Troiſiéme Règle.

Après cela, ſi quelques quantités connues ſe trouvent du même côté que l'inconnue, il faut auſſi par la tranſpoſition les faire paſſer de l'autre côté.

Quatriéme Règle.

Tout étant fait juſques-là, ſi la quantité inconnue a devant elle quelque coëfficient, diviſez les deux membres par ce coëfficient, & l'équation ſera réſolue.

Cinquiéme Règle.

S'il y a moyen de diviſer toute l'équation par la grandeur inconnue, il faut faire cette diviſion, & l'équation ſe trouvera réduite à une autre plus ſimple. C'eſt ainſi que dans le 16ème exemple, nous aurons $615x-7xxx=48x$; diviſez toute l'équation par x, & elle ſera changée en celle-ci, $615-7xx=48$.

Dans

Dans le 13ème. exemple vous avez $\frac{42x}{x-2} = \frac{35x}{x-3}$; diviſez toute l'équation par x, ce qui ſe fait en diviſant ſimplement les numérateurs des deux fractions, & vous aurez $\frac{42}{x-2} = \frac{35}{x-3}$.

Sixiéme Règle.

Si, à la fin de l'opération, ce n'eſt point la quantité inconnue elle-même, mais cette quantité élevée au quarré, qui paroît égale à la grandeur connue, qui forme l'autre membre de l'équation, en ce cas la quantité inconnue doit être rendue égale à la racine quarrée de celle qui eſt connue. C'eſt ainſi que dans le 14ème exemple nous avons $xx=36$; *par conſéquent* $x=6$, *& point* 18: *dans le 15ème exemple nous avons* $xx=64$; *donc* $x=8$, *racine quarrée de* 64, *& pas* 32, *ſa moitié.*

Exemples de la maniére de réſoudre des Equations ſimples.

24. Nous allons préſentement donner quelques exemples de la maniére de réſoudre des équations du premier degré.

Exemple 1.

$$\frac{2x}{3} + 4 = \frac{7x}{12} + 9.$$

Il eſt clair d'abord, que dans cette équation il y a deux fractions, $\frac{2x}{3}$ & $\frac{7x}{12}$, dont il faut ſe défaire par deux opérations différentes. Voici comment on doit s'y prendre: comme le dénominateur de la premiére fraction eſt 3, multipliez toute l'équation par 3, & vous aurez $2x + 12 = \frac{21x}{12} + 27$: puis, comme le dénominateur de la ſeconde fraction eſt 12, multipliez toute l'équation par 12, & vous aurez $24x + 144 = 21x + 324$: équation dégagée de toute fraction.

2. Conſidérons enſuite, que dans cette derniére équation $24x + 144 = 21x + 324$, la quantité inconnue ſe trouve dans les deux membres, ſavoir, $24x$ d'un côté, & $21x$ de l'autre: ainſi il faut tranſpoſer $21x$, ce qui donnera $24x - 21x + 144 = 324$, c'eſt-à-dire, $3x + 144 = 324$. Que ſi l'on demande, pourquoi je tranſpoſe $21x$ plutôt que $24x$, ma réponſe eſt, que ſi $24x$ avoient été tranſpoſés, la grandeur inconnue, ou du-moins ſon coëfficient, après la réduction, auroit été une quantité négative, ce qui eſt contraire à la ſeconde règle; car reprenant l'équation $24x + 144 = 21x + 324$, ſi l'on tranſpoſe $24x$, on aura

$144 = 21x - 24x + 324$, c'eſt-à-dire, $144 = -3x + 324$; mais même dans ce cas, tout peut ſe raccommoder par une nouvelle tranſpoſition; car ſi l'on tranſpoſe $3x$ dans cette derniére équation, on aura $3x + 144 = 324$, comme auparavant: ainſi tout ce qu'on peut alléguer contre cette derniére méthode, eſt qu'elle engage à des tranſpoſitions inutiles.

3. Aprés avoir rendu l'équation beaucoup plus ſimple qu'elle ne l'étoit auparavant, ſavoir, $3x + 144 = 324$; comme la grandeur inconnue $3x$ ſe trouve encore accompagnée de la quantité connue 144, il faut tranſpoſer cette quantité dans l'autre membre de l'équation, ce qui donne $3x = 324 - 144$, c'eſt-à-dire, $3x = 180$.

N. B. Par une quantité connue qui en accompagne une autre inconnue, j'entends une quantité qui eſt ajoûtée à l'inconnue par le ſigne +, ou qui en eſt retranchée par le ſigne −, & non une quantité qui la multiplie, comme le coëfficient 3 dans la derniére équation.

4. La grandeur x ne ſauroit à-préſent guéres tarder à être connue; car ſi $3x = 180$, il n'y a qu'à diviſer toute l'équation par 3, & nous aurons $x = 60$: ainſi 60 eſt le nombre, dont il a été dit dans le dernier Article, que ſes $\frac{2}{3}$ avec 4 de plus, formeront une grandeur égale à ſes $\frac{3}{4}$ avec 9 de plus : & que le nombre de 60 ait cette propriété, eſt une choſe facile à prouver ſynthétiquement; car les $\frac{2}{3}$ de 60 ſont 40: en ajoûtant 4, on a 44; de plus $\frac{3}{4}$ de 60 ſont 35 : en ajoûtant 9 on a auſſi 44.

N. B. Une démonſtration qui prouve la connexion qu'il y a entre quelque nombre & la propriété qu'on lui attribue, eſt, ou analytique, ou ſynthétique: ſi cette connexion ſe prouve en déduiſant le nombre de cette propriété, on nomme cette démonſtration analytique; mais ſi on la prouve en déduiſant cette propriété du nombre même, la démonſtration eſt appellée alors ſynthétique.

Exemple 2.

$$\frac{2x}{3} + 12 = \frac{4x}{5} + 6.$$

Ici multipliez toute l'équation par 3, & vous aurez $2x + 36 = \frac{12x}{5} + 18$: multipliez enſuite cette nouvelle équation par 5, & vous aurez $10x + 180 = 12x + 90$; tranſpoſez $10x$ & vous aurez $180 = 12x - 10x + 90$; c'eſt-à-dire, $180 = 2x + 90$, ou plutôt $2x + 90 = 180$; car généralement parlant, j'aime mieux placer la grandeur inconnue dans le premier membre de l'équation: tranſpoſez 90 & vous aurez $2x = 180 - 90$, c'eſt-à-dire, $2x = 90$: diviſez toute l'équation par 2, & vous aurez $x = 45$.

La

La Preuve.

L'équation originale étoit $\frac{2x}{3} + 12 = \frac{4x}{5} + 6$: or ſi $x = 45$, nous avons $\frac{2x}{3} = 30$, & $\frac{2x}{3} + 12 = 42$: de plus nous avons $\frac{4x}{5} = 36$, & $\frac{4x}{5} + 6 = 42$; donc $\frac{2x}{3} + 12 = \frac{4x}{5} + 6$, à cauſe que chacune de ces équations eſt égale à 42.

Exemple 3.

$\frac{3x}{4} + 5 = \frac{5x}{6} + 2$: donc $3x + 20 = \frac{20x}{6} + 8$; donc $18x + 120 = 20x + 48$; donc $20 = 20x - 18x + 48$, c'eſt-à-dire, $120 = 2x + 48$; donc $120 - 48 = 2x$, c'eſt-à-dire, $2x = 72$; donc $x = 36$.

La Preuve.

L'équation originale étoit $\frac{3x}{4} + 5 = \frac{5x}{6} + 2$: or ſi $x = 36$, nous aurons $\frac{3x}{4} = 27$, & $\frac{3x}{4} + 5 = 32$: nous aurons auſſi $\frac{5x}{6} = 30$, & $\frac{5x}{6} + 2 = 32$; donc ſi $x = 36$, nous aurons $\frac{3x}{4} + 5 = \frac{5x}{6} + 2$.

Exemple 4.

$\frac{7x}{8} - 5 = \frac{9x}{10} - 8$: donc $7x - 40 = \frac{72x}{10} - 64$; donc $70x - 400 = 72x - 640$; donc $-400 = 72x - 70x - 640$, c'eſt-à-dire, $-400 = 2x - 640$, ou plutôt $2x - 640 = -400$; donc $2x = 640 - 400$, c'eſt-à-dire, $2x = 240$; & $x = 120$.

La Preuve.

L'équation originale eſt $\frac{7x}{8} - 5 = \frac{9x}{10} - 8$; mais $x = 120$; donc $\frac{7x}{8} = 105$; donc $\frac{7x}{8} - 5 = 100$: de plus $\frac{9x}{10} = 108$; donc $\frac{9x}{10} - 8 = 100$; donc $\frac{7x}{8} - 5 = \frac{9x}{10} - 8$.

Exemple 5.

$\frac{5x}{9} - 8 = 74 - \frac{7x}{12}$: donc $5x - 72 = 666 - \frac{63x}{12}$; donc $60x - 864 = 7992 - 63x$; donc $60x + 63x - 864 = 7992$, c'eſt-à-dire, $123x - 864 = 7992$; donc $123x = 7992 + 864$, c'eſt-à-dire, $123x = 8856$; & $x = 72$.

La Preuve.

L'équation originale eſt $\frac{5x}{9} - 8 = 74 - \frac{7x}{12}$; $x = 72$; donc $\frac{5x}{9} = 40$; donc $\frac{5x}{9} - 8 = 32$: de plus $\frac{7x}{12} = 42$; donc $74 - \frac{7x}{12} = 74 - 42 = 32$; donc $\frac{5x}{9} - 8 = 74 - \frac{7x}{12}$.

Exemple 6.

$\frac{x}{6} - 4 = 24 - \frac{x}{8}$: donc $x - 24 = 144 - \frac{6x}{8}$; donc $8x - 192 = 1152 - 6x$; donc $8x + 6x - 192 = 1152$, c'eſt-à-dire, $14x - 192 = 1152$; donc $14x = 1152 + 192$, c'eſt-à-dire $14x = 1344$; & $x = 96$.

La Preuve.

L'équation originale $\frac{x}{6} - 4 = 24 - \frac{x}{8}$; $x = 96$; $\frac{x}{6} = 16$; $\frac{x}{6} - 4 = 12$: de plus, $\frac{x}{8} = 12$; donc $24 - \frac{x}{8} = 24 - 12 = 12$; donc $\frac{x}{6} - 4 = 24 - \frac{x}{8}$.

Exemple 7.

$56 - \frac{3x}{4} = 48 - \frac{5x}{8}$: donc $224 - 3x = 192 - \frac{20x}{8}$; donc $1792 - 24x = 1536 - 20x$; donc $1792 = 1536 + 24x - 20x$, c'eſt à-dire, $1792 = 1536 + 4x$; donc $1792 - 1536 = 4x$, c'eſt-à-dire, $4x = 256$; & $x = 64$.

La Preuve.

L'équation originale $56 - \frac{3x}{4} = 48 - \frac{5x}{8}$; $x = 64$; donc $\frac{3x}{4} = 48$;

donc

donc $56-\frac{3x}{4}=56-48=8$: de plus $\frac{5x}{8}=40$; donc $48-\frac{5x}{8}=48-40=8$; donc $56-\frac{3x}{4}=48-\frac{5x}{8}$.

Exemple 8.

$36-\frac{4x}{9}=8$: donc $324-4x=72$; donc $324=72+4x$; donc $324-72=4x$, c'eſt-à-dire, $4x=252$; & $x=63$.

La Preuve.

L'équation originale $36-\frac{4x}{9}=8$; $x=63$; donc $\frac{4x}{9}=28$; donc $36-\frac{4x}{9}=36-28=8$.

Exemple 9.

$\frac{2x}{3}=\frac{176-4x}{5}$: donc $2x=\frac{528-12x}{5}$; donc $10x=528-12x$; donc $10x+12x=528$, c'eſt-à-dire, $22x=528$; & $x=24$.

La Preuve.

L'équation originale $\frac{2x}{3}=\frac{176-4x}{5}$; $x=24$; donc $\frac{2x}{3}=16$: de plus, $4x=96$; donc $176-4x=176-96=80$; donc $\frac{176-4x}{5}=\frac{80}{5}=16$; donc $\frac{2x}{3}=\frac{176-4x}{5}$.

Exemple 10.

$\frac{3x}{4}+\frac{180-5x}{6}=29$: donc $3x+\frac{720-20x}{6}=116$; donc $18x+720-20x=696$, c'eſt-à-dire, $720-2x=696$; donc $720=2x+696$; donc $720-696=2x$, c'eſt-à-dire, $2x=24$; & $x=12$.

La Preuve.

L'équation originale $\frac{3x}{4}+\frac{180-5x}{6}=29$; $x=12$; donc $\frac{3x}{4}=9$;

 $5x=60$;

$5x=60$; donc $180-5x=180-60=120$; donc $\frac{180-5x}{6}=\frac{120}{6}=20$; donc $\frac{3x}{4}+\frac{180-5x}{6}=29$.

Exemple 11.

$$\frac{45}{2x+3}=\frac{57}{4x-5}.$$

Multipliez par $2x+3$, & vous aurez $45=\frac{114x+171}{4x-5}$; multipliez par $4x-5$, & vous aurez $180x-225=114x+171$; donc $180x-114x-225=171$, c'eſt-à-dire, $66x-225=171$; donc $66x=171+225$, c'eſt-à-dire, $66x=396$; & $x=6$.

La Preuve.

L'équation originale $\frac{45}{2x+3}=\frac{57}{4x-5}$; $x=6$; donc $2x=12$; donc $2x+3=15$; donc $\frac{45}{2x+3}=\frac{45}{15}=3$: de plus $4x=24$; donc $4x-5=19$; donc $\frac{57}{4x-5}=\frac{57}{19}=3$; donc $\frac{45}{2x+3}=\frac{57}{4x-5}$.

Exemple 12.

$\frac{128}{3x-4}=\frac{216}{5x-6}$: donc $128=\frac{648x-864}{5x-6}$; donc $640x-768=648x-864$; donc $-768=648x-640x-864$, c'eſt-à-dire, $-768=8x-864$; donc $+864-768=8x$, c'eſt-à-dire, $8x=96$; & $x=12$.

La Preuve.

L'équation originale $\frac{128}{3x-4}=\frac{216}{5x-6}$; $x=12$; donc $3x=36$; donc $3x-4=32$; donc $\frac{128}{3x-4}=\frac{128}{32}=4$: de plus, $5x=60$; donc $5x-6=54$; donc $\frac{216}{5x-6}=\frac{216}{54}=4$; donc $\frac{128}{3x-4}=\frac{216}{5x-6}$.

Exemple 13.

$\frac{42x}{x-2}=\frac{35x}{x-3}$: diviſez les deux numérateurs par x, & vous aurez

rez $\frac{42}{x-2} = \frac{35}{x-3}$; donc $42 = \frac{35x-70}{x-3}$; donc $42x-126 = 35x-70$; donc $42x-35x-126 = -70$, c'eſt-à-dire, $7x-126 = -70$; donc $7x = 126-70$, c'eſt-à-dire, $7x = 56$; & $x = 8$.

La Preuve.

L'équation originale $\frac{42x}{x-2} = \frac{35x}{x-3}$; $x = 8$; donc $x-2 = 6$; $42x = 336$; donc $\frac{42x}{x-2} = \frac{336}{6} = 56$: de plus, $x-3 = 5$, & $35x = 280$; donc $\frac{35x}{x-3} = \frac{280}{5} = 56$; donc $\frac{42x}{x-2} = \frac{35x}{x-3}$.

Exemple 14.

$\frac{xx-12}{3} = \frac{xx-4}{4}$: donc $xx-12 = \frac{3xx-12}{4}$; donc $4xx-48 = 3xx-12$; donc $4xx-3xx-48 = -12$, c'eſt-à-dire, $xx-48 = -12$; donc $xx = +48-12$, c'eſt-à-dire, $xx = 36$; & $x = 6$.

La Preuve.

L'équation originale $\frac{xx-12}{3} = \frac{xx-4}{4}$; $x = 6$; donc $xx = 36$; donc $xx-12 = 24$; donc $\frac{xx-12}{3} = \frac{24}{3} = 8$: de plus $xx-4 = 32$; donc $\frac{xx-4}{4} = \frac{32}{4} = 8$; donc $\frac{xx-12}{3} = \frac{xx-4}{4}$.

Exemple 15.

$\frac{5xx}{16}-8 = 12$: donc $5xx-128 = 192$; donc $5xx = 192+128$, c'eſt-à-dire, $5xx = 320$; donc $xx = 64$; & $x = 8$.

La Preuve.

L'équation originale $\frac{5xx}{16}-8 = 12$; $x = 8$; donc $xx = 64$; donc $5xx = 320$; donc $\frac{5xx}{16} = \frac{320}{16} = 20$; donc $\frac{5xx}{16}-8 = 20-8 = 12$.

Exem-

Exemple 16.

$615x-7xxx=48x$: diviſez le tout par x, & vous aurez $615-7xx=48$; donc $615=7xx+48$; donc $615-48=7xx$, c'eſt-à-dire, $7xx=567$; donc, $xx=81$; & $x=9$.

La Preuve.

L'équation originale $615x-7xxx=48x$; $x=9$; donc $xx=81$; donc $xxx=729$; $7xxx=5103$; de plus, $615x=5535$; donc $615x-7xxx=5535-5103=432$; enfin, $48x=432$; donc $615x-7xxx=48x$.

ELEMENS D'ALGEBRE.

LIVRE II.

Préparations pour les ſolutions des Problêmes Algébraïques.

ART. 25. EN réſolvant les Problêmes ſuivans, je ferai uſage d'une ſorte d'Algébre mixte, n'employant des lettres que pour repréſenter des quantités inconnues, & des nombres pour les quantités qu'on connoît. Cette méthode me paroît devoir d'abord être la meilleure; mais après cela, quand le jeune Algébriſte aura fait quelques pas de plus dans la carriére que je lui ouvre, je me propoſe de l'initier aux myſtéres de l'Algébre pure, qui eſt infiniment plus étendue que l'Arithmétique, non ſeulement parce qu'elle lui fournit le moyen de trouver analytiquement des ſolutions générales, qui comprennent tous les cas particuliers rélatifs à la ſolution du Problême auquel ils appartiennent, mais auſſi parce qu'elle le met en état de démontrer les mêmes ſolutions ou théorêmes ſynthétiquement.

Et comme je ne le dois pas encore ſuppoſer verſé dans la connoiſſance des Mathématiques, mes Problêmes auront, généralement parlant, rapport aux nombres, conſidérés d'une maniére abſtraite, ou rélativement aux uſages ordinaires de la vie.

Si un Problême eſt bien propoſé, il faut qu'il renferme en ſoi autant de conditions indépendantes l'une de l'autre, expreſſément ou implicitement, qu'il y a de quantités inconnues à déterminer; & le principal but de l'Algébriſte doit être de découvrir & de bien diſtinguer ces conditions, avant que de tenter la ſolution de ſon Problême.

Je dis qu'autant de conditions doivent être contenues dans le Problême expreſſément ou implicitement, à cauſe qu'il peut arriver qu'une condition ne ſe trouve point exprimée dans un Problême, & que cependant elle y ſoit par la nature même de la choſe: ainſi dans le Problême 44, où pluſieurs perches doivent être dreſſées perpendiculairement en ligne droite, à certains intervalles l'une de l'autre, il y a implicitement, que le nombre des intervalles doit être plus petit d'une unité que le nombre des perches.

Quelquefois on peut inférer dans un Problême une condition, qui

renferme deux conditions, ou plus de deux: comme quand nous diſons que quatre nombres ſont en proportion continue, nous entendons par-là non ſeulement, que le premier nombre eſt au ſecond, comme le ſecond eſt au troiſiéme; mais auſſi que le ſecond eſt au troiſiéme, comme le troiſiéme eſt au quatriéme.

Toutes les fois qu'on demande la ſolution Algébraïque d'un Problême, l'Algébriſte doit ſubſtituer quelque lettre de l'Alphabet à la place de la quantité inconnue; & s'il y a plus d'une quantité inconnue, les autres doivent tirer leur nom d'autant de conditions du Problême. Si le Problême eſt bien poſé il reſtera à la fin une condition, qui exprimée en langage Algébraïque fournira une équation, dont la ſolution donnera la quantité inconnue, à la place de laquelle la ſubſtitution avoit été faite; & dès que cette quantité inconnue eſt trouvée, le reſte l'eſt bientôt. Suppoſons qu'il y ait quatre quantités inconnues dans un Problême, en ce cas il doit auſſi y avoir quatre conditions: or la premiére quantité inconnue ſe déſigne arbitrairement ſans aucune condition; ainſi les trois autres doivent prendre trois des conditions du Problême pour leurs noms; & la quatriéme condition reſtera pour fournir une équation.

La méthode que je me propoſe de ſuivre dans les quarante-quatre Problêmes ſuivans, ſera de donner la réponſe immédiatement après l'expoſé du Problême, & d'ajoûter enſuite la ſolution; car, à mon avis, cette méthode de donner d'abord la réponſe, éclaircit non ſeulement la ſolution qui va ſuivre, mais ſert auſſi à fixer davantage ſur le Problême l'attention des commençans, trop ſujets à ſe forger des chimeres, qui ne s'accordent aucunement avec les conditions du Problême.

Après que le jeune Algébriſte aura parcouru quelques-uns de ces Problêmes, & ſe trouvera un peu au fait de la méthode qu'il faut ſuivre pour les réſoudre, il fera bien de recommencer, & d'entreprendre la ſolution de chaque Problême, ſans avoir recours aux ſolutions données ici, à moins qu'il ne puiſſe abſolument point en ſortir autrement: mais après l'opération faite, il peut comparer ſa ſolution avec la nôtre, & y faire les changemens qu'il jugera à propos.

Solution de quelques Problêmes, qui ſe réduiſent à des équations ſimples.

PROBLEME I.

26. *On demande deux nombres, dont la différence eſt* 14 *& la ſomme* 48. *Rép.* Ces nombres ſont 31 & 17: car $31-17=14$; & $31+17=48$.

So-

Solution.

Il y a dans ce Problême deux quantités inconnues, ſavoir, les deux nombres cherchés; & il y a deux conditions; premiérement, qu'il reſte 14, après que le plus petit nombre aura été ſouſtrait du plus grand; & ſecondement, que la ſomme des deux nombres ſoit égale à 48: ainſi je déſigne le plus petit nombre par x; & pour trouver un nom au plus grand, j'ai recours à la premiére condition du Problême, ſavoir, que la différence entre les deux nombres cherchés eſt égale à 14, donc par cela même que j'appelle le plus petit nombre x, je dois appeller le plus grand $x+14$: de cette maniére j'ai trouvé des noms à mes deux quantités inconnues, & il me reſte encore une condition en réſerve pour une équation, ſavoir, la ſeconde condition exprimée dans le Problême: or ſuivant cette ſeconde condition, les deux nombres, ajoûtés enſemble, font 48; mais x & $x+14$, ajoûtés enſemble, font $2x+14$; ce qui me donne cette équation, $2x+14=48$; donc $2x+14=48-14=34$; donc x, ou le plus petit nombre $=17$, & $x+14$, ou le plus grand nombre $=31$, comme ci-deſſus.

Dans notre ſolution de ce Problême, la maniére de déſigner les inconnues a été empruntée de la premiére condition, & l'équation l'a été de la ſeconde; cependant il y auroit eu moyen de faire préciſément le contraire, en s'y prenant de la maniére ſuivante: ſoit x le plus petit nombre cherché; cela étant, puiſque la ſomme des deux nombres eſt 48, ſi l'on retranche le plus petit nombre x de 48, le reſte $48-x$ ſera le plus grand nombre, deſorte que les deux nombres cherchés ſeront x & $48-x$; retranchez le premier nombre du dernier, & le reſte ou la différence ſera $48-2x$; mais ſuivant la premiére condition du Problême, cette différence doit être 14; donc $48-2x=14$; réſolvez cette équation, & vous aurez $x=17$, & $48-x=31$, comme ci-deſſus.

Problême 2.

27. *Trois perſonnes* A, B *&* C, *fourniſſent enſemble une ſomme de* 76 *livres ſt. on ignore quelle portion* A *contribue, mais on ſait que* B *donne autant que* A *&* 10 *livres ſt. de plus; & que* C *fournit une ſomme égale à celles de* A *&* B *enſemble. On demande leurs différentes contributions.*

Rép. A donne 14 livres, *B* 24, & *C* 38: car $14+10=24$, & $14+24=38$, & $14+24+38=76$.

Solution.

Dans ce Problême il y a trois quantités inconnues, & trois conditions pour les trouver: premiérement, toute la contribution monte à 76 livres: ſecondement, *B* contribue autant que *A*, & dix livres de plus: & enfin, *C* contribue autant que *A* & *B* enſemble.

Tout ceci étant ſuppoſé, je déſigne d'abord la contribution de *A* par la lettre x; puis, comme ſuivant la ſeconde condition *B* contribue autant que *A* & dix livres de plus, j'appelle la contribution de *B*, $x+10$; enfin puiſque *C* contribue autant que *A* & *B* enſemble, j'ajoûte enſemble x & $x+10$, ce qui me donne $2x+10$ pour exprimer la contribution de *C*: par ce moyen j'ai trouvé des noms à toutes mes quantités inconnues, & il me reſte encore une condition, que je n'ai point conſidérée, & propre à être tournée en équation, ſavoir, que toutes les contributions ajoûtées enſemble font 76 livres; j'ajoûte donc enſemble x, & $x+10$, & $2x+10$, & ſuppoſe la ſomme $4x+20=76$; donc $4x=76-20=56$; donc la contribution de *A* eſt égale à 14; la contribution de *B* eſt égale à 24, & celle de *C* à 38 comme ci-deſſus.

Probleme 3.

28. *Tout étant ſuppoſé de-même que dans le Problême précédent, excepté qu'à préſent toute la contribution monte à 276 livres, dont* A *donne une portion inconnue,* B *donne le double de* A, *& 12 livres par deſſus, &* C *trois fois autant que* B., *& outre cela encore 12 livres, je demande leurs contributions reſpectives.*

Rép. A contribue 24 livres, *B* 60 & *C* 192: car $24\times2+12=60$; & $60\times3+12=192$; & $24+60+192=276$.

Solution.

Déſignez la contribution de *A* par x; comme *B* contribue deux fois autant que *A*, & douze livres de plus, la contribution de *B* ſera $2x+12$; donc ſi *C* avoit contribué préciſément trois fois autant que *B*, ſa contribution auroit été $6x+36$; mais ſuivant le Problême *C* contribue cette ſomme, & 12 livres de plus, ainſi la contribution de *C* eſt $6x+48$; ajoûtez enſemble ces contributions, ſavoir, x, $2x+12$, & $6x+48$, & vous aurez $9x+60=276$; donc $9x=276-60=216$; & x, ou la contribution de $A=24$; donc $2x+12$, ou la contribution de $B=60$; & $6x+48$, ou la contribution de C, $=192$, comme ci-deſſus.

Avis.

Avis.

Je ne ſais ſi ce n'eſt pas faire tort à la pénétration du jeune Algébriſte, que de l'avertir, qu'auſſitôt que x eſt trouvé égal à 24, les deux autres quantités inconnues, $2x+12$, & $6x+48$, ſe trouvent en ſubſtituant 24 au-lieu de x.

Probleme 4.

29. *Un Marchand commence ſon négoce avec une certaine ſomme, qu'il fait ſi bien valoir, qu'au bout de l'an il ſe trouve avoir le double de ſon premier capital, horsmis cent livres ſt. qu'il a employées en dépenſes ordinaires; & il continue de-même chaque année, doublant toujours le fonds de l'année précédente, excepté cent livres ſt. dépenſées, comme auparavant; & au bout de trois ans, il ſe trouve trois fois plus riche qu'il n'étoit en commençant ſon trafic: on demande quel fonds il a mis dans ſon commerce.*

Rép. 140. livres ſt.: car le double de cette ſomme eſt 280, & $280-100=180$ livres au bout de la premiére année; le double de cette ſomme eſt 360, & $360-100=260$ livres au bout de la ſeconde année; enfin le double de cette derniére ſomme eſt 520, & $520-100=420$ livres au bout de la troiſiéme année: & la ſomme de 420 livres eſt préciſément triple de celle de 140 livres, qui étoit ſon premier fonds.

Solution.

Mettez ici x pour ſon premier fonds, c'eſt-à-dire, que x déſigne le nombre de livres ſt. avec lequel il a commencé ſon négoce; le double de cette ſomme eſt $2x$, & par conſéquent il aura $2x-100$ au bout de la premiére année; le double de cette ſomme eſt $4x-200$; donc il aura $4x-200-100$, c'eſt-à-dire, $4x-300$, au bout de la ſeconde année; le double de cette ſomme eſt $8x-600$; donc il aura $8x-600-100$, c'eſt-à-dire, $8x-700$ au bout de la troiſiéme année; mais ſuivant le Problême, il doit avoir le triple de ſon premier capital, c'eſt-à-dire $3x$, au bout de la troiſiéme année; par conſéquent $8x-700=3x$; donc $8x-3x-700=0$, c'eſt-à-dire $5x-700=0$; donc $5x=700$; & x, ou ſon premier capital $=140$, comme ci-deſſus.

J'ajoûterai à ce Problême un autre du même genre, dont le Lecteur pourra lui-même chercher la ſolution.

Quelqu'un va avec une certaine ſomme d'argent au cabaret, où il emprunte une ſomme égale à celle qu'il a en poche, & du tout il dépenſe un ſchelling: il va avec le reſte à un ſecond cabaret, où il emprunte de-nouveau autant

d'argent qu'il en porte ſur lui, & dépenſe encore un ſchelling; puis il ſe rend à une troiſiéme, & enſuite à un quatriéme cabaret, empruntant toujours & dépenſant comme auparavant; après quoi il ne lui reſte plus rien; je demande combien d'argent il avoit d'abord ſur lui.

Rép. $\frac{15}{16}$ d'un ſchelling.

Probleme 5.

30. *Un homme a ſix fils, dont chacun a quatre ans de plus que ſon frère puis-né; & le plus âgé a trois fois l'âge du plus jeune: Quels ſont leurs âges reſpectifs?*

Rép. 10, 14, 18, 22, 26, 30; car 30, âge de l'aîné, vaut trois fois 10, c'eſt-à-dire, trois fois l'âge du plus jeune.

Solution.

Pour leurs différens âges mettez x, $x+4$, $x+8$, $x+12$, $x+16$, $x+20$; ſuivant le Problême $x+20$ âge de l'aîné, doit être égal à $3x$, c'eſt-à-dire, à trois fois l'âge du plus jeune; puis donc que $3x=x+20$, nous aurons $3x-x=20$, c'eſt-à-dire, $2x=20$, & $x=10$, comme ci-deſſus.

Probleme 6.

31. *La tête d'un certain poiſſon a 9 pouces de long; la queue eſt auſſi longue que la tête & la moitié du corps; & le corps a la même longueur que la tête & la queue enſemble: je demande la longueur du corps & de la queue.*

Rép. La longueur du corps eſt de 36 pouces, & celle de la queue de 27; car $27=9+\frac{36}{2}$; & $36=9+27$.

Solution.

Déſignez la longueur du corps par x: cela étant x eſt égal à la longueur de la tête & de la queue enſemble, par la ſuppoſition; donc ſi de x, longueur de la tête & de la queue enſemble, je retranche 9, longueur de la tête, il reſtera $x-9$ pour la longueur de la queue; mais ſuivant le Problême la queue eſt auſſi longue que la tête, & que la moitié du corps; donc $x-9=\frac{x}{2}+9$; donc $2x-18=x+18$; donc $2x-x-18=18$, c'eſt-à-dire, $x-18=18$; & x longueur du corps $=18+18=36$; donc $x-9$, longueur de la queue, $=27$, comme ci-deſſus.

Probleme 7.

32. *Quelqu'un a obtenu un répit de 99 ans: étant interrogé ſur le tems du répit*

répit déjà écoulé, il répond que les deux tiers de ce tems ſont égaux aux quatre cinquiémes de celui qui doit s'écouler encore : je demande l'un & l'autre de ces tems.

Rép. Le tems paſſé eſt de 54 ans; & le nombre total des années 99; donc juſqu'à l'expiration du terme, il reſte encore 45 ans : or $\frac{2}{3}$ de $54=36$; & $\frac{4}{5}$ de 45 auſſi $= 36$.

SOLUTION.

Nommez le tems paſſé x: cela étant, puiſque la ſomme totale des années eſt 99, ſi l'on ſouſtrait le tems paſſé x, de 99 le tems entier, il reſtera $99-x$ pour le tems à venir; mais les $\frac{2}{3}$ du tems paſſé $\frac{2x}{3}$, & les $\frac{4}{5}$ du tems avenir ſont $\frac{4}{5}$ de $\frac{99-x}{1}=\frac{396-4x}{5}$: donc $\frac{2x}{3}=\frac{396-4x}{5}$; donc $2x=\frac{1188-12x}{5}$; donc $10x=1188-12x$; donc $10x+12x=1188$, c'eſt-à-dire, $22x=1188$; & le tems écoulé $x=54$ ans; donc $99-x$, tems à écouler encore, $=45$ ans.

J'ajoûterai à ce Problême deux autres de même nature, ſans aucune ſolution.

Premiérement, *Le nombre* 84 *doit être diviſé en deux parties telles, que l'une trois fois priſe ſoit égale à l'autre priſe quatre fois.*

Rép. Les parties ſont 48 & 36: car en premier lieu, $48+36=84$; & en ſecond lieu, trois fois $48=144=$ a quatre fois 36.

Secondement, *Il faut diviſer le nombre* 60 *en deux parties telles, que la ſeptiéme partie de l'une égale la huitiéme partie de l'autre.*

Rép. Les parties ſont 28 & 32; car en premier lieu $28+32=60$; & en ſecond lieu, $\frac{1}{7}$ de $28=4=\frac{1}{8}$ de 32.

PROBLEME 8.

33. *On demande de diviſer le nombre* 50 *en deux parties telles, que les* $\frac{3}{4}$ *de l'une ajoûtés aux* $\frac{4}{5}$ *de l'autre, puiſſent faire* 40.

Rép. Les parties ſont 20 & 30: car en premier lieu, $20+30=50$; & en ſecond lieu, $\frac{3}{4}$ de 20, c'eſt-à-dire 15, ajoûtés à $\frac{4}{5}$ de 30, ſavoir 25, font 40.

SOLUTION.

Mettez x pour une des parties inconnues, & par conſéquent $50-x$ pour l'autre partie; vous aurez alors $\frac{3}{4}$ de $x=\frac{3x}{4}$, & $\frac{4}{5}$ de $50-x=\frac{250-5x}{6}$; mais ſuivant le Problême, ces deux nombres ajoûtés enſemble doivent faire

faire 40; ce qui donne cette équation $\frac{3x}{4} + \frac{250-5x}{6} = 40$: multipliez le tout par 4, & vous aurez $3x + \frac{1000-20x}{6}$; multipliez enſuite l'équation par 6, & vous aurez $18x + 1000 - 20x = 960$, c'eſt-à-dire, $1000 - 2x = 960$; donc $1000 = 2x + 960$; & $1000 - 960 = 2x$, c'eſt-à-dire, $2x = 40$, & x, qui eſt une des parties cherchées, ſera 20; donc l'autre partie, ou $50 - x$, ſera $= 30$, comme ci-deſſus.

Voici encore deux autres Problêmes du même genre.

Premiérement: *On demande de partager* 80 *en deux parties telles, que l'une d'elles étant priſe trois fois, & ajoûtée à l'autre priſe cinq fois, la ſomme ſoit* 84.

Rép. Les parties ſont 8 & 12; car $8 + 12 = 20$, & $8 \times 3 + 12 \times 5$, c'eſt-à-dire, $24 + 60 = 84$.

Secondement: *On demande de partager* 100 *en deux parties telles, que ſi l'on ſouſtrait le* $\frac{2}{3}$ *de l'une du* $\frac{1}{4}$ *de l'autre, le reſte ſoit* 11.

Rép. Les parties ſont 24 & 76: car premiérement, 24 ajoûtés à 76 ſont 100; & ſecondement $\frac{2}{3}$ de 24, c'eſt-à-dire 8, ſouſtrait d'un $\frac{1}{4}$ de 76, qui eſt 19, laiſſe 11.

PROBLEME 9.

34. *Deux hommes* A *&* B *ſe mettent au jeu. Le premier a* 72 *guinées, & l'autre* 52 *avant qu'ils commencent à jouer; & après un certain nombre de parties tant gagnées que perdues,* A *ſe léve avec trois fois autant de guinées que* B: *je demande le gain de* A.

Rép. 21: car $72 + 21 = 93$; & $52 - 21 = 31$; & $93 = 31 \times 3$.

SOLUTION.

Mettez x pour le nombre de guinées gagné par A, & conſéquemment perdu par B; ainſi la ſomme avec laquelle A s'eſt levé, ſe trouve être $72 + x$, & celle de B dans ce même tems $52 - x$: or ſuivant le Problême, cette ſomme finale de A vaut le triple de la ſomme finale de B; c'eſt-à-dire, eſt égale à trois fois $\overline{52-x}$, ou à $156 - 3x$; donc $72 + x = 156 - 3x$; donc $72 + x + 3x = 156$, c'eſt-à-dire, $72 + 4x = 156$; donc $4x = 156 - 72 = 84$; donc x, nombre des guinées gagné par A, eſt égal à 21, comme ci-deſſus.

PROBLEME 10.

35. *Un homme rencontrant une troupe de mendians, donne à chacun d'eux quatre ſous, & a ſeize ſous de reſte; mais s'il avoit voulu donner ſix ſous à chacun*

chacun d'eux, il lui auroit manqué douze ſous pour cela: je demande le nombre des mendians.

Rép. 14: car $14 \times 4 + 16 = 72 = 14 \times 6 - 12$.

SOLUTION.

Déſignez le nombre des mendians par x; cela étant, puiſque chacun d'eux a reçu quatre ſous, le nombre des ſous ſera quatre fois plus grand que celui des mendians, c'eſt-à-dire, $4x$; donc $4x + 16 =$ au nombre de ſous que l'homme avoit ſur lui; & la même ſomme pourra être exprimée par $6x - 12$; donc $4x + 16 = 6x - 12$; donc $16 = 6x - 4x - 12 = 2x - 12$; donc $2x = 16 + 12 = 28$; & x, nombre des mendians $= 14$, comme ci-deſſus.

PROBLEME II.

36. *On demande deux nombres, ayant pour différence* 4, *& 112 pour différence de leurs quarrés.*

Rép. 12 & 16: car $16 - 12 = 4$, & $16 \times 16 - 12 \times 12$, c'eſt-à-dire, $256 - 144 = 112$.

SOLUTION.

Le plus petit nombre, x.
Le plus grand, $x + 4$.

$$\begin{array}{r} x+4 \\ x+4 \\ \hline xx+4x+16 \\ \quad +4x \\ \hline xx+8x+16 \end{array}$$

Le quarré du plus grand, $xx + 8x + 16$
Le quarré du plus petit, xx
La différence de leurs quarrés, $8x + 16$; donc $8x + 16 = 112$; donc $8x = 112 - 16 = 96$; donc x, le plus petit nombre, vaut 12, & le plus grand, $x + 4$, eſt égal à 16, comme ci-deſſus.

PROBLEME 12.

37. *On demande quels ſont deux nombres, dont le plus grand eſt triple du plus petit, & qui pris chacun cinq fois ſont égaux à la ſomme de leurs quarrés.*

Rép. Les nombres ſont 6 & 2, dont la ſomme eſt 8: or $6 = 3$ fois 2; & $6 \times 6 + 2 \times 2 = 40 = 5$ fois 8.

SOLUTION.

Le plus petit nombre,	x.
Le plus grand,	$3x$.
Leur ſomme,	$4x$.
Le quarré du plus petit,	xx.
Le quarré du plus grand,	$9xx$.
La ſomme de leurs quarrés,	$10xx$.

Mais ſuivant le Problême, la ſomme de leurs quarrés vaut cinq fois la ſomme des nombres, c'eſt-à-dire, 5 fois $4x$ ou $20x$; donc $10xx = 20x$; & $10x = 20$; & x le plus petit nombre $= 2$; donc $3x$, le plus grand nombre, $= 6$, comme ci-deſſus.

Probleme 13.

38. *On demande deux nombres, dont le plus petit ſoit au plus grand comme* 2 *à* 3, *& dont le produit vaille* 6 *fois la ſomme des nombres mêmes.*

Rép. Ces nombres ſont 10 & 15, dont la ſomme eſt 25; car 10 eſt à 15, comme 2 à 3: ces nombres ſatisfont auſſi à la ſeconde condition du Problême; car $10 \times 15 = 150 = 25 \times 6$.

Solution.

Appellez le plus petit nombre x; puis pour trouver le plus grand dites, ſi 2 donnent 3, que donnera x? & la réponſe eſt $\frac{3x}{2}$; donc ſi x eſt le plus petit nombre, le plus grand ſera $\frac{3x}{2}$; leur ſomme ſera $\frac{x}{1} + \frac{3x}{2}$, ou $\frac{2x+3x}{2}$, ou $\frac{5x}{2}$; & le produit de leur multiplication $x \times \frac{3x}{2}$ ou $\frac{3xx}{2}$; mais ſuivant le Problême, le produit de leur multiplication doit être égal à ſix fois la ſomme des nombres, c'eſt-à-dire, à ſix fois $\frac{5x}{2}$, ou $\frac{30x}{2}$; donc $\frac{3xx}{2} = \frac{30x}{2}$; & $3xx = 30x$; & $3x = 30$; & x le plus petit nombre égal à 10; donc le plus grand nombre, ſavoir $\frac{3x}{2} = 15$, comme ci-deſſus.

Probleme 14.

39. A *dit à* B, *donnez-moi cinq ſchellings de votre argent, & j'en aurai préciſément autant qu'il vous en reſtera: non, dit* B, *donnez-moi plutôt cinq ſchellings du vôtre, & j'aurai alors le triple de ce qui vous reſtera à vous: combien chacun d'eux avoit-il d'argent?*

Rép. *A* avoit 15 ſchellings, & *B* 25: car en ce cas, ſi *A* emprunte 5 ſchellings de *B*, ils auront chacun 20 ſchellings; & d'une autre côté, ſi *A* prête 5 ſchellings à *B*, *A* aura 10 ſchellings de reſte, & *B* en aura 30, c'eſt-à-dire, trois fois autant.

So-

SOLUTION.

Désignez par x l'argent de A; cela étant, si A emprunte 5 schellings de B, son argent sera $x+5$, & il restera pareillement $x+5$ à B, par la supposition; mais si B, après avoir prêté 5 schellings à A, garde encore $x+5$, il faut qu'il ait eu $x+10$ auparavant; donc si x représente l'argent de A, $x+10$ représentera celui de B: supposons présentement que B emprunte 5 schellings de A, alors B aura $x+15$, & l'argent de A sera $x-5$; mais suivant le Problême, B doit avoir en ce cas trois fois plus d'argent qu'il n'en reste à A, c'est-à-dire, trois fois $\overline{x-5}$, ou $3x-15$; donc $3x-15=x+15$; donc $3x-x-15=15$, c'est-à-dire, $2x-15=15$; donc $2x=15+15=30$; donc x, c'est-à-dire, l'argent de A vaut 15 schellings, & $x+10$, argent de B, en vaut 25, comme ci-dessus.

PROBLÈME 15.

40. *On demande deux nombres, dont le produit est* 108, *& dont la somme est égale à deux fois leur différence.*

Rép. 18 & 6: car le produit de leur multiplication est 108, & leur somme 24 est égale à deux fois leur différence 12.

SOLUTION.

J'appelle le plus grand nombre x; si leur somme avoit été 108, j'aurois à la place de l'autre nombre mis $108-x$; mais ce n'est pas la somme de leur addition, mais le produit de leur multiplication, qui est $=108$; par conséquent si un des nombres s'appelle x, l'autre doit être appellé $\frac{108}{x}$, ce que je démontre ainsi: soit cet autre nombre y; en ce cas $x \times y$, ou $xy=108$ par la supposition; divisez les deux membres de l'équation par x, & vous aurez $y=\frac{108}{x}$; ce qu'il falloit démontrer. La différence entre le plus grand nombre x, & le plus petit $\frac{108}{x}$ est $x-\frac{108}{x}$, & leur somme est $x+\frac{108}{x}$: mais par la condition du Problême, cette somme doit être égale à deux fois la différence des nombres, c'est-à-dire, à deux fois $\overline{x-\frac{108}{x}}$ ou $2x-\frac{216}{x}$; donc $2x-\frac{216}{x}=x+\frac{108}{x}$; donc $2xx-216=xx+108$; donc $2xx-xx-216=108$, c'est-à-dire, $xx-216=108$; donc $xx=108+216=324$; donc x, qui est le plus

grand nombre, vaut 18, & $\frac{108}{x}$, qui eſt le plus petit, en vaut 6, comme il a été dit.

Probleme 16.

41. *On demande de partager* 48 *en deux parties telles, que l'une ſoit trois fois autant au-deſſus de* 20, *que l'autre eſt au-deſſous.*

Rép. Les deux parties ſont 32 & 16; car $32+16=48$; de plus le nombre 32 ſurpaſſe 20 de 12, & il manque 4 à celui de 16 pour être égal à 20; enfin, $3\times4=12$.

Solution.

Soit x le plus petit nombre; alors $48-x$ ſera le plus grand; & l'excès du plus grand par-deſſus 20 ſera $28-x$: de plus l'excès de 20 par-deſſus le plus petit nombre (c'eſt-à-dire, ce qui manque au plus petit nombre pour être égal à 20) eſt $20-x$; & ſuivant le Problême, le premier excès eſt égal à trois fois le dernier, c'eſt-à-dire, à trois fois $20-x$, ou à $60-3x$; ce qui nous donne cette équation, $28-x=60-3x$; donc $28-x+3x=60$, c'eſt-à-dire, $28-2x=60$; donc $2x=60-28=32$; donc x la plus petite partie $=16$, & la plus grande, ſavoir $48-x$, $=32$, comme ci-deſſus.

Autre Solution de ce Problême.

Déſignez par x ce qui manque au plus petit nombre pour être égal à 20; ce nombre ſera alors $20-x$, le plus grand $20+3x$, & leur ſomme $40+2x$; mais leur ſomme, par l'hypothéſe, eſt 48; donc $40+2x=48$; donc $2x=48-40=8$; donc $x=4$; & $20-x$, le plus petit nombre $=16$; & $20+3x$, le plus grand nombre $=32$.

Probleme 17.

42. *Un marchand a trois débiteurs,* A, B *&* C; *mais il a oublié ce que chacun d'eux lui doit, & ſe ſouvient ſeulement, que les dettes de* A *&* B, *ajoûtées enſemble montent à* 60 *guinées; celles de* A *&* C *à* 80; *&* B *&* C *à* 92: *on demande ce que chacun d'eux lui devoit.*

Rép. La dette de *A* eſt de 24 guinées, celle de *B* de 36, & enfin celle de *C* de 56: car $24+36=60$, $24+56=80$, & $36+56=92$.

Solution.

Nommez la dette de *A*, x; cela étant, comme les dettes de *A* & de *B*, ajoûtées enſemble ſont 60 guinées, la ſeule dette de *B* ſera $60-x$: de plus,

plus, comme *A* & *C* doivent enſemble 80 guinées, la ſeule dette de *C* doit être $80-x$: or puiſque, ſuivant le problême, les dettes de *B* & de *C*, ajoûtées enſemble, montent à la ſomme de 92 guinées, j'ajoûte $60-x$ & $80-x$ enſemble, & ſuppoſe la ſomme $140-2x=92$; d'où il ſuit que $2x+92=140$, & $2x=140-92=48$; & x, c'eſt-à-dire, la dette de *A* $=24$ guinées; donc $60-x$, ou la dette de B $=36$; & $80-x$, ou la dette de *C*, $=56$.

PROBLEME 18.

43. *On demande à quelqu'un combien il lui reſte de dents, & il répond, trois fois autant que j'en ai perdues: on lui demande enſuite combien il en a perdues, & ſa réponſe eſt le nombre de celles que j'ai perdues, multiplié par ¼ du nombre qui me reſte, eſt égal au nombre de toutes celles que j'ai eues auparavant: on demande combien de dents il a perdues, & combien il lui en reſte encore.*

Rép. Il en a perdu 8, & il lui en reſte 24: car le nombre 24 eſt égal à trois fois 8; & de plus 8, qui eſt le nombre des dents qu'il a perdues, multipliés par 4, c'eſt-à-dire, par ¼ de 24, qui eſt le nombre des dents qui lui reſtent, $=32=24+8$, c'eſt-à-dire, au nombre total des dents qu'il avoit eues auparavant.

SOLUTION.

Dents perdues, x.
Celles qui reſtent, $3x$.
En tout, $4x$.

¼ de celles qui reſtent $\frac{3x}{6}$, ou $\frac{x}{2}$; ce nombre multiplié par celui des dents perdues, eſt $\frac{x}{2}\times x$ ou $\frac{xx}{2}$; mais ſuivant le problême, ce produit eſt égal au nombre de toutes les dents qu'il avoit eues auparavant; donc $\frac{xx}{2}=4x$; & $xx=8x$; & x, nombre des dents perdues $=8$; donc $3x$, nombre des dents qui reſtent, $=24$.

PROBLEME 19.

44. *Quelqu'un afferme 25 arpens de terre à 7 livres ſt. & 12 ſchellings par an; mais comme ces arpens de terre ne ſont pas tous également bons, il donne 8 ſchellings par an pour chaque arpent des meilleurs, & ſeulement 5 pour chacun des autres: je demande le nombre des arpens de chaque ſorte.*

Rép. Il avoit 9 arpens de la meilleure ſorte, & 16 arpens de la plus mauvaiſe; car $9+16$ arpens $=25$ arpens; & 9 fois 8 ſchellings $=72$ ſchellings; & 16 fois 5 ſchellings $=80$ ſchellings; & $72+80=152$ ſchellings $=7$ livres ſt. & 12 ſchellings.

SOLUTION.

Mettez x pour le nombre des arpens de la meilleure ſorte; en ce cas $25-x$ ſeront le nombre d'arpens de la plus mauvaiſe ſorte, les deux nombres, ajoûtés enſemble, étant égaux à 25 arpens: de plus, puiſqu'il paye 8 ſchellings par arpent pour la meilleure ſorte, il faut qu'il donne huit fois autant de ſchellings qu'il a de ces arpens, c'eſt-à-dire, $8x$; & puiſqu'il paye cinq ſchellings pour chaque arpent de la mauvaiſe ſorte, il faut pareillement qu'il donne cinq fois autant de ſchellings qu'il a de ces arpens, c'eſt-à-dire, $\overline{25-x}\times 5$, ou $125-5x$: ajoûtez ces deux ſommes enſemble, & elles monteront à $8x+125-5x$, ou $3x+125$ en ſchellings; mais la ſomme eſt 152 ſchellings par la ſuppoſition; donc $3x+125=152$; donc $3x=152-125=27$; donc x, nombre d'arpens de la meilleure ſorte $=9$, & $25-x$, nombre d'arpens de la plus mauvaiſe ſorte $=16$.

PROBLEME 20.

45. *Quelqu'un engage un Jardinier pour 36 jours aux conditions ſuivantes, ſavoir, que pour chaque jour qu'il travaillera, il aura deux ſchellings & ſix ſous; & que pour chaque jour qu'il ne viendra point travailler, on lui rabattra un ſchelling & ſix ſous: or au bout de 36 jours, tout rabais fait, le Jardinier reçoit deux livres ſt. & dix-huit ſchellings: je demande combien de jours il a travaillé.*

Rép. Il a travaillé 28 jours, & en a été 8 ſans rien faire: car 28 demi écus (monnoye d'Angleterre) montent à 3 livres ſt. 10 ſchellings, qui lui revenoient comme ſon ſalaire; mais de cette ſomme il faut rabattre huit fois 18 ſous, c'eſt-à-dire, 12 ſchellings, ſuivant l'accord: or cette derniére ſomme retranchée de la premiére, laiſſe 2 livres ſt. & 18 ſchellings.

SOLUTION.

Appellez x le nombre des jours qu'il a travaillé; cela étant, le nombre des jours qu'il a été abſent ſera marqué par $36-x$; de plus, puiſqu'il devoit recevoir 30 ſous pour chaque jour qu'il travailleroit, le nombre des ſous qui lui ſont dus comme gages, ſeront $30\times x$, ou $30x$; & puiſqu'il devoit payer lui-même 18 ſous pour chaque jour qu'il ſeroit abſent, le nombre des ſous qu'il doit, comme amendes, ſera $18\times\overline{36-x}$, ou $648-18x$: retranchez à-préſent $648-18x$ de $30x$, c'eſt-à-dire, ce qu'il doit de ce qui lui eſt dû; ou, ce qui revient au même, ajoûtez $18x-648$ à $30x$, & vous aurez $48x-648$, pour exprimer le nombre de ſous

ſous qu'il doit recevoir : mais il reçoit 2 livres ſt. & 18 ſchellings, ou 696 ſous, par l'hypothéſe ; donc $48x - 648 = 696$; donc $48x = 648 + 696 = 1344$; donc x, nombre des jours qu'il a travaillé $= 28$; & $36 - x$, nombre des jours qu'il n'eſt point venu travailler $= 8$.

PROBLEME 21.

46. *Suppoſons que 19 livres d'or péſent 18 livres dans l'eau ; & de plus, que 10 livres d'argent péſent 9 livres dans l'eau ; enfin, ſuppoſons qu'une maſſe du poids de 106 livres & qui eſt un mêlange d'or & d'argent, ne péſe dans l'eau que 99 livres, je demande les quantités diſtinctes d'or & d'argent dont cette maſſe eſt compoſée.*

Rép. Il y a dans la maſſe 76 livres d'or, & 30 livres d'argent ; car $76 + 30 = 106$; de plus, ſi 19 livres d'or péſent 18 livres dans l'eau, 76 livres d'or péſeront 72 livres dans l'eau, par la règle de trois ; & ſi 10 livres d'argent péſent 9 livres dans l'eau, 30 livres d'argent péſeront dans l'eau 27 livres, par la même règle ; & enfin $72 + 27$, poids de la maſſe totale dans l'eau $= 99$, comme l'exige le problême.

SOLUTION.

Nommez x le nombre des livres d'or qu'il y a dans la maſſe ; cela étant le nombre $106 - x$ déſignera combien il s'y trouve de livres d'argent ; & pour trouver le poids de l'or dans l'eau, je dis, ſi 19 livres d'or péſent 18 livres dans l'eau, que péſera x ? la réponſe eſt $\frac{18x}{19}$: de plus, pour trouver le poids de l'argent dans l'eau, je dis, ſi 10 livres d'argent péſent 9 livres dans l'ean, quel ſera le poids de $106 - x$? & la réponſe eſt $\frac{954 - 9x}{10}$; j'ajoûte enſemble ces deux poids, & leur ſomme eſt $\frac{18x}{19} + \frac{954 - 9x}{10}$; mais ſuivant le problême, le poids de toute la maſſe dans l'eau eſt de 99 livres ; ainſi l'équation eſt $\frac{18x}{19} + \frac{954 - 9x}{10} = 99$; donc $18x + \frac{18126 - 171x}{10} = 1881$; donc $180x + 18126 - 171x = 18810$, c'eſt-à-dire, $9x + 18126 = 18810$; donc $9x = 18810 - 18126 = 684$; donc x, nombre des livres d'or dans la maſſe $= 76$; & $106 - x$, nombre des livres d'argent $= 30$.

N B. Nous avons ſuppoſé ici comme une choſe accordée, que tous les corps de la même gravité ſpécifique, péſent dans l'eau proportionellement à leurs peſanteurs dans l'air, ce qui eſt facile à démontrer par l'Hydroſtatique, dont pluſieurs expériences ne laiſſent aucun doute ſur ce ſujet :

jet: par exemple, ſi le poids d'une certaine quantité d'or peſée dans l'air eſt à ſon poids, ſi l'on péſe cette même quantité dans l'eau, comme 19 à 18, le poids d'une quantité quelconque d'or peſée dans l'air, ſera à ſon poids, ſi l'on péſe cette même quantité dans l'eau, comme 19 à 18; & la même obſervation eſt applicable à l'argent, avec cette différence ſeulement, que comme la gravité ſpécifique de l'argent eſt moindre que celle de l'or, la proportion dont il s'agit, ſera autre, étant comme 10 à 9, & quelquefois comme 11 à 10.

Probleme 22.

47. *Un Rentier place une certaine ſomme d'argent à 6 pour* 100 *d'intérêt ſimple: cet intérêt au bout de dix ans ſe trouve égaler le capital à* 12 *livres près. On demande quelle ſomme a été placée à intérêt.*

Rép. La ſomme étoit de 30 livres, & l'intérêt de $18=30-12$: car comme une ſomme de 100 livres eſt à ſon intérêt annuel de 6 livres, ainſi un capital de 30 livres eſt à ſon intérêt annuel 1. 8 de livre; & par conſéquent l'intérêt montera à 18 livres au bout de 10 ans.

Solution.

Appellez le nombre de livres, qui forme cette ſomme, x; cela étant, vous trouverez l'intérêt pour un an en diſant, ſi 100 livres de capital donnent 6 livres d'intérêt, que donnera le capital x? & la réponſe ſera $\frac{6x}{100}$; ce ſera-là l'intérêt de x pour un an, & par cela même l'intérêt pour dix ans ſera $\frac{60x}{100}$, ou $\frac{6x}{10}$ ou $\frac{3x}{5}$: mais ſuivant le problême, cet intérêt doit être $x-12$; car il manque 12 livres pour que les intérêts échus au bout de dix ans égalent le capital, par la ſuppoſition; donc $x-12=\frac{3x}{5}$; donc $5x-60=3x$; donc $5x-3x-60=0$, c'eſt-à-dire $2x-60=0$; donc $2x=60$, & $x=30$, & $\frac{3x}{5}$; c'eſt-à-dire, l'intérêt de 10 ans $=18$ livres.

Probleme 23.

48. *Un Rentier place* 98 *livres ſt. une partie à* 5 *pour* 100, *& l'autre partie à* 6 *pour* 100 *d'intérêt ſimple; & tout l'intérêt au bout de quinze ans monte à* 81 *livres. Quelles ſont les deux parties.*

Rép. La partie à 5 pour 100 étoit de 48 livres, & l'autre à 6 pour 100 de 50 livres: car en premier lieu, $48+50=98$; & de plus, l'intérêt an-

annuel de 48 livres ſt. à 5 pour 100 monte à 2 livres 8 ſchellings; & l'intérêt annuel de 50 livres à 6 pour 100 eſt de 3 livres; donc l'intérêt total monte à 5 livres 8 ſchellings par an; & par conſéquent à 81 livres en 15 ans.

SOLUTION.

Appellez x la partie placée à 5 pour 100; donc l'autre partie placée à 6 pour 100 ſera $98-x$; pour trouver l'intérêt annuel de x dites, ſi 100 livres de capital donnent 5 livres d'intérêt, que donnera x? & la réponſe ſera $\frac{5x}{100}$: enſuite, par rapport à l'autre partie dites, ſi 100 de capital donnent 6 pour 100 d'intérêt, que donneront $98-x$? & la réponſe ſera $\frac{588-6x}{100}$: ajoûtez enſemble ces deux intérêts, ſavoir $\frac{5x}{100}$ & $\frac{588-6x}{100}$, & la ſomme totale ſera $\frac{5x+588-6x}{100}$, c'eſt-à-dire $\frac{588-x}{100}$; c'eſt-là l'intérêt que les deux parties donnent dans l'eſpace d'un an; ainſi en 15 ans cet intérêt monte à $\frac{8820-15x}{100}$; mais il monte à 81 livres, par la ſuppoſition; donc $\frac{8820-15x}{100}=81$; donc $8820-15x=8100$; donc $8820=15x+8100$; donc $15x=8820-8100=720$; donc x, c'eſt-à-dire la partie placée à 5 pour $100=48$ livres; & $98-x$, qui eſt la partie placée à 6 pour $100=50$ livres, comme il a été dit.

PROBLEME 24.

49. *Quelqu'un engage un domeſtique pour un an, ou 12 mois, & lui promet 6 livres ſt. en argent, avec un habit de livrée, dont ils fixent enſemble la valeur: mais au bout de ſept mois, le maître mécontent du domeſtique le congédie en lui laiſſant ſon habit, & lui donne outre cela 50 ſchellings en argent; ce qui étoit tout ce qui pouvoit lui revenir pour le tems de ſon ſervice: je demande la valeur de l'habit.* /10

Rép. La valeur de l'habit étoit de 48 ſchellings: car en ce cas la ſomme totale de ſes gages pour 12 mois auroit été de 168 ſchellings; & par la règle de trois, ſes gages pour 7 mois ſeroient 98 ſchellings, d'où retranchant 48 ſchellings pour la valeur de l'habit, il reſte la ſomme de 50 ſchellings, qui lui eſt payée en argent.

SOLUTION.

Mettez x pour la valeur de l'habit exprimée en ſchellings; cela étant, tous ſes gages pour 12 mois ſeront $x+120$; & ſes gages pour 7 mois

pourront ſe trouver par la règle de trois, en diſant, comme 12 eſt à 7, ainſi $x+120$ eſt à $\frac{7x+840}{12}$; mais ſuivant le problême, ſes gages pour 7 mois ont été l'habit & 50 ſchellings en argent, c'eſt-à-dire $x+50$; donc $x+50=\frac{7x+840}{12}$; donc $12x+600=7x+840$; donc $12x-7x+600=840$; c'eſt-à-dire, $5x+600=840$; donc $5x=840-600=240$; donc x, valeur de l'habit exprimée en ſchellings, eſt 48.

Probleme 25.

50. *Quelqu'un diſtribue 20 ſchellings à 20 mendians, donnant 6 ſous par tête aux uns, & 16 ſous par tête aux autres: je demande le nombre des uns & des autres.*

Rép. Il y a eu 8 mendians, qui ont reçu chacun 6 ſous; & 12 qui en ont reçu chacun 16: car premiérement, $8+12=20$ mendians; & puiſque huit fois 6 ſous valent 4 ſchellings, & douze fois 16 ſous, 16 ſchellings, nous aurons en ſecond lieu, $4+16=20$ ſchellings.

Solution.

Soit le nombre des mendians qui ont reçu 6 ſous par tête nommé x; cela étant puiſqu'il y a eu 20 mendians en tout, on pourra déſigner le nombre de ceux qui ont reçu chacun ſeize ſous par $20-x$: le nombre de ſous reçu par les premiers, ſera $6x$, & le nombre de ſous qui a été reçu par les autres, ſera $\overline{20-x}\times 16$, c'eſt-à-dire, $320-16x$; & par conſéquent le nombre total de ſous reçus $=6x+320-16x$, ou $320-10x$; mais ſuivant le problême, il y a eu en tout de donné 20 ſchellings, ou 240 ſous; donc $320-10x=240$; donc $10x+240=320$; donc $10x=320-240=80$; par conſéquent x, nombre de ceux qui ont reçu ſix ſous par tête, eſt 8, & $20-x$, nombre de ceux qui ont reçu chacun 16 ſous, $=12$.

Probleme 26.

51. *On demande de changer 24 ſchellings en 24 piéces, dont les unes ſoient des piéces de neuf ſous, & les autres des piéces de treize ſous & demi.*

Rep. Il doit y avoir 8 piéces de neuf ſous, & 16 piéces de treize ſous & demi: car premiérement $8+16$ font 24 piéces; & puiſque 8 piéces de neuf ſous ſont équivalentes à 6 ſchellings, & 16 piéces de treize ſous & demi à 18 ſchellings, nous aurons, en ſecond lieu, $6+18=24$ ſchellings.

Solution.

Soit x le nombre des piéces de neuf ſous, & par conſéquent $24-x$ celui des piéces de treize ſous & demi: or le nombre des demi-ſous équi-

va-

valent au premier eſt $18x$, à cauſe qu'il y a 18 demi-ſous dans chaque piéce de 9 ſous; & le nombre des demi-ſous équivalent à l'autre eſt $\overline{24-x} \times 27$, ou $648-27x$, à cauſe qu'il y a 27 demi-ſous dans chaque piéce de treize ſous & demi; donc le nombre de demi-ſous équivalent à la ſomme totale ſera $18x+648-27x$, c'eſt-à-dire, $648-9x$; mais ſuivant le problême, le tout monte à 24 ſchellings, ou 576 demi-ſous; donc $648-9x=576$; donc $9x+576=648$; donc $9x=648-576=72$; donc x, nombre des piéces de neuf ſous eſt 8; & $24-x$, nombre des piéces de treize ſous & demi $=16$.

PROBLEME 27.

52. *Deux voyageurs*, A & B, *ſe mettent en chemin*, A *avec* 100 *livres*, & B *avec* 48: *ils rencontrent une troupe de voleurs, qui prennent à* A *le double de ce qu'ils prennent à* B, & *qui laiſſent à* A *le triple de ce qu'ils laiſſent à* B, *je demande combien ils ont pris à chacun d'eux.*

Rép. Ils ont pris 44 livres à *B*, & le double, c'eſt-à-dire, 88 livres à *A*: ainſi il reſte à *B* 4 livres & à *A* $12=3\times4$.

SOLUTION.

Nombre de livres pris à B, x.
à A, $2x$.
Laiſſé à B, $48-x$.
Laiſſé à A, $100-2x$.

Mais ſuivant le problême, ils ont laiſſé à *A* le triple de ce qu'ils ont laiſſé à *B*, c'eſt-à-dire, trois fois $48-x$, ou $144-3x$; donc $100-2x=144-3x$; donc $100-2x+3x=144$, c'eſt-à-dire, $100+x=144$; donc x, qui eſt la ſomme priſe à $B=144-100=44$; & $2x$, ou la ſomme priſe à A, $=88$.

PROBLEME 28.

53. *Une citerne qui ſeroit remplie en* 12 *minutes de tems par deux tuyaux qui s'y déchargeroient, le ſeroit en* 20 *minutes par un ſeul de ces tuyaux: je demande en combien de tems elle le ſeroit par l'autre tuyau ſeul.*

Rép. En 30 minutes: car à ce compte, le tuyau rendroit dans l'eſpace d'une minute $\frac{1}{30}$ de la quantité d'eau requiſe pour remplir la citerne, & $\frac{12}{30}$ ou $\frac{2}{5}$ en 12 minutes: mais l'autre tuyau rend en 12 minutes $\frac{12}{20}$ ou $\frac{3}{5}$ de la même quantité d'eau par la ſuppoſition; donc les deux tuyaux donneront en 12 minutes $\frac{1}{5}$, c'eſt-à-dire, de quoi remplir la citerne.

SOLUTION.

Nommez x le nombre d'hommes qui formoit le côté du quarré: cela étant $x \times x$ ou xx ſera le nombre total qui formoit le quarré; mais ſuivant le problême, il reſtoit alors 60 hommes; donc $xx+60$ déſigne l'armée entiére: ſuppoſons préſentement que le côté du quarré ſoit $x+1$; cela étant $\overline{x+1} \times \overline{x+1}$, ou $xx+2x+1$, ſera le nombre d'hommes requis pour former cette figure; mais ſuivant le problême, ce dernier nombre $xx+2x+1$ doit ſurpaſſer de 41 le vrai nombre d'hommes $xx+60$; donc $xx+60$ étant ſouſtraits de $xx+2x+1$, il doit reſter 41; ſi l'on ſouſtrait $xx+60$ de $xx+2x+1$, il reſte $+2x-59$; donc $2x-59=41$; donc $2x=41+59=100$; donc x, qui eſt le nombre qui forme un des côtés du quarré $=50$; & $xx+60$, c'eſt-à-dire, le nombre total de l'armée $=2560$, comme nous l'avons dit.

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x+1 \\ \hline xx+x+1 \\ \quad +x \\ \hline xx+2x+1. \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} xx+2x+1 & \\ xx & *+60 \\ \hline & *+2x-59. \end{array}$$

PROBLEME 30.

55. *Il y a deux villes éloignées l'une de l'autre de 154 milles, d'où partent dans le même tems deux hommes dans le deſſein de ſe rencontrer, l'un d'eux faiſant 3 milles en 2 heures, & l'autre 5 milles en 4 heures: je demande le tems qui s'étoit écoulé, & le chemin qu'ils avoient fait; quand ils ſe ſont rencontrés.*

Rép. Comme la ſuppoſition porte que nos voyageurs ſont partis dans le même tems, & que c'eſt auſſi dans le même tems qu'ils doivent s'être rencontrés, je dis que leur rencontre s'eſt faite au bout de 56 heures: car ſi en 2 heures le premier a fait 3 milles, en 56 heures il doit en avoir fait 84, par la règle de trois; pareillement, ſi en 4 heures le ſecond fait 5 milles, en 56 heures il doit faire 70 milles; & $84+70=154$ milles, c'eſt-à-dire, à la diſtance totale.

SOLUTION.

Soit x le nombre d'heures que chacun d'eux a été en chemin: pour trouver combien de milles le premier a faits, dites, ſi en 2 heures il a fait 3 milles, combien en a-t-il faits dans le nombre x d'heures? & la réponſe eſt $\frac{3x}{2}$: dites de-même par rapport au ſecond, ſi en 4 heures il a fait 5 milles, combien en a-t-il faits dans le nombre x d'heures? & la réponſe eſt $\frac{5x}{4}$; donc les deux chemins qu'ils ont parcourus, ajoûtés enſemble,

ſont $\frac{3x}{2}+\frac{5x}{4}$; mais le chemin total étoit de 154 milles; donc $\frac{3x}{2}+\frac{5x}{4}$ $=154$; donc $3x+\frac{10x}{4}=308$; donc $12x+10x$, c'eſt-à-dire, $22x=1232$; donc x, qui déſigne le nombre d'heures qu'ils ont été en chemin, $=56$; donc $\frac{3x}{2}$, nombre des milles que le premier a faits, $=84$, & $\frac{5x}{4}$, nombre des milles que le ſecond a faits, $=70$, comme nous l'avons dit.

Problème 31.

56. *Quelqu'un part d'un endroit, & avance à raiſon de 7 milles en 5 heures; & 8 heures après un autre part du même endroit, & parcourt le même chemin à raiſon de 5 milles en 3 heures: je demande combien de tems & juſqu'où le premier doit avoir marché avant que d'être joint par le ſecond.*

Rép. Il doit marcher durant 50 heures, & faire par conſéquent 70 milles; le ſecond doit marcher durant 50 heures — 8, ou 42 heures, & par conſéquent faire auſſi 70 milles; puis donc qu'ils ſont partis du même endroit, & que le ſecond voyageur a fait autant de chemin que le premier, il faut néceſſairement qu'il l'ait joint.

Solution.

Soit x le nombre d'heures que le premier a été en voyage; & par conſéquent $x-8$ le nombre d'heures que le ſecond a marché avant de joindre le premier: cela étant, pour déterminer le nombre de milles que le premier a faits, dites, ſi en 5 heures il fait 7 milles, combien en fera-t-il dans le nombre x d'heures? & la réponſe eſt $\frac{7x}{5}$; puis dites par rapport à l'autre, ſi en 3 heures il fait 5 milles, combien en fera-t-il dans le nombre d'heures $x-8$, & la réponſe eſt $\frac{5x-40}{3}$; mais comme les deux voyageurs partent du même endroit, & doivent auſſi arriver à la fois au même endroit, il s'enſuit qu'ils parcourent la même étendue d'eſpace; donc $\frac{5x-40}{3}=\frac{7x}{5}$; donc $5x-40=\frac{21x}{5}$; donc $25x-200=21x$; donc $25x-21x-200=0$, c'eſt-à-dire, $4x-200=0$; donc $4x=200$; & x c'eſt-à-dire le nombre d'heures que le premier a marché, $=50$; donc $x-8$, ou le nombre d'heures que le ſecond a marché $=42$; $\frac{7x}{5}$, qui déſigne les milles que le premier a faits $=70$; & $\frac{5x-40}{3}$; c'eſt-à-dire les milles que le ſecond a faits $=70$, comme il a été dit.

Pro-

PROBLEME 32.

57. *Quelqu'un regarde à une montre, & interrogé quelle heure il eſt, répond, entre 5 & 6; mais comme on vouloit de lui une réponſe plus préciſe, il dit, que dans cet inſtant l'aiguille des minutes & celle des heures indiquoient le même point: on demande quel tems du jour il étoit alors.*

Rép. Préciſément 5 heures $+\frac{5}{11}$ d'une heure, ou 27 minutes & environ 16 ſecondes au-delà de 5 heures.

Pour que le Lecteur ſe forme une idée plus diſtincte de cette réponſe, & de la ſolution ſuivante, appellons A le point de la platine où les deux aiguilles ſe trouvent au même inſtant entre 5 & 6 heures; cela étant, puiſque l'aiguille qui marque les heures, ſe meut depuis 12 juſqu'à 5 en 5 heures, ſi le tems de $\frac{5}{11}$ d'une heure a été bien aſſigné, l'aiguille des heures doit ſe mouvoir depuis 12 juſqu'au point A, en 5 heures & $\frac{5}{11}$ d'une heure: de plus, à 5 heures préciſes l'aiguille des minutes marquoit 12, & ſuivant ce calcul, $\frac{5}{11}$ d'une heure après elle ſe trouvoit au point A; donc l'aiguille des minutes a avancé depuis 12 juſqu'à A en $\frac{5}{11}$ d'une heure; le cas étant ainſi poſé, ſavoir, que l'aiguille des heures ſe meut depuis 12 juſqu'à A en 5 heures & $\frac{5}{11}$ d'une heure, & que l'aiguille des minutes parcourt le même eſpace en $\frac{5}{11}$ d'une heure, voyons préſentement comment ces tems s'accordent avec les viteſſes connues des deux aiguilles; car celle des minutes fait ſa révolution dans l'eſpace d'une heure, au-lieu que celle des heures met 12 heures à faire ſon tour; ainſi l'aiguille des heures ſe meut douze fois plus lentement que celle des minutes; mais ſuivant notre calcul, l'aiguille des heures a paſſé depuis 12 juſqu'à A en 5 heures & $\frac{5}{11}$ d'une heure, & l'aiguille des minutes a parcouru le même eſpace en $\frac{5}{11}$ d'une heure; donc ſi le tems demandé a été bien aſſigné, 5 heures & $\frac{5}{11}$ d'une heure doivent être 12 fois autant que $\frac{5}{11}$ d'une heure; & la choſe ſe trouve être ainſi; car 12 fois $\frac{5}{11} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$.

SOLUTION.

Déſignez par x la partie ou les parties d'une heure depuis 5 heures juſqu'à l'inſtant demandé; il faut donc que l'aiguille des heures ait avancé depuis 12 juſqu'en A, en $x+5$ heures, & l'aiguille des minutes a parcouru le même eſpace dans le tems x; & $x+5$ ſera à x comme 12 à 1; multipliez l'un par l'autre les termes extrêmes & les termes moyens de cette derniére proportion, ſuivant l'Art. 15. & vous aurez $12x = x+5$ heures; & $12x-x$, c'eſt-à-dire $11x = 5$ heures; & $x = \frac{5}{11}$ d'une heure.*

PRO-

* Si les aiguilles avoient répondu au même point entre 6 & 7 heures, x auroit été $\frac{7}{11}$: en gé-

Probleme 33.

58. *Une montre a deux aiguilles qui tournent ſur le même centre; celle qui va le plus vite, fait ſa révolution en* 12 *heures, & celle, dont le mouvement eſt le plus lent, fait la ſienne en* 16 *heures: on demande quand ces deux aiguilles indiqueront le même point.*

Rép. Au bout de 48 heures.

Pour faciliter le calcul, ſuppoſons que les deux aiguilles partent du même point; il eſt clair alors que celle qui ſe meut avec le plus de viteſſe devancera d'abord l'autre, qui ſe meut plus lentement, & aura gagné un quart de cercle, un demi-cercle, trois quarts de cercle, & à la fin un cercle entier ſur l'autre, auquel cas elles ſe retrouveront pour la premiére fois enſemble, depuis qu'elles ſont parties enſemble du même point. Il s'agit donc proprement de déterminer le tems que l'aiguille, qui ſe meut avec le plus de viteſſe, doit employer pour gagner une révolution ſur l'aiguille, qui ſe meut le plus lentement: puis donc qu'en 48 heures l'aiguille, qui ſe meut le plus lentement, fait 3 révolutions, & que l'autre aiguille en fait 4, il s'enſuit que le période demandé eſt de 48 heures.

Solution.

Soit x le nombre des heures qu'on demande, pour trouver enſuite le nombre des révolutions que l'aiguille, dont le mouvement eſt le plus lent, fait dans le tems x, dites, ſi en 16 heures cette aiguille achéve une révolution, combien en achévera-t-elle dans le tems x? & la réponſe ſera $\frac{x}{16}$; puis à l'égard de l'aiguille qui ſe meut avec le plus de viteſſe, dites, ſi en 12 heures elle fait une révolution, combien en fera-t-elle dans le tems x? & la réponſe ſera $\frac{x}{12}$; donc $\frac{x}{16}$ eſt le nombre des révolutions de l'aiguille dont le mouvement eſt le plus lent, & $\frac{x}{12}$ le nombre des révolutions que l'aiguille, qui ſe meut avec le plus de viteſſe, a faites dans le même tems x: or pour ſavoir combien l'aiguille, qui ſe meut avec le plus de viteſſe, a gagné ſur l'autre, je ſouſtrais $\frac{x}{16}$ de $\frac{x}{12}$, & le reſte eſt $\frac{x}{12} - \frac{x}{16}$; ou $\frac{x}{48}$; mais comme x eſt le tems où les deux aiguilles doivent ſe retrouver au même point, il eſt manifeſte par ce qui a été dit,

général, l'heure au-delà de laquelle les aiguilles ſe trouvent, doit ſervir de numérateur à la fraction, & le nombre 11 en être le dénominateur: quand les deux aiguilles marquent 12, x eſt $= \frac{1}{11}$ d'une heure, comme nous l'avons dit.

dit, que l'aiguille, qui ſe meut avec le plus de viteſſe, a gagné une révolution entiére ſur celle qui ſe meut le plus lentement; donc $\frac{x}{48}=1$. & $x=48$, comme nous l'avons dit.

PROBLEME 34.

59. *Un Cabaretier a deux ſortes de vins, dont l'un vaut* 20 *ſous le pot, & l'autre* 12 *ſous: il voudroit en mêlant ces deux vins faire* 100 *pots, à* 14 *ſous le pot: la queſtion eſt combien il doit prendre de pots de chaque ſorte.*

Rép. Il doit y avoir 25 pots de la meilleure ſorte, & 75, c'eſt-à-dire, $100-25$ de la plus mauvaiſe: car 25 pots à 20 ſous le pot ſont 500 ſous; & 75 pots à 12 ſous le pot ſont 900 ſous; donc la ſomme totale monte à 1400 ſous; laquelle diviſée par 100, nombre des pots, donne pour quotient 14.

SOLUTION.

Appellez x le nombre des pots de la meilleure ſorte, & par conſéquent le nombre des autres pots $100-x$; cela étant, la grandeur $20x$ exprimera en ſous le prix de la meilleure ſorte, $1200-12x$ celui de la plus mauvaiſe, & $8x+1200$ celui du tout: mais 100 pots à 14 ſous le pot montent à 1400 ſous; donc $8x+1200=1400$; $8x=200$; & x, nombre des pots de la meilleure ſorte $=25$; & $100-x$, nombre des pots de la plus mauvaiſe ſorte $=75$.

PROBLEME 35.

60. *On demande de partager* 90 *en* 4 *parties telles, que la premiére étant augmentée de* 2, *la ſeconde diminuée de* 2, *la troiſiéme multipliée par* 2, *& la quatriéme diviſée par* 2, *elles ſoient toutes égales entre elles.*

Rép. Les parties ſont 18, 22, 10 & 40: car $18+22+10+40=90$; & $18+2=22-2=10\times 2=\frac{40}{2}=20$.

SOLUTION.

1°. Deſignez la premiére partie par x; cela étant, ſi cette premiére partie eſt augmentée de 2, la ſomme ſera $x+2$; donc la ſeconde partie diminuée de 2, la troiſiéme multipliée par 2, & la quatriéme diviſée par 2, doivent toutes être égales à $x+2$.

2°. Mais ſi la ſeconde partie, après être diminuée de 2 ſe trouve $=x+2$, elle doit avant cette diminution, avoir été $=x+4$.

3°. Si la troiſiéme partie étant doublée ou multipliée par 2 eſt $x+2$,

elle doit avant la multiplication avoir été la moitié de $x+2$, c'eſt-à-dire, $\frac{x}{2}+1$.

Enfin, ſi la moitié du quatriéme nombre eſt $x+2$, ce quatriéme nombre lui-même ſera $2x+4$; de ſorte enfin que les parties ſe trouvent être x, $x+4$, $\frac{x}{2}+1$, & $2x+4$; ajoûtez ces parties enſemble, & la ſomme ſera $4x+\frac{x}{2}+9$; ce qui nous donne cette équation $4x+\frac{x}{2}+9=90$; donc $8x+x+18=180$; donc $9x=162$; & x, la premiére partie $=18$, donc $x+4$, la ſeconde partie $=22$; & $\frac{x}{2}+1$, la troiſiéme partie $=10$; & $2x+4$, la quatriéme partie $=40$.

Probleme 36.

61. *Un Berger menant paître ſes brebis en tems de guerre, rencontre une compagnie de ſoldats, qui lui enlévent la moitié de ſon troupeau + la moitié d'une brebis; il éprouve le même traitement de la part d'une ſeconde compagnie de ſoldats, puis d'une troiſiéme, & enfin d'une quatriéme, chacune d'elles lui enlevant la moitié de ce qui lui reſtoit + la moitié d'une brebis; de ſorte qu'à la fin il ne lui reſte que 7 brebis: je demande combien il en avoit d'abord.*

Rép. Son troupeau avoit conſiſté en 127 brebis; & ſi la premiére compagnie lui avoit enlevé la moitié de ſon troupeau, elle lui auroit laiſſé $63\frac{1}{2}$ brebis; mais en lui prenant une $\frac{1}{2}$ brebis de plus, elle ne lui en laiſſa que 63; de-même, la ſeconde compagnie lui en laiſſa 31, la troiſiéme 15, & la quatriéme 7.

N. B. Avant de donner la ſolution de ce Problême, je dois rappeller au Lecteur ce qui a été dit ci-deſſus (Introd. Art. 13.) ſavoir, qu'on peut prendre la moitié d'une fraction de deux maniéres, en prenant la moitié du numérateur, ou en doublant le dénominateur.

Solution.

Déſignez par x le nombre des brebis qu'il avoit d'abord. Si la premiére compagnie avoit ſeulement pris la moitié du troupeau, elle lui auroit laiſſé l'autre moitié, ſavoir $\frac{x}{2}$; mais elle prit la moitié $+\frac{1}{2}$ brebis; donc il ne garda que $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ ou $\frac{x-1}{2}$; ſi la ſeconde compagnie avoit ſeulement pris la moitié de ce qui lui reſtoit, elle lui auroit laiſſé la moitié, ſavoir $\frac{x-1}{4}$; mais en lui prenant $\frac{1}{2}$ brebis de plus, elle ne lui laiſſa que $\frac{x-1}{4}-\frac{1}{2}$, c'eſt-

c'eſt-à-dire, $\frac{2x-2-4}{8}$, ou $\frac{2x-6}{8}$, ou $\frac{x-3}{4}$; pareillement la troiſiéme compagnie lui laiſſa $\frac{x-3}{8}-\frac{1}{2}$, ou $\frac{2x-6-8}{16}$, ou $\frac{2x-14}{16}$, ou $\frac{x-7}{8}$; & la quatriéme compagnie lui laiſſa $\frac{x-7}{16}-\frac{1}{2}$, ou $\frac{x-15}{16}$; mais elle ne lui laiſſa que 7 brebis, par la ſuppoſition; donc $\frac{x-15}{16}=7$, & $x-15=112$; & $x=127$.

PROBLEME 37.

62. *Quelqu'un achette un certain nombre d'œufs, dont il paye la moitié à raiſon de 2 pour un ſou, & l'autre moitié à raiſon de 3 pour un ſou; il vend enſuite ſes œufs à raiſon de 5 pour deux ſous, &, contre ſon attente, trouve qu'il perd un ſou à ce marché: quel étoit le nombre de ſes œufs?*

Rép. Ce nombre étoit 60; la moitié à raiſon de 2 pour un ſou lui coutoit 15 ſous, & l'autre moitié à raiſon de 3 pour un ſou, lui coutoit 10 ſous; & le tout 25 ſous: mais 60 œufs vendus à raiſon de 5 pour 2 ſous, ne lui rendent que 24 ſous, comme il paroît par la règle de proportion; donc il a perdu un ſou à ce marché.

SOLUTION.

Que le nombre des œufs ſoit nommé x; & dites, ſi 2 œufs coutent un ſou, que coutera $\frac{x}{2}$, c'eſt-à-dire la moitié des œufs? & la réponſe ſera $\frac{x}{4}$; & par le même raiſonnement, l'autre moitié, à raiſon de 3 œufs pour un ſou, lui coutera $\frac{x}{6}$: ainſi il doit payer en tout $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}$, ou $\frac{5x}{12}$: puis dites, en vendant 5 œufs pour deux ſous, pour combien a été vendu le nombre x d'œufs? & la réponſe ſera $\frac{2x}{5}$; donc le nombre $\frac{2x}{5}$ marque combien de ſous il a reçu pour ſes œufs; retranchez ce dernier nombre de $\frac{5x}{12}$, c'eſt-à-dire, du nombre de ſous qu'il a payé, & le reſte $\frac{5x}{12}-\frac{2x}{5}$, ou $\frac{x}{60}$ exprimera ſa perte; mais par la ſuppoſition il a perdu un ſou; donc $\frac{x}{60}=1$ & x, le nombre d'œufs, ſera 60.

PROBLEME 38.

63. *Quelqu'un tire une certaine quantité de vin d'une futaille pleine qui tenoit 81 pots; & ayant enſuite rempli la futaille d'eau, il tire autant de ce mé-*

mêlange, qu'il avoit tiré auparavant de vin pur, & continue à faire la même chose jusqu'à quatre fois; de sorte qu'à la fin il ne reste plus dans la futaille que 16 pots de vin pur, le reste étant de l'eau: je demande combien il a tiré chaque fois.

Rép. Il a tiré chaque fois 27 pots. Comme il y avoit 81 pots de vin dans la futaille, il doit en avoir tiré $\frac{27}{81}$ ou $\frac{1}{3}$ de vin pur: ce qui restoit de vin étoit donc $= 54$ pots; la futaille ayant ensuite été remplie d'eau, il a tiré de nouveau $\frac{1}{3}$ du tout, & les 54 pots de vin ont fourni pour cela $\frac{1}{3}$, de sorte qu'il n'est plus resté dans la futaille que $\frac{2}{3}$ de 54 pots, c'est-à-dire, 36 pots; de-même, il est resté $\frac{2}{3}$ de 36, c'est-à-dire 24, après qu'il a tiré 27 pots pour la troisiéme fois; & enfin, après qu'il a tiré pour la quatriéme fois 27 pots, la futaille n'a plus contenu que $\frac{2}{3}$ de 24, c'est-à-dire 16 pots de vin pur, comme l'exige le problème.

Solution.

Comme il y a eu la même quantité de liqueur dans la futaille, savoir 81 pots, (la futaille ayant d'abord été pleine, & ensuite remplie jusqu'à trois fois) & que la même quantité de liqueur en a été tirée chaque fois, il s'ensuit, que la même quantité de liqueur doit s'être trouvée dans la futaille après qu'une partie en a été tirée. Si vous nommez cette dernière quantité x, $\frac{x}{81}$ marquera quelle partie ou quelles parties de toute la liqueur contenue dans la futaille, & par cela même du vin, est restée, après qu'une partie en a été tirée; ainsi la quantité de vin, qu'il y a eu de reste chaque fois, peut être déterminée de la manière suivante; il y a eu au commencement 81 pots; donc il est resté $81 \times \frac{x}{81}$, ou x, après qu'une partie de la liqueur a été tirée de la futaille pour la premiére fois; & $x \times \frac{x}{81}$, ou $\frac{x^2}{81}$ doit être resté après la seconde fois; $\frac{x^2}{81} \times \frac{x}{81}$, ou $\frac{x^3}{6561}$, après la troisiéme fois; & $\frac{x^3}{6561} \times \frac{x}{81}$, ou $\frac{x^4}{531441}$ après la quatriéme; mais suivant le problème, il est resté après la quatriéme fois 16 pots; donc $\frac{x^4}{531441} = 16$; donc $x^4 = 8503056$; donc $x^2 = \sqrt{8503056} = 2916$; donc x, ou le nombre de pots qu'il y a eu chaque fois dans la futaille, après qu'une partie en a été tirée $= \sqrt{2916} = 54$; donc $81 - x$, ou la quantité tirée chaque fois, $= 27$, comme nous l'avons dit.

Pro-

PROBLEME 39.

64. *On demande de partager le nombre de 90 en deux parties telles, que l'une ſoit à l'autre comme 2 à 3.*

Rép. Les nombres ſont 36 & 54: car premiérement, $36+54=90$; & en ſecond lieu, ſi l'on diviſe 36 & 54 par 18, les quotiens ſeront 2 & 3; d'où il ſuit, que 36 eſt à 54, comme 2 à 3; car la proportion entre les nombres qu'on diviſe, reſte la même, ſi la diviſion ſe fait par le même nombre; & par conſéquent ſi, après cette diviſion commune, les quotiens ſe trouvent être l'un à l'autre comme 2 à 3, il faut que les dividendes ſoient entre eux dans la même raiſon.

SOLUTION.

Déſignez la plus petite partie par x, & l'autre par $90-x$; cela étant, x ſera à $90-x$ comme 2 à 3, par la ſuppoſition; mais par l'Art. 15, toutes les fois qu'il y a quatre quantités proportionelles, le produit des extrêmes ſera égal à celui des moyennes: les extrêmes ſont ici x & 3, dont le produit eſt $3x$; & les quantités moyennes ſont $90-x$ & 2, dont le produit eſt $180-2x$; donc $3x=180-2x$; donc $5x=180$; & x, la plus petite partie $=36$; & $90-x$, la plus grande $=54$.

PROBLEME 40.

65. *Deux poids, l'un de 5 livres, l'autre de 7, ſont ſuſpendus aux bouts d'une verge, qui a 36 pouces de long, je demande quel point de la verge devroit être ſoutenu pour que les deux poids fuſſent en équilibre, ou, ce qui revient au même, je demande à quelle diſtance ce point eſt, tant de l'un que de l'autre bout de la verge.*

Rép. Le point d'équilibre eſt à la diſtance de 15 pouces du grand poids, & par conſéquent à la diſtance de $36-15$, ou 21 pouces du plus petit: car ſi les poids avoient été égaux, le point d'équilibre ſe ſeroit trouvé préciſément au milieu de la verge; mais comme un des poids eſt plus petit que l'autre, le point qu'il s'agit de déterminer, ſera proportionellement plus près du grand poids: or 15 eſt à 21 comme $\frac{15}{3}$ à $\frac{21}{3}$, c'eſt-à-dire, comme 5 à 7.

SOLUTION.

Nommez x la diſtance où le point d'équilibre eſt du plus grand poids, & $36-x$ ſa diſtance du plus petit; cela étant, x ſera à $36-x$ comme 5 à 7: en changeant cette analogie en équation, ſuivant l'Art. 15, nous

aurons $7x = 180 - 5x$; donc $12x = 180$; & x, diſtance où le point d'équilibre eſt du plus grand poids $= 15$, & $36 - x = 21$.

Probleme 41.

66. *On demande un nombre, qui étant ajoûté, d'un côté à* 36, *& de l'autre à* 52, *fera que la premiére ſomme ſera à la derniére, comme* 3 *à* 4.

Rép. Ce nombre eſt 12: car $36 + 12$ ſont à $52 + 12$, comme 48 à 64, comme $\frac{48}{16}$ à $\frac{64}{16}$, comme 3 à 4.

Solution.

Soit le nombre qu'on demande nommé x, & nous aurons cette proportion, $36 + x$ ſont à $52 + x$, comme 3 à 4; donc $144 + 4x = 156 + 3x$; donc $144 + x = 156$; donc x, le nombre cherché, $= 12$.

Probleme 42.

67. *Un Relieur me vend deux livres de papier, l'un contenant* 48 *feuilles pour* 3 *ſchellings &* 4 *ſous, & l'autre contenant* 75 *feuilles pour quatre ſchellings &* 10 *ſous, tous deux reliés pour le même prix, & tous deux d'une même ſorte de papier: je demande combien il compte pour la reliure.*

Rép. Il a compté 8 ſous pour la reliure; de ſorte que le prix du papier du premier livre étoit 32 ſous, & celui du ſecond 50 ſous: or ſi ces prix ont été bien déterminés, il faut qu'ils ayent entre eux la même raiſon qu'il y a entre les quantités de papier; & c'eſt ce qui eſt vrai auſſi: car 32 ſous ſont à 50 ſous, comme $\frac{32}{8}$ à $\frac{50}{8}$, c'eſt-à-dire, comme 16 à 25; & 48 feuilles ſont à 75 feuilles comme $\frac{48}{3}$ à $\frac{75}{3}$, c'eſt-à-dire pareillement, comme 16 à 25.

Solution.

Déſignez par x le nombre des ſous mis en compte pour la reliure; cela étant nous aurons $40 - x$ pour le prix du papier qu'il y a dans le premier livre, & $58 - x$ pour le prix de celui qu'il y a dans le ſecond; & de plus $40 - x$ à $58 - x$, comme 48 à 75; donc $2784 - 48x = 3000 - 75x$; donc $2784 + 27x = 3000$; donc $27x = 216$; & x, nombre des ſous mis en compte pour la reliure $= 8$.

Probleme 43.

68. *On demande un nombre, qui étant ajoûté ſéparément à* 15, *à* 27, *& à* 45, *donne trois nombres en proportion continue.*

N. B.

N. B. Trois nombres ſont en proportion continue quand le premier eſt au ſecond comme le ſecond eſt au troiſiéme.

Rép. Le nombre cherché eſt 9: car $15+9=24$; & $27+9=36$; & $45+9=54$; & 24 ſont à 36, comme $\frac{24}{12}$ à $\frac{36}{12}$, c'eſt-à-dire, comme 2 à 3; & 36 à 54; comme $\frac{36}{18}$ à $\frac{54}{18}$, c'eſt-à-dire auſſi, comme 2 à 3.

SOLUTION.

Appellez le nombre cherché x; cela étant nous aurons cette analogie, $x+15$ eſt à $x+27$, comme $x+27$ eſt à $x+45$; où les deux termes moyens ſont $x+27$ & $x+27$; donc $xx+60x+675=xx+54x+729$; donc $60x+675=54x+729$; donc $6x+675=729$; donc $6x=54$, & x, qui eſt le nombre cherché, $=9$.

PROBLEME 44.

69. *Quelqu'un place un certain nombre de perches en ligne droite, à d'égales diſtances l'une de l'autre, chaque intervalle ne pouvant pas contenir plus de deux perches; mais trouvant que ſa ligne n'iroit qu'à* 125 *pouces, il l'étend juſqu'à* 208 *pouces, en rendant chaque intervalle double de ce qu'il étoit auparavant. On demande le nombre des perches.*

Rép. Le nombre des perches étoit 84, & par conſéquent celui des intervalles 83; car ſi deux perches n'admettent qu'un intervalle, trois perches en admettront 2, &c. & 84 perches admettront 83 intervalles, leſquels, s'ils devoient être remplis, exigeroient 83×2, ou 166 perches; donc ſi la premiére ligne avoit été remplie, il auroit fallu $84+166$, c'eſt-à-dire, 250 perches: de plus, le nombre des perches ſuffiſant pour remplir les intervalles de la ſeconde ligne étoit 83×4, ou 332; donc ſi la ſeconde ligne avoit été remplie, elle auroit exigé $84+332$, c'eſt-à-dire, 416 perches: or ſi le nombre, que nous avons aſſigné eſt juſte, les longueurs des deux lignes doivent être entre elles, comme le nombre des perches qu'il auroit fallu pour les remplir; & c'eſt ce qui ſe trouve auſſi: car 125 pouces ſont à 208 pouces, comme 125×2 à 208×2, c'eſt-à-dire, comme 250 à 416, ce qu'il falloit demontrer.

SOLUTION.

Soit x le nombre des perches; cela étant le nombre des intervalles ſera $x-1$; & le nombre des perches ſuffiſant pour remplir les intervalles de la premiére ligne, $2x-2$; & le nombre des perches que la premiére ligne auroit exigé, ſi elle avoit été remplie, $3x-2$: de plus, le nombre des perches néceſſaire pour remplir les intervalles de la ſeconde ligne ſera $4x-4$, & par conſéquent le nombre des perches qu'il auroit fallu

pour-

pour remplir la ſeconde ligne, ſera $5x-4$, ce qui nous donne cette proportion, $3x-2$ ſont à $5x-4$, comme 125 à 208; donc $624x-416=625x-500$; donc $x-500=-416$; donc le nombre des perches eſt 84, comme il a été dit.

De la méthode de réſoudre les Problêmes, où il y a pluſieurs quantités inconnues, repréſentées par différentes lettres.

70. Jusqu'ici nous n'avons dans chaque problême fait uſage que d'une ſeule lettre, pour déſigner une quantité inconnue qui s'y trouvoit; & s'il y en avoit davantage, les autres ont tiré leurs noms des conditions du problême; mais dans des cas plus compliqués, où pluſieurs quantités ſont embarraſſées l'une dans l'autre, cette méthode ne ſe trouve guéres praticable. Pour faciliter l'opération dans ces ſortes de cas, l'Algébriſte ſe ſert d'autant de lettres différentes, qu'il y a de quantités inconnues, pourvu qu'il puiſſe trouver autant d'équations indépendantes pour déterminer leurs valeurs; voy. Art. 92: car quoique dans chaque équation où il y a pluſieurs quantités inconnues, l'une empêche qu'on ne trouve l'autre; cependant, ſi l'on peut avoir d'abord autant d'équations fondamentales qu'il y a de quantités inconnues, il ne ſera pas difficile dans pluſieurs cas, de dériver de ces équations quelques autres plus ſimples, jusqu'à ce qu'on arrive enfin à une équation, qui ne contienne qu'une ſeule quantité inconnue. Quand cela arrive, les autres inconnues ſe trouvent exterminées.

Toutes les fois qu'on propoſe deux ou plus de deux équations, ces équations doivent d'abord être préparées en les délivrant de leurs fractions, ſi elles en ont, & en diſpoſant chaque équation particuliére de telle ſorte, que toutes les quantités inconnues forment un des membres de l'équation, & les quantités connues l'autre membre; ou bien, que toutes les quantités, tant connues qu'inconnues, ſoient dans un des membres de l'équation, & zéro dans l'autre: il eſt bon auſſi, que dans chaque équation particuliére les quantités inconnues ſoient placées dans le même ordre.

En preſcrivant des règles ſur la maniére d'exterminer des quantités inconnues, je commencerai par le cas le plus ſimple, qui eſt celui de deux équations & de deux inconnues; & quand j'aurai donné, rélativement à ce cas, autant d'exemples que je jugerai néceſſaires, j'en ajoûterai enſuite d'autres, où il y aura un plus grand nombre de quantités inconnues à exterminer.

Mais je ne dois pas oublier d'avertir le Lecteur, que comme il n'eſt queſtion ici que d'équations ſimples, & de problêmes qui donnent de pareilles équations, je laiſſerai là tous les cas, dans leſquels, après avoir ex-

exterminé les inconnues, j'arriverois à des équations plus élevées : quand je traiterai des équations du second degré, je pourrai peut-être dire quelque chose de plus sur ce sujet : mais entreprendre d'expliquer toutes les différentes façons d'exterminer des quantités inconnues seroit une tâche pénible ; & pas moins ennuyeuse pour l'Ecrivain que pour le Lecteur, que je ne saurois supposer assez avancé dans l'analyse pour vouloir se donner cette peine.

Soient donc x & y les deux quantités inconnues qu'il s'agit de trouver par le secours des deux équations suivantes $4x-5y=2$, & $6x-7y=4$. Voici comment la question peut être posée ; si $4x-5y=2$, & $6x-7y=4$, quelle est la valeur de x & celle de y ? Or comme ces équations n'ont besoin d'aucune préparation, placez l'une de ces équations au-dessous de l'autre ; puis sur un morceau de papier à part multipliez la première équation ($4x-5y=2$) par 6 coëfficient de x dans la seconde, & le produit donnera cette équation $24x-30y=12$: ensuite, multipliez la seconde équation ($6x-7y=4$) par 4, coëfficient de x dans la première équation, & le produit donnera $24x-28y=16$; retranchez quelle de ces deux équations que vous voudrez de l'autre ; & l'inconnue x sera exterminée : dans le cas présent je retranche la première équation de la seconde, afin que le coëfficient de y puisse, après la soustraction, être affirmatif ;

$$\begin{array}{r} 24x-28y=16 \\ \underline{24x-30y=12} \\ *+2y=4. \end{array}$$

Cette soustraction me donne l'équation suivante, $2y=4$, que je place au-dessous des deux premières pour en avoir une troisième ; puis résolvant cette troisième équation $2y=4$, je trouve $y=2$, c'est-à-dire, une quatrième équation, que je mets au-dessous des trois autres.

Ayant ainsi déterminé la valeur de $y=2$, je substitue cette valeur au lieu de y dans la plus simple des deux premières équations, c'est-à-dire, dans l'équation $4x-5y=2$, & j'ai $4x-10=2$; donc $4x=12$ & $x=3$: égalité, dont je forme une cinquième équation ; après quoi, il ne me reste plus rien à faire ; car x étant trouvé égal à trois, & y égal à deux, ces nombres trois & deux étant substitués à la place de x & de y respectivement, satisferont aux conditions du problème, c'est-à-dire, $4x-5y=12-10=2$, & $6x-7y=18-14=4$.

1. Equ. $4x-5y=2$.
2. $6x-7y=4$.
3. $*+2y=4$.
4. $*\quad y=2$.
5. $x\quad *=3$.

Les coëfficiens de x, quantité inconnue qui devoit être exterminée dans les deux premiéres équations, étoient 4 & 6; or comme ces nombres ſont ſuſceptibles d'un diviſeur commun ſans reſte, ſavoir 2, diviſez l'un & l'autre par 2, & les quotiens ſeront 2 & 3; ainſi ſervez-vous de ces nombres 2 & 3, au-lieu de 4 & de 6, & l'équation qui en réſultera, deviendra plus ſimple: car la premiére équation multipliée par 3 au-lieu de l'être par 6, donne $12x-15y=6$; & la ſeconde équation, multipliée par 2, au-lieu de l'être par 4, donne $12x-14y=8$; & la différence de ces équations eſt $y=2$.

Voici une autre maniére d'exterminer l'inconnue x: déterminez la valeur de x rélativement à y, dans la plus ſimple des deux premiéres équations, & vous aurez une équation dans laquelle il ne ſe trouvera d'autre inconnue que y: ainſi dans l'exemple précédent, la premiére équation étoit $4x-5y=2$: par conſéquent $4x=5y+2$, & $x=\frac{5y+2}{4}$; ſubſtituez préſentement cette valeur $\left(\frac{5y+2}{4}\right)$ au-lieu de x dans la ſeconde équation, $6x-7y=4$, en faiſant $6x=\frac{30y+12}{4}$, & vous aurez cette équation, $\frac{30y+12}{4}-7y=4$; donc $30y+12-28y=16$; donc $2y+12=16$; donc $2y=4$, & $y=2$; & x, ou $\frac{5y+2}{4}=3$.

N. B. 1°. Ce qui a été dit touchant la maniére d'exterminer la quantité x, s'applique également à l'autre quantité y, excepté que ſes coëfficiens 5 & 7 n'admettent point de diviſeur commun, comme faiſoient 4 & 6.

2°. Des deux méthodes que nous venons d'indiquer, tantôt l'une ſera la plus abrégée, & tantôt l'autre, comme il paroîtra par les problêmes ſuivans.

3°. S'il y a deux quantités inconnues, & que la valeur de l'une des deux puiſſe ſe trouver en nombres entiers dans les deux équations, comparez enſemble les deux valeurs, & vous aurez la valeur de l'autre quantité inconnue, par le moyen de laquelle ſe trouvera enſuite celle de la premiére; & c'eſt-là une troiſiéme méthode d'exterminer, l'une après l'autre, des inconnues: c'eſt de quoi les problêmes ſuivans nous fourniront tant d'exemples, que nous croyons ne pas devoir nous étendre davantage ſur cet article.

Toutes les fois que deux quantités, comme x & y, produiſent par leur multiplication une troiſiéme quantité xy, les deux grandeurs x & y s'appellent efficiens, & ſont les coëfficiens reſpectifs l'une de l'autre: ainſi.

ſi dans la grandeur xy, x eſt le coëfficient de y, & y le coëfficient de x; c'eſt pourquoi, ſi dans quelque quantité, où x ſe trouve comme efficient, on demande le coëfficient de x; diviſez cette quantité par x, & le quotient ſera le coëfficient cherché; par exemple, ſi la quantité $12x-yx$ eſt diviſée par x, le quotient ſera $12-y$; par conſéquent dans la quantité $12x-yx$, le coëfficient de x eſt $12-y$.

AVERTISSEMENT.

Le Lecteur ne doit plus s'attendre, que nous lui épargnerons la peine de réſoudre toutes les équations ſimples, comme nous avons fait juſqu'ici. Si après 16 exemples d'équations réſolues, & la ſolution de quarante-quatre problêmes Algébraïques, il ne ſait pas encore comment s'y prendre pour réſoudre une équation ſimple, nous ne pouvons attribuer cette ignorance qu'à une cauſe qui n'eſt pas ſuſceptible de guériſon, ou qui n'en mérite pas.

PROBLEME 45.

71. *On demande deux nombres, dont le produit eſt* 144, *& dont le quotient, ſi l'on diviſe le plus grand par le plus petit, eſt* 16.

SOLUTION.

Soit le plus grand nombre nommé x, & le plus petit y; cela étant, la queſtion, exprimée en langage Algébraïque, ſera: ſi $xy=144$, & $\frac{x}{y}=16$, quelle eſt la valeur de x, & celle de y?

La premiére de ces équations ne demande aucune préparation, & par cela même peut s'exprimer ainſi;

Equ. 1re, $xy \ ^* =144$.

La ſeconde équation, quand elle aura été préparée, comme il a été dit dans le dernier article, ſera;

Equ. 2de, $x-16y=0$.

Multipliez la premiére équation par 1, coëfficient de x dans la ſeconde, & l'équation, à laquelle une pareille multiplication ne change rien, ſera toujours $xy \ ^*=144$; multipliez auſſi la ſeconde équation par y, qui, ſuivant l'article précédent, eſt le coëfficient de x dans la premiére équation, & vous aurez $xy-16yy=0$; retranchez ce dernier produit du premier, & vous aurez

Equ. 3éme, $^* \ 16yy=144$; donc

Equ. 4éme, $^* \ y=3$.

Subſtituez préſentement 3 à la place de y, ou $3x$ au-lieu de xy dans la premiére équation, & vous aurez $3x=144$, & par conſéquent,

Equ. 5éme, x $\quad=48$.

De ſorte que les nombres cherchés ſe trouvent enfin être 48 & 3; & ces nombres ſatisfont aux conditions du problême: car $48\times 3=144$, & $\frac{48}{3}=16$.

Equ. 1. xy $\quad=144$.
2. $x-16y=0$.
3. $\quad 16yy=144$.
4. $\quad y=3$.
5. x $\quad=48$.

Autre ſolution du Problême précédent, fondée ſur le dernier Article.

Ayant trouvé par la ſeconde équation que $x=16y$, ſubſtituez $16y$ à la place de x, ou $16yy$ à la place de xy dans la premiére équation, & vous aurez $16yy=144$; ce qui donnera les valeurs de x & de y telles qu'elles ont été trouvées auparavant.

PROBLEME 46.

72. *On demande deux nombres qui ayent les propriétés ſuivantes, ſavoir, que le premier avec la moitié du ſecond ſoit égal à 20, & de plus que le ſecond avec un tiers du premier ſoit auſſi égal à 20.*

SOLUTION.

Soit x le premier nombre, & y le ſecond: les équations fondamentales ſeront $x+\frac{y}{2}=20$, & $y+\frac{x}{3}=20$. Ces équations, préparées ſuivant l'Art. 70. ſe trouveront être alors

Eq. 1. $2x+y=40$.
Eq. 2. $x+3y=60$.

Retranchez la premiére équation de deux fois la ſeconde, & vous aurez

Eq. 3. $\quad 5y=80$; donc
Eq. 4. $\quad y=16$.

Subſtituez 16 à la place de y dans la premiére équation, & vous aurez $2x+16=40$, donc

Eq. 5. x $\quad=12$.

Ainſi les nombres trouvés ſont 12 & 16, & point 16 & 12, quoique le nombre 16 ait été trouvé le premier; à cauſe que $x=12$ a été mis pour

pour le premier nombre. Au reſte, il eſt clair que ces nombres ſatisfont aux conditions du problême : car $12+\frac{16}{2}$, ou $12+8=20$; & $16+\frac{12}{3}$, ou $16+4=20$.

Autre Solution fondée ſur l'Art. 70.

Ayant trouvé par la ſeconde équation $x=60-3y$, ſubſtituez $60-3y$ à la place de x, ou $120-6y$ à la place de $2x$ dans la premiére équation, & vous aurez $120-6y+y=40$; donc $y=16$, comme ci-deſſus.

PROBLEME 47.

73. *Quelqu'un reçoit en échange 6 ducatons & 2 écus pour 45 ſchellings; & dans un autre tems 9 ducatons & 5 écus de la même monnoye pour 76 ſchellings, je demande les valeurs reſpectives d'un ducaton & d'un écu.*

SOLUTION.

Appellez x & y le nombre des ſchellings qu'un ducaton & un écu valent reſpectivement, & les équations ſeront,

Eq. 1ére, $6x+2y=45$.
Eq. 2de, $9x+5y=76$.

Retranchez trois fois la premiére équation de deux fois la ſeconde, & vous aurez

Eq. 3éme, $\quad 4y=17$; par conſéquent
Eq. 4éme, $\quad y=4\frac{1}{4}$ ſchellings;

c'eſt-à-dire, 4 ſchellings & 3 ſous; ſubſtituez préſentement $4\frac{1}{4}$ à la place de y, ou $8\frac{1}{2}$ à la place de $2y$ dans la premiére équation, & vous aurez $6x+8\frac{1}{2}=45$, & $6x=36\frac{1}{2}$, &

Eq. 5éme, $\quad x=6\frac{1}{12}$;

c'eſt-à-dire, $6\frac{1}{12}$ ſchellings, ou 6 ſchellings & un ſou; donc la valeur d'un ducaton étoit 6 ſchellings & un ſou, & celle d'un écu 4 ſchellings & 3 ſous: valeurs qui ſatisfont aux conditions du problême; car à ce compte 6 ducatons ſont 36 ſchellings & 6 ſous, & 2 écus ſont 8 ſchellings & 6 ſous, & le tout 45 ſchellings; de plus, 9 ducatons ſont 54 ſchellings & 9 ſous, 5 écus ſont 21 ſchellings & 3 ſous, & la ſomme totale monte à 76 ſchellings.

PROBLEME 48.

74. *On demande deux nombres tels, que la moitié du premier avec un tiers du ſecond faſſe* 32; *& outre cela, qu'un quart du premier avec un cinquieme du ſecond faſſe* 18.

SOLUTION.

Appellez les deux nombres x & y, & vous aurez pour équations fondamentales, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=32$, & $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=18$: ces équations, changées ſuivant les règles, ſeront;

Eq. 1ére, $3x+2y=192$.
Eq. 2de, $5x+4y=360$.

Retranchez 5 fois la première équation de 3 fois la ſeconde, & vous aurez,

Eq. 3éme, $*\quad 2y=120$; donc
Eq. 4éme, $*\quad y=60$.

En comparant cette équation avec la première $3x+2y$, ou $3x+120=192$, on trouve.

Eq. 5éme, $x\ *\ =24$.

Ainſi les nombres cherchés ſont 24 & 60: auſſi ſatisfont-ils à la queſtion: car $\frac{24}{2}+\frac{60}{3}$, c'eſt-à-dire, $12+20=32$; & de plus, $\frac{24}{4}+\frac{60}{5}$, c'eſt-à-dire, $6+12=18$.

PROBLEME 49.

75. A *dit à* B, *il y a* 7 *ans que j'étois trois fois plus âgé que vous, & dans* 7 *ans j'aurai préciſément le double de votre âge: je demande l'âge actuel de l'un & de l'autre.*

SOLUTION.

Que a & b déſignent les âges actuels de A & de B reſpectivement; cela étant leurs âges 7 ans auparavant étoient $a-7$ & $b-7$; donc, & par les conditions du problême, nous avons les deux équations fondamentales ſuivantes;

$$a-7=\overline{b-7}\times 3=3b-21, \text{ \&}$$
$$a+7=\overline{b+7}\times 2=2b+14.$$

La première de ces équations, ſavoir $a-7=3b-21$ donne $a=3b-14$; la ſeconde, ſavoir $a+7=2b+14$, donne $a=2b+7$; donc $3b-14=2b+7$, l'une & l'autre de ces quantités étant $=a$; donc $b=21$, & $2b+7$ ou $a=49$.

A avoit donc 49 ans, & B 21; ce qui eſt vrai: car à ce compte A auroit eu auparavant 42 ans, & B 14: or $42=14\times 3$: d'un autre côté 7 ans après, A devoit avoir 56 ans, & B 28: or $56=28\times 2$.

PRO-

PROBLEME 50.

76. *Un Maquignon a deux chevaux*, A *&* B, *dont on lui demande le prix: il a auſſi deux ſelles, l'une eſtimée* 12 *livres & l'autre* 2: *or s'il met la meilleure ſelle ſur* A, *& la moins bonne ſur* B, *le prix de* A *ſera double de celui de* B; *mais s'il met la meilleure ſelle ſur* B, *& la moins bonne ſur* A, *le prix de* B *ſera alors triple de celui de* A: *je demande le prix de chaque cheval*

SOLUTION.

Que a & b déſignent en livres les prix des deux chevaux reſpectivement; cela étant, ſi la meilleure ſelle eſt miſe ſur A, & la plus mauvaiſe ſur B, A vaudra $a+12$, & B vaudra $b+2$, & la premiére équation fondamentale ſera $a+12=\overline{b+2\times 2}=2b+4$; d'un autre côté, ſi la meilleure ſelle eſt miſe ſur B, & la plus mauvaiſe ſur A, B vaudra $b+12$, & A vaudra $a+2$, & la ſeconde équation fondamentale ſera $b+12=\overline{a+2\times 3}=3a+6$: dans la premiére équation fondamentale, où $a+12=2b+4$, nous avons $a=2b-8$; ſubſtituez donc $2b-8$ à la place de a, ou plutôt $6b-24$ à la place de $3a$, dans la ſeconde équation fondamentale (qui eſt $3a+6=b+12$) & vous aurez $6b-24+6$, c'eſt-à-dire, $6b-18=b+12$; donc $b=6$, & $2b-8$, ou $a=4$: ainſi le prix de A étoit 4 livres, & celui de B 6, & ces nombres ſatisfont aux conditions du probléme.

PROBLEME 51.

77. *Il y a une fraction, qui, ſi l'on ajoûte une unité au numérateur, ſera* $=\frac{1}{3}$; *mais ſi l'on ajoûte cette unité au dénominateur, elle vaudra* $\frac{1}{4}$: *je demande le numérateur & le dénominateur de cette fraction.*

SOLUTION.

Appellez cette fraction $\frac{x}{y}$, & vous aurez ces deux équations fondamentales, $\frac{x+1}{y}=\frac{1}{3}$, & $\frac{x}{y+1}=\frac{1}{4}$: la premiére de ces équations donne $y=3x+3$, & la derniére donne $y=4x-1$; donc $4x-1=3x+3$, chacune de ces grandeurs étant égale à y; donc x, numérateur de la fraction, eſt 4; & $3x+3$, ou y, dénominateur de la fraction, $=15$; & la fraction elle-même eſt $\frac{4}{15}$: car ſi l'on ajoûte une unité au numérateur, on aura $\frac{5}{15}$, ou $\frac{1}{3}$; mais ſi l'unité eſt ajoûtée au dénominateur, la fraction ſera $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

PRO-

Probleme 52.

78. *Il y a une perche compoſée de deux parties jointes enſemble bout à bout, & dont la partie ſupérieure eſt à la partie inférieure comme 5 à 7; de plus, la partie ſupérieure 9 fois, avec 13 fois la partie inférieure, eſt égale à 11 fois toute la perche + 36 pouces: je demande la longueur de chaque partie.*

Solution.

Déſignez par x la longueur de la partie ſupérieure réduite en pouces, & la partie inférieure par y; cela étant, la longueur entiére ſera $x+y$; & comme x eſt à y, comme 5 à 7 par l'hypothéſe, nous aurons $7x=5y$ pour équation fondamentale: de plus, comme la partie ſupérieure priſe 9 fois, avec 13 fois la partie inferieure, eſt égale à 11 fois toute la perche + 36 pouces, nous avons $9x+13y=11x+11y+36$ pour ſeconde équation fondamentale: la derniére de ces deux équations donne $x=y-18$, & par conſequent $7x=7y-126$; ſubſtituez cette valeur à la place de $7x$, dans la premiére équation fondamentale, ou $7x=5y$, & vous aurez $7y-126=5y$; donc $y=63$, & $y-18$, ou $x=45$.

La partie ſupérieure étoit donc de 45 pouces, & la plus petite de 63.

Probleme 53.

79. *Quelqu'un achéte une certaine quantité de pommes & de poires pour deux ſchellings & ſix ſous, & paye les pommes à raiſon de 4 pour un ſou, & les poires à raiſon de 5 pour un ſou; enſuite il céde à ſon voiſin la moitié de ſes pommes & le tiers de ſes poires pour 13 ſous, ce qui étoit le prix qu'elles lui coutoient: je demande combien il en avoit acheté de chaque ſorte.*

Solution.

Soit x le nombre des pommes & y celui des poires: cela étant, ſi 4 pommes coutent un ſou, x coutera en ſous $\frac{x}{4}$, & par la même raiſon y coutera en ſous $\frac{y}{5}$, & nous aurons $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=30$ pour premiére équation fondamentale: de plus, le prix de $\frac{x}{2}$, moitié de ſes pommes, ſera $\frac{x}{8}$, & le prix de $\frac{y}{3}$, tiers de ſes poires, ſera $\frac{y}{15}$; ce qui nous donne pour ſeconde équation fondamentale $\frac{x}{8}+\frac{y}{15}=13$. Donc

Eq. 1ére, $5x+4y=600$.

Eq. 2de, $15x+8y=1560$.

Re-

Retranchez la ſeconde équation de trois fois la premiére, ſuivant l'Art. 70, & vous aurez

Eq. 3éme, * $4y=240$. Donc

Eq. 4éme, * $y=60$.

Subſtituez préſentement 60 à la place de y, c'eſt-à-dire, 240 à la place de $4y$ dans la premiére équation $5x+4y=600$, & vous aurez $5x+240=600$, Donc

Eq. 5éme, x * $=72$.

Ainſi le nombre des pommes étoit 72, & celui des poires 60.

PROBLEME 54.

80. *Un lévrier voyant un liévre éloigné de lui à la diſtance de cinquante de ſes propres ſauts, le pourſuit, en faiſant trois ſauts pour quatre ſauts que le liévre fait; & de plus, en faiſant autant de chemin en deux ſauts que le liévre en fait en trois: je demande le nombre de ſauts que chacun de ces animaux fera durant toute la courſe.*

SOLUTION.

Le nombre des ſauts du lévrier durant toute la courſe, x.

Le nombre des ſauts du liévre durant le même tems, y.

Donc durant le tems que le lévrier fait le nombre de ſauts x, le liévre fait le nombre de ſauts y; mais ſuivant le problême, pendant que le chien fait trois ſauts, le liévre en fait quatre; donc x eſt à y, comme 3 à 4; ce qui nous donne $4x=3y$: de plus depuis le gîte du liévre jusqu'au bout de la courſe, le chien a fait $x-50$ ſauts, & autant de chemin que le liévre en a fait dans tous ſes ſauts y; mais ſuivant le problême, le chien a avancé autant en deux ſauts que le liévre en trois; donc $x-50$ eſt à y, comme 2 à 3; & nous avons $3x-150=2y$: le reſte de la ſolution ſe trouve ainſi,

Eq. 1ére, $4x-3y=0$.

Eq. 2de, $3x-2y=150$.

Retranchez trois fois la premiére équation de quatre fois la ſeconde, & vous aurez

Eq. 3éme, * $y=600$.

Subſtituez 600 à la place de y dans la premiére équation, & vous trouverez $4x-3y$, c'eſt-à-dire, $4x-1800=0$; donc

Eq. 4éme. x * $=450$.

Donc le lévrier a fait 450 ſauts, & le liévre 600 durant toute la courſe; & 450 ſont à 600, comme $\frac{450}{150}$ ſont à $\frac{600}{150}$; c'eſt-à-dire, comme 3 à 4:

3 à 4: de plus, depuis le gîte du liévre, jusqu'au bout de la courſe, le chien a fait 400 ſauts; & 400 ſont à 600 comme 4 à 6, ou comme 2 à 3.

Probleme 55.

81. *On demande deux nombres* x *&* y, *qui ſoient tels, que ſi on les multiplie l'un & l'autre par* 18, *le premier produit ſoit un quarré, & que le ſecond ſoit la racine ou le côté de ce quarré; mais ſi on les multiplie par* 3, *le premier produit ſoit un cube, & le ſecond le côté de ce cube.*

Solution.

En multipliant ſéparément x & y par 18, les produits ſeront $18x$ & $18y$, dont le premier doit être un quarré, & le ſecond le côté de ce quarré, c'eſt-à-dire, en d'autres termes, le premier produit doit être égal au quarré de l'autre; ainſi nous avons $18x = 324yy$, & $x = 18yy$: de plus, ſi l'on multiplie x & y par 3, les produits ſeront $3x$ & $3y$, dont le premier eſt égal au cube de l'autre; c'eſt-à-dire, $3x = 27y^3$, & $x = 9y^3$; donc $9y^3 = 18y^2$, l'une & l'autre de ces grandeurs étant égales à x; donc $y = 2$, & $9y^3$ ou $x = 72$; de ſorte que les nombres cherchés ſont 72 & 2, qui ſatisferont aux conditions du probléme: car ſi on les multiplie ſéparément par 18, les produits ſeront 1296 & 36, dont le premier eſt un quarré, & le dernier le côté de ce même quarré; mais ſi les nombres 72 & 2 ſont multipliés ſéparément par 3, les produits ſeront 216 & 6, dont le premier nombre eſt un cube, qui a l'autre nombre pour côté.

Probleme 56.

82. *Il y a un pavé en forme de rectangle ou de quarré oblong, dont les dimenſions ſont telles, que s'il avoit été de deux pieds plus large, & de trois pieds plus long, il auroit eu ſoixante-quatre pieds quarrés de largeur de plus; mais d'un autre côté, s'il avoit été de trois pieds plus large, & de deux pieds plus long, il auroit en ce cas eu ſoixante-huit pieds quarrés de largeur de plus: je demande la longueur & la largeur du pavé.*

Solution.

Soit x la largeur & y la longueur du pavé; en ce cas ſon aire, ou le nombre de ſes pieds quarrés ſera $x \times y$ ou xy; mais s'il avoit été de 2 pieds plus large, & de 3 pieds plus long, ſon aire auroit été $\overline{x+2} \times \overline{y+3}$, c'eſt-à-dire, $xy + 3x + 2y + 6$; & comme, par l'hypothéſe, cette aire doit ſurpaſſer la véritable aire de 64 pieds quarrés, nous avons l'équa-

l'équation ſuivante, $xy+64=xy+3x+2y+6$: d'un autre côté, ſi ce pavé avoit été de 3 pieds plus large, & de 2 pieds plus long, ſon aire auroit été $\overline{x+3} \times \overline{y+2}$, c'eſt-à-dire, $xy+2x+3y+6$; & cette derniére aire doit ſurpaſſer la véritable de 68 pieds quarrés; ce qui donne cette équation, $xy+68=xy+2x+3y+6$; donc

Eq. 1ére, $3x+2y=58$.
Eq. 2de, $2x+3y=62$.

Retranchez deux fois la premiére équation de trois fois la ſeconde, & vous aurez,

Eq. 3éme, $\quad 5y=70$; &
Eq. 4éme, $\quad y=14$.

Subſtituez préſentement 14 à la place de y, ou 28 à la place de $2y$ dans la premiére equation $3x+2y=58$, & vous aurez $3x+28=58$; donc

Eq. 5éme, $\quad x=10$.

Le pavé avoit par conſéquent 10 pieds de large, & 14 pieds de long; & ſon aire étoit de 140 pieds quarrés, ce qui ſatisfait aux conditions du probleme; car ſi le pavé avoit été plus large de 2 pieds, & plus long de 3, ſon aire auroit été $12 \times 17=204=140+64$; mais s'il avoit été plus large de 3 pieds, & plus long de 2, ſon aire auroit été $13 \times 16=208=140+68$.

PROBLEME 57.

83. *Une compagnie payant ſon écot au cabaret trouve que s'il y avoit eu trois perſonnes de plus, il en auroit couté un ſchelling moins par tête, & que s'il y avoit eu deux perſonnes de moins, il en auroit couté un ſchelling par tête de plus; on demande le nombre des perſonnes, & leur quotepart.*

SOLUTION.

Soit x le nombre des perſonnes, & y celui des ſchellings que chacune d'elles paye actuellement; ſi 4 perſonnes devoient payer 5 ſchellings par tête, tout le compte ſeroit 4×5 ou 20 ſchellings; donc ſi le nombre de perſonnes x doit payer par tête le nombre de ſchellings y, le compte total ſera $y \times x$ ou xy de ſchellings: cela étant, ſuppoſons préſentement que la compagnie ſoit compoſée de 3 perſonnes de plus, en ce cas la compagnie ſera $x+3$; & pour déterminer ce que chaque perſonne doit payer alors par tête, le compte total xy, doit être diviſé par $x+3$, nombre des perſonnes, & le quotient $\frac{xy}{x+3}$ ſera la quotepart de chaque perſonne; mais ſuivant le problême, le compte particulier de chacun ſeroit un

ſchelling de moins qu'il n'eſt actuellement, c'eſt-à-dire, $y-1$; donc $\frac{xy}{x+3}=y-1$; de même la ſeconde condition du problême fournit cette équation, $\frac{xy}{x-2}=y+1$: la premiére de ces équations, ſavoir, $\frac{xy}{x+3}=y-1$ étant réduite donne $x=3y-3$; & la ſeconde équation, ſavoir, $\frac{xy}{x-2}=y+1$ étant réduite donne $x=2y+2$; donc $3y-3=2y+2$, & $y=5$; donc $2y+2$, ou $x=12$.

Ainſi la compagnie étoit de 12 perſonnes, leur compte de 5 ſchellings par tête, & la ſomme totale de 60 ſchellings; ce qui ſatisfait aux conditions du problême: car $\frac{60}{12}=4$, & $\frac{60}{10}=6$.

PROBLEME 58.

84. *Un Cabaretier a deux ſortes de vins, dont les valeurs ſont telles, que s'il les mêle en raiſon de deux à trois, c'eſt-à-dire, que s'il mêle deux pots du meilleur vin avec trois pots du plus mauvais, le mêlange vaudra vingt & un ſous le pot; mais s'il les mêle en raiſon de ſept à huit, c'eſt-à-dire, que s'il mêle ſept pots de la meilleure ſorte avec huit pots de la plus mauvaiſe, le mêlange vaudra vingt & deux ſous le pot: je demande le prix d'un pot de chaque ſorte.*

SOLUTION.

Soit x le prix en ſous d'un pot de la meilleure ſorte, & y pareillement en ſous le prix d'un pot de la moindre ſorte; ainſi en mêlant deux pots de la meilleure ſorte avec trois pots de la plus mauvaiſe, le mêlange ſera $2x+3y$; mais comme il y a cinq pots de ce mêlange, & que chaque pot vaut 21 ſous, tout le mêlange doit valoir 105 ſous; ce qui nous donne cette équation $2x+3y=105$: pareillement l'autre condition du problême fournit cette équation, $7x+8y=22\times 15=330$: ces équations peuvent ſe réſoudre ainſi.

Eq. 1.	$2x+3y=105.$		Eq. 4.	*	$y=15.$
Eq. 2.	$7x+8y=330.$		Eq. 5.	x	$*=30.$
Eq. 3.	* $5y=75.$				

Ainſi la meilleure ſorte de vin valoit 30 ſous le pot, & la plus mauvaiſe 15; ce qui répond aux conditions du problême: car, à ce compte, deux pots de la meilleure ſorte vaudront 60 ſous, & trois de la plus mauvaiſe 45 ſous, les cinq pots 105 ſous, & un ſeul pot de ce mêlanlange 21 ſous; de plus, ſept pots de la meilleure ſorte vaudront 210 ſous

ſous, huit de la plus mauvaiſe 120 ſous, les quinze pots 330 ſous, & un ſeul pot de ce mêlange 22 ſous.

PROBLEME 59.

85. *Il y a un certain nombre compoſé de deux caractéres, qui eſt égal à quatre fois la ſomme de ces caractéres pris ſéparément & ajoûtés enſemble; & ſi à ce nombre on ajoûte* 18, *on aura une ſomme égale à celle que le premier nombre formeroit, ſi on en tranſpoſoit les caractéres. Je demande ce nombre.*

SOLUTION.

Mettez x pour le caractére qui occupe la place des dixaines, & y pour le caractére qui occupe la place des unités, & la ſomme ſera $x+y$; mais comment faut-il s'y prendre pour lire un pareil nombre, qui a x à la place des dixaines, & y à celle des unités? La choſe ne paroîtra guéres difficile, ſi l'on fait attention qu'un nombre compoſé de deux caractéres, comme 36, par exemple, eſt tel, que les 6, qui ſe trouvent à l'endroit des unités, n'ont préciſément que leur valeur, mais que les 3, qui ſont dans l'endroit des dixaines, ne déſignent pas 3, mais 30, nombre dix fois plus grand que 3; deſorte qu'on lit le nombre 36, comme s'il y avoit $30+6$; ainſi un nombre qui a x à l'endroit des dixaines, & y à celui des unités, doit ſe lire ainſi, $10x+y$; & ſi les mêmes caractéres étoient tranſpoſés, ſe liroit $10y+x$: cet éclarciſſement étant donné, les équations fondamentales ſe déduiront aiſément des conditions du problême de la maniére ſuivante; $10x+y=4x+4y$, & $10x+y+18=10y+x$. La premiére équation étant réduite donne $y=2x$, & la derniére donne $y=x+2$; donc $2x=x+2$; ainſi $x=2$, $2x$ ou $y=4$, & le nombre cherché eſt 24; dont les caractéres pris ſéparément, & ajoûtés enſemble, valent 6. Il eſt bien clair que ce nombre ſatisfait aux conditions du problême; car $24=4$ fois 6; & $24+18=42$.

LEMME.

86. *S'il y a quelque quantité complexe conſiſtant en deux multiples de* x *& de* y, *dont l'un ſoit affirmatif & l'autre négatif, & que cette quantité compoſée doive être ſouſtraite de* $x+y$; *cette ſouſtraction ſe fera aiſément ainſi: changez les ſignes des deux parties qu'il s'agit de ſouſtraire; puis augmentez d'une unité le coëfficient de la partie affirmative, & diminuez d'une unité le coëfficient de la partie négative, & vous aurez le reſte:* par exemple, s'il faut ſouſtraire $6x-10y$ de $x+y$, commencez par changer les

ſignes de $6x-10y$, & vous aurez $10y-6x$; augmentez enſuite d'une unité le coëfficient affirmatif 10, & diminuez d'une unité le coëfficient négatif 6, & vous aurez $11y-5x$ pour reſte, comme on peut le voir du premier coup d'œil en retranchant $6x-10y$ de $x+y$: ſi $2y$, c'eſt-à-dire, $2y-0x$, devoient être ſouſtraits de $x+y$, le reſte ſeroit $x-y$.

PROBLEME 60.

87. A & B *ont chacun un certain nombre de jettons*; A *donne à* B *autant de jettons que* B *en a déjà*; *après quoi* B *en donne à* A *autant que* A *en avoit gardés*; *puis* A *en donne à* B *autant que* B *en avoit gardés*, *& ainſi de ſuite*; *& après quatre dons faits de cette maniére il ſe trouve que chacun d'eux a ſeize jettons: je demande combien chacun en avoit d'abord.*

SOLUTION.

Soit x le nombre des jettons de A, & y celui de B; la ſomme de leurs jettons ſera donc au commencement $x+y$; à cauſe que les dons, qui pourront dans la ſuite ſe faire entre eux, n'augmenteront, ni ne diminueront le nombre des jettons; donc ſi dans quelque cas le nombre des jettons de A ou de B eſt donné, il ſuffira de retrancher ce nombre de $x+y$, & le reſte exprimera ce qui manque à la ſomme totale. C'eſt ce qui nous fournit la ſolution ſuivante.

Le nombre des jettons de A, x.
Celui des jettons de B, y.
Celui de B, après le premier don fait par A, $2y$.
Celui de A, dans ce même tems, $x-y$.
Celui de A, après le premier don fait par B, $2x-2y$.
Celui de B, dans ce même tems, $3y-x$.
Celui de B, après le ſecond don fait par A, $6y-2x$.
Celui de A, dans ce même tems, $3x-5y$.
Celui de A, après le ſecond don fait par B, $6x-10y$.
Celui de B, dans ce même tems, $11y-5x$.

De cette maniére le nombre des dons peut ſe pouſſer auſſi loin qu'on voudra: mais ſuivant le problême, après quatre dons ainſi faits, A & B avoient chacun 16 jettons; ce qui nous donne les deux équations, $6x-10y=16$, & $11y-5x=16$: Donc

Eq. 1ére, $3x-5y=8$.	Eq. 4éme, $*\ \ y=11$.
Eq. 2de, $5x-11y=-16$.	Eq. 5éme, $x\ \ *=21$.
Eq. 3éme, $*\ \ 8y=88$.	

Ainſi

Ainſi A avoit 21 jettons, & B 11 : Voici le calcul du tout.
Après le premier don de A, B a 22 jettons, & $A\ 21-11=10$.
Après le premier don de B, A a 20 jettons, & $B\ 22-10=12$.
Après le ſecond don de A, B a 24 jettons, & $A\ 20-12=8$.
Après le ſecond don de B, A a 16 jettons, & $B\ 24-8=16$

Obſervations ſur le Problême précédent.

Si l'on eſt curieux de ſavoir comment dans ce problême & dans pluſieurs autres, on peut faire choix d'un nombre donné tel que les ſolutions ſoient exprimées en nombres entiers, au-lieu que ſi les nombres donnés étoient pris au hazard, les ſolutions ſeroient, généralement parlant, exprimées par des fractions, il faut avoir recours au moyen ſuivant: ſuppoſons que dans ce problême, après quatre dons faits entre A & B, je veuille leur faire avoir à tous deux le même nombre de jettons, mais ſans ſavoir quel nombre leur aſſigner à la fin, qui ſoit tel que chacun d'eux eût eu un nombre entier de jettons au commencement; je mets quelque lettre, comme c, pour le nombre de jettons que chacun d'eux a eu à la fin; alors les deux équations fondamentales ſeront, $6x-10y=c$, & $11y-5x=c$; pour les réſoudre:

Eq. 1ére, $6x-10y=c$.	Eq. 3éme, $\quad 16y=11c$.
Eq. 2de, $5x-11y=-c$.	Eq. 4éme. $\quad y=\frac{11c}{16}$.

Donc par la premiére équation, $6x-10y$, c'eſt-à-dire, $6x-\frac{110c}{16}=c$; donc $96x-110c=16c$; donc $96x=126c$; &

Eq. 5éme, $\quad x=\frac{126c}{96}=\frac{21c}{16}$.

De ſorte que pour faire avoir à chaque perſonne A & B le même nombre de jettons c à la fin, le premier nombre de A doit être $\frac{21c}{16}$, & celui de B, $\frac{11c}{16}$; d'où il ſuit, que ſi à la place du nombre c, je choiſis quelque autre nombre, qui puiſſe être diviſé ſans reſte par 16, A & B doivent néceſſairement avoir eu chacun un nombre entier au commencement; car ſi $\frac{c}{16}$ eſt un nombre entier, tant $\frac{21c}{16}$ que $\frac{11c}{16}$ doivent auſſi être des nombres entiers; & c'eſt à cauſe de cela même que j'ai fait choix dans le problême du nombre de 16 à la place de c: car je m'aſſurois par-là, que non ſeulement la ſolution ſe trouveroit en nombres entiers, mais auſſi que le problême ſeroit le plus ſimple en ſon genre, puiſque 16 eſt le plus petit nombre qui puiſſe être diviſé par 16.

Ce

Ce problême peut auſſi ſe réſoudre par le ſecours d'une ſeule lettre, de la manière ſuivante: que c repréſente maintenant, non pas le nombre des jettons que chacun d'eux a eus à la fin, mais la ſomme de tous leurs jettons à la fin, & par conſéquent la ſomme de leurs jettons durant tout le cours des dons, & le lemme pour pouſſer le nombre des dons à diſcrétion, ſera: *S'il y a quelque quantité compoſée conſiſtant en deux multiples de* c *&* x, *dont l'un ſoit affirmatif & l'autre négatif, & que cette quantité compoſée doive être ſouſtraite de* c, *le reſte ſe trouvera, premiérement en changeant les ſignes des deux parties, & puis en augmentant ou en diminuant de l'unité le coëfficient de* c, *ſuivant qu'après ce changement le coëfficient ſe trouvera affirmatif ou négatif.* Par exemple, ſi $2c-2x$ devoient être ſouſtraits de c, le reſte ſeroit $2x-c$; & s'il falloit ſouſtraire de c le nombre $4x-2c$, le reſte ſeroit $3c-4x$; ce qui donne cette ſolution du problême précédent:

Le nombre des jettons de A, x.
Celui des jettons de B, $c-x$.
Celui de B après le premier don fait par A, $2c-2x$.
Celui de A, dans ce même tems, $2x-c$.
Celui de A après le premier don fait par B, $4x-2c$.
Celui de B dans ce même tems, $3c-4x$.
Celui de B après le ſecond don fait par A, $6c-8x$.
Celui de A dans ce même tems, $8x-5c$.
Celui de A après le ſecond don fait par B, $16x-10c$.
Celui de B dans ce même tems, $11c-16x$.

Mais ſuivant le problême, après le quatriéme don, A & B avoient chacun $\frac{c}{2}$: donc x peut ſe trouver, & ſera la même grandeur, ſoit que nous faſſions $16x-10c=\frac{c}{2}$, ou $11c-16x=\frac{c}{2}$: ſi nous faiſons $16x-10c=\frac{c}{2}$, nous aurons $32x-20c=c$, & $32x=21c$, & x, ou le nombre des jettons de $A=\frac{21c}{32}$; donc $c-x$, ou le nombre des jettons de $B=\frac{11c}{32}$; donc le problême le plus ſimple de cette ſorte (ſavoir quand il n'y a que quatre dons) qui admette une ſolution en nombre entier, eſt quand on fait $c=32$.

PROBLEME 61.

88. *On demande deux nombres tels, que leur ſomme ſoit deux fois, & le produit de leur multiplication douze fois leur différence.*

So-

SOLUTION.

Soit le plus grand de ces nombres x, & le plus petit y; leur différence ſera $x-y$, leur ſomme $x+y$, & le produit de leur multiplication xy ou yx; & les équations mêmes ſeront $x+y=2x-2y$, & $yx=12x-12y$; donc

Eq. 1ére, $x-3y=0$.

Eq. 2de, $12x-yx-12y=0$.

Multipliez la premiére équation par $12-y$, c'eſt-à-dire, ſuivant l'Art. 70, par le coëfficient de x dans la ſeconde, & le produit ſera $12x-yx-36y+3yy=0$; retranchez cette équation de la ſeconde, & vous aurez

Eq. 3éme, $24y-3yy=0$; donc

Eq. 4éme, $y=8$; &

Eq. 5éme, $x=24$.

Et les nombres 24 & 8 ſatisferont aux conditions du problème.

Autrement ainſi: par la premiére équation $x=3y$, & $4x=12y$: ſubſtituez $4x$ à la place de $12y$ dans la ſeconde équation, & vous aurez $12x-yx-4x=0$; diviſez le tout par x, & il réſultera $12-y-4=0$, & $y=8$, & x, ou $3y=24$.

PROBLEME 62.

89. *On demande deux nombres dont la différence, la ſomme & le produit ſoient l'un à l'autre comme ſont les nombres deux, trois & cinq reſpectivement, c'eſt-à-dire, dont la différence ſoit à leur ſomme comme deux à trois, & dont la ſomme ſoit à leur produit comme trois à cinq.*

SOLUTION.

Soit le plus grand nombre appellé x, & le plus petit y; cela étant leur différence ſera $x-y$, leur ſomme $x+y$, & le produit de leur multiplication xy: les conditions du problème donnent ces deux analogies; 1°. $x-y$ eſt à $x+y$, comme 2 à 3: donc $3x-3y=2x+2y$; 2°. $x+y$ eſt à xy, comme 3 à 5; donc $3xy=5x+5y$: donc

Eq. 1ére, $x-5y=0$.

Eq. 2de, $3yx-5x-5y=0$.

Multipliez la premiére équation par $3y-5$, le coëfficient de x dans la ſeconde, & le produit ſera $3yx-5x-15yy+25y=0$; retranchez cette équation de la ſeconde, & vous aurez

Eq. 3éme, $15yy-30y=0$; donc

Eq. 4éme, $y=2$, &

Eq. 5éme, $x=10$.

Et les nombres 10 & 2 ſatisferont aux conditions du problême.

Autrement ainſi: par la premiére équation $x=5y$: ſubſtituez x à la place de $5y$ dans la ſeconde équation, & vous aurez $3xy-5x-x=0$; diviſez cette équation par x, & il viendra $3y-5-1=0$ & $y=2$.

Probleme 63.

90. *On demande deux nombres tels, que ſi leur différence eſt multipliée par leur ſomme, le produit ſoit cinq; mais que le produit ſoit ſoixante-cinq, ſi la différence de leurs quarrés eſt multipliée par la ſomme de leurs quarrés.*

Solution.

Soit x le plus grand nombre, & y le plus petit; leur différence ſera $x-y$, leur ſomme $x+y$, & le produit de leur ſomme & de leur différence multipliées l'une par l'autre ſera x^2-y^2 par l'Art. 11. Cela étant $x^2-y^2=5$, par la ſuppoſition, & $x^2=5+yy$; élevez les deux membres au quarré, & vous aurez $x^4=25+10y^2+y^4$: de plus, la différence des quarrés des deux nombres cherchés eſt x^2-y^2, & la ſomme de leurs quarrés x^2+y^2, & le produit de cette différence par cette ſomme x^4-y^4; donc $x^4-y^4=65$ par la ſuppoſition, & $x^4=65+y^4$; mais x^4 a été trouvé égal à $25+10y^2+y^4$; donc $25+10y^2+y^4=65+y^4$; par conſéquent $y^2=4$, & $y=2$; ſubſtituez préſentement 4 à la place de y^2 dans la premiére équation fondamentale, qui étoit $x^2-y^2=5$, & vous aurez $x^2-4=5$, & $x=3$; donc les nombres cherchés ſont 3 & 2; & ces nombres ſatisfont aux conditions du problême.

Probleme 64.

91. *Il y a un nombre compoſé de trois caractéres, qui conſidérés chacun en eux-mêmes ſont en progreſſion arithmétique; ſi ce nombre eſt diviſé par la ſomme de ſes caractéres conſidérés en eux-mêmes (c'eſt-à-dire, ſans avoir égard à la place qu'ils occupent dans le nombre cherché) le quotient ſera quarante-huit; mais ſi l'on ſouſtrait de ce nombre cent quatre-vingts dix-huit, les caractéres ſeront tranſpoſés: je demande quel eſt ce nombre.*

N. B. Des nombres ſont en progreſſion arithmétique, quand ils croiſſent ou décroiſſent avec d'égales différences: ainſi les nombres 5, 7 & 9 ſont en progreſſion arithmetique, de-même que 9, 7 & 5. Pour faciliter l'intelligence de la ſolution ſuivante, voyez le Problême 59.

Solution.

Je pourrois mettre ici x, y & z pour les trois caractéres cherchés; mais comme ces caractéres ſont en progreſſion arithmetique, & que d'ail-

d'ailleurs une ſolution eſt plus élégante, quand on employe moins d'inconnues, je mettrai x & $x+y$ & $x+2y$ pour les trois caractéres cherchés; & puiſque x & $\overline{x+y}$ & $\overline{x+2y}$ ajoûtés enſemble ſont $3x+3y$, il eſt clair que $3x+3y$ déſignent la ſomme des caractéres: de plus, x qui occupe la place des centaines, vaut $100x$, & $x+y$, dans la place des dixaines, ſont égaux à $10x+10y$, & la quantité $\overline{x+2y}$, dans la place des unités, ſe repréſente ſimplement elle-même; & tous ces nombres ajoûtés enſemble ſont $111x+12y$; donc $111x+12y$ déſignent le nombre cherché: enfin, quand les caractéres ſont tranſpoſés $\overline{x+2y}$, occupant la place des centaines vaut $100x+200y$, $x+y$, dans la place des dixaines, vaut $10x+10y$, & x, dans la place des unités, ſe repréſente lui-même: ces nombres ajoûtés enſemble ſont $111x+210y$; donc $111x+210y$, repréſentent le nombre cherché, mais en caractéres tranſpoſés: ces éclairciſſemens étant donnés, le problême nous fournit les deux équations ſuivantes, ſavoir

$$\frac{111x+12y}{3x+3y}=48, \text{ \&}$$
$$111x+12y-198=111x+210y.$$

De la premiére de ces équations, ſavoir, $\frac{111x+12y}{3x+3y}=48$, nous déduiſons $144x+144y=111x+12y$; donc $33x+144y=12y$; donc $33x+132y=0$; donc (diviſant par 33) $x+4y=0$, & $x=-4y$: quantité, qui eſt le réſultat de la premiére équation. L'autre équation, ſavoir, $111x+12y-198=111x+210y$, nous donne $210y-12y=-198$, & $y=-1$; mais par le réſultat de l'équation précédente, $x=-4y$, c'eſt-à-dire, $-4\times y$ ou $-4\times-1=+4$; donc x (le premier caractére à la gauche) $=4$; & puiſque y, c'eſt-à-dire $+y=-1$, le caractére ſuivant $x+y$, ſera $4-1=3$; & le dernier caractére $x+2y$ ſera $4-2=2$; donc le nombre cherché eſt 432, ayant pour ſomme de ſes caractéres (conſidérés ſéparément) 9: car premiérement, les caractéres 4, 3 & 2 ſont en progreſſion arithmétique; ſecondement $\frac{432}{9}=48$; & en troiſiéme lieu, $432-198=234$.

On a pu remarquer d'abord par la nature du problême, que les caractéres devoient aller en décroiſſant de la gauche à la droite; cependant, je n'ai pas laiſſé de ſuppoſer qu'ils alloient en croiſſant, uniquement pour faire voir, que quoique dans de pareils cas nous puiſſions faire de fauſſes ſuppoſitions, l'Algébre néanmoins nous redreſſe toujours: par exemple, s'il falloit calculer le gain qui devroit réſulter d'un certain accord, nous pourrions déſigner ce gain par x, & continuer le calcul conformément

à ce qu'exigeroient les conditions du problême; il n'eſt pas impoſſible néanmoins qu'à la fin de l'opération x ne ſe trouve une quantité négative; ce qui démontreroit que ce que nous avons ſuppoſé un gain étoit une perte.

Quelques réflexions concernant les conditions des Problêmes.

92. Il a été dit dans l'Art. 70, que les équations à l'aide desquelles on découvre les valeurs des inconnues, doivent être indépendantes l'une de l'autre. Voici ſur quoi cette aſſertion eſt fondée: ſi ces équations ne ſont pas indépendantes l'une de l'autre, l'une d'elles doit être une conſéquence de l'autre, ou en contradiction avec l'autre; & toutes les concluſions qu'on pourroit tirer d'elles ſeroient, ou ridicules, ou abſurdes: car ſi une des équations étoit une conſéquence de l'autre, on parviendroit enfin à cette concluſion, qu'une choſe eſt égale à elle-même; & ſi les équations étoient contradictoires, on trouveroit à la fin quelque quantité plus grande égale à une moindre quantité: comme, par exemple, que les équations ſoient $2x=3y$, & $4x=6y$; il eſt clair en ce cas, que cette derniére équation eſt une conſéquence de la premiére, comme étant ſimplement la premiére même multipliée par 2; & ſi l'on entreprenoit de réſoudre ces deux équations par quelques-unes des règles précédentes, on parviendroit à la fin à la merveilleuſe découverte que $0=0$: d'un autre côté, que les équations ſoient $2x=3y$, & $4x=6y+7$; ici il eſt bien clair, que la derniére équation contredit la premiére; car ſi $2x$ ſont égaux à $3y$, il faut néceſſairement que $4x$ ſoient égaux à $6y$, & non pas à $6y+7$; & ſi l'on réſout ces deux équations, ou qu'on entreprenne de les réſoudre par le ſecours des règles précédentes, on ſe trouvera enfin réduit à cette abſurdité, que $7=0$; & c'eſt ce qui arrive ſouvent au bout d'une opération, les équations ſe trouvant dépendantes l'une de l'autre, ou contradictoires l'une à l'autre, quoiqu'il n'y eût guéres moyen d'abord de remarquer la choſe.

Je vais donner à-préſent quelques exemples de problêmes dans leſquels il y a plus de deux quantités inconnues.

PROBLEME 65.

93. *Trois hommes*, A, B & C *parloient de leur argent*; A *dit à* B & *à* C, *donnez-moi la moitié de votre argent, & j'aurai la ſomme* d; B *dit à* A & *à* C, *donnez-moi le tiers de votre argent, & j'aurai auſſi la ſomme* d; C *dit à* A & *à* B, *donnez-moi le quart de votre argent, & j'aurai pareillement la ſomme* d: *combien d'argent chacun d'eux avoit-il?*

N. B.

N. B. La lettre d eſt ſuppoſée ici tenir lieu de quelque quantité connue, qui eſt laiſſée indéterminée juſqu'à ce que le calcul ſoit achevé.

SOLUTION.

Que a, b & c déſignent l'argent de A, B & C reſpectivement, & nous aurons ces trois équations fondamentales;

$$a+\frac{b+c}{2}=d;$$

$$b+\frac{a+c}{3}=d;\ \&$$

$$c+\frac{a+b}{4}=d.$$

Les équations préparées ſuivant l'Art. 70, ſeront

Eq. 1. $2a+b+c=2d.$

Eq. 2. $a+3b+c=3d.$

Eq. 3. $a+b+4c=4d.$

Retranchez la premiére équation de deux fois la ſeconde, & vous aurez

Eq. 4. $*\ \ 5b+c=4d.$

Retranchez la troiſiéme équation de la ſeconde, & vous aurez

Eq. 5. $*\ \ 2b-3c=-d.$

Retranchez cinq fois la premiére équation de deux fois la quatriéme, & vous aurez

Eq. 6. $*\ *\ \ 17c=13d.$

Eq. 7. $*\ *\ \ c=\frac{13d}{17}.$

Subſtituez cette valeur de c dans la quatriéme équation, & vous aurez $5b+c$, c'eſt-à-dire $5b+\frac{13d}{17}=4d$; donc $85b+13d=68d$; donc $85b=55d$, & $b=\frac{55d}{85}=\frac{11d}{17}$; donc

Eq. 8. $*\ \ b\ \ *=\frac{11d}{17}.$

Subſtituez préſentement les deux valeurs de b & de c déjà trouvées, à la place de b & de c dans la premiére équation, & vous aurez $2a+b+c$, c'eſt-à-dire $2a+\frac{11d+13d}{17}$, ou $2a+\frac{24d}{17}=2d$; donc $34a+24d=34d$; & $34a=10d$; & $a=\frac{10d}{34}=\frac{5d}{17}$; donc

Eq. 9. $a\ \ *\ \ *=\frac{5d}{17}.$

De ſorte que les nombres cherchés ſe trouvent à la fin être $a=\frac{5d}{17}$, b

$= \frac{11d}{17}$, & $c = \frac{13d}{17}$; d'où il ſuit, que ſi l'on ſubſtitue quelque nombre à la place de d, qui ait 17 pour diviſeur, les grandeurs a, b & c ſeront des nombres entiers; comme, par exemple, ſi d eſt fait égal à 17, les quantités a, b & c, ſeront 5, 11 & 13 reſpectivement; & ces nombres ſatisferont aux conditions du problême, car $5 + \frac{11+13}{2}$, ou $5 + 12 = 17$; $11 + \frac{5+13}{3}$, ou $11 + 6 = 17$; $13 + \frac{5+11}{4}$, ou $13 + 4 = 17$.

Avertiſſement. J'eſpére que le Lecteur s'eſt apperçu de lui-même, que les nombres, a, b & c doivent toujours être conſidérés comme étant de même dénomination que le nombre d; comme ſi le nombre d déſignoit autant de guinées qu'il contient d'unités, les nombres a, b, & c déſigneroient pareillement des guinées, *&c.*

Eq. 1. $2a + b + c = 2d.$
2. $a + 3b + c = 3d.$
3. $a + b + 4c = 4d.$
4. $a * 5b + c = 4d$
5. $* 2b - 3c = -d.$

Eq. 6. $* * 17c = 13d.$
7. $* * c = \frac{13d}{17}.$
8. $* b * = \frac{11d}{17}.$
9. $a * * = \frac{5d}{17}.$

SCHOLIE.

94. La premiére, la ſeconde & la troiſiéme des équations précédentes, dans leſquelles la quantité a eſt mêlée, peuvent s'appeller équations du premier rang; la quatriéme & la cinquiéme, dans leſquelles la quantité b eſt mêlée, & dont la quantité a eſt exclue, peuvent s'appeller équations du ſecond rang; la ſixiéme, dans laquelle c ſe trouve, & dont les quantités a & b ſont exclues, peut s'appeller équation du troiſiéme rang, & ainſi de ſuite, quelque grand que puiſſe être le nombre des quantités inconnues.

Toutes les fois que les équations de quelque rang ſont données ou trouvées, l'Analyſte, qui voudroit en déduire les équations d'un rang inférieur, eſt le maître de combiner ces premiéres équations par paires comme il lui plaît, pourvu qu'il obſerve ſeulement ces deux choſes; premiérement, que chaque équation du rang donné ſoit, durant le cours de l'opération, combinée avec quelque équation du même rang, de ſorte qu'il n'y ait aucune équation d'omiſe; en ſecond lieu, que dans chaque combinaiſon particuliére, une des équations n'ait jamais été employée dans

dans une combinaiſon précédente, & que l'autre ait été mêlée auparavant dans quelque combinaiſon, horsmis la premiére paire. A-la-vérité, l'Algébriſte peut s'écarter quelquefois de cette derniére règle; mais s'il s'y tient, il n'en fera que mieux.

PROBLEME 66.

95. *Trois hommes*, A, B & C *parloient de leur argent; A dit à* B *&* C, *donnez-moi* e *de votre fonds, & j'aurai le double de ce que vous aurez laiſſé; B dit à* A *&* C, *donnez-moi* e *de votre fonds, & j'aurai trois fois autant que vous aurez laiſſé; C dit à* A *&* B, *donnez-moi* e *de votre fonds, & j'aurai quatre fois autant que vous aurez laiſſé: Combien avoit chacun d'eux?*

SOLUTION.

Déſignez par a, b & c l'argent de A, de B & de C reſpectivement, & vous aurez ces trois équations fondamentales;

$$a+e=2b+2c-2e.$$
$$b+e=3a+3c-3e.$$
$$c+e=4a+4b-4e.$$

Ces équations préparées, ſeront;

Eq. 1. $a-2b-2c=-3e.$
Eq. 2. $3a-b+3c=4e.$
Eq. 3. $4a+4b-c=5e.$

Retranchez trois fois la premiére équation de la ſeconde, & vous aurez

Eq. 4. * $5b+9c=13e.$

Retranchez quatre fois la premiére équation de la troiſiéme, & vous aurez

Eq. 5. * $12b+7c=17e.$

Retranchez cinq fois la cinquiéme équation de douze fois la quatriéme, & vous aurez

Eq. 6. * * $73c=71e$; donc
Eq. 7. * * $c=\frac{71e}{73}$.

Subſtituez cette valeur de c dans la quatriéme équation, & vous aurez $5b+9c$, c'eſt-à-dire, $5b+\frac{639e}{73}=13e$; donc $365b+639e=949e$; & $365b=310e$, & $b=\frac{310e}{365}=\frac{62e}{73}$; donc

Eq.

Eq. 8. * b * $= \frac{62e}{73}$.

Donc $b+c=\frac{133e}{73}$, & $2b+2c=\frac{266e}{73}$, & $-2b-2c=-\frac{266e}{73}$; ainſi en ſubſtituant $-\frac{266e}{73}$ à la place de $-2b-2c$ dans la premiére équation, on aura $a-\frac{266e}{73}=-3e$; par conſéquent $73a-266e=-219e$; donc

Eq. 9. a * * $= \frac{47e}{73}$.

Si bien qu'à la fin l'argent de A ſe trouve être $\frac{47e}{73}$, celui de B $\frac{62e}{73}$, & celui de C $\frac{71e}{73}$: faites $e=73$, & l'argent de A ſera 47, celui de B 62, & celui de C 71. C'eſt ce qui eſt bien clair: l'argent de A eſt 47, & celui de B & de C enſemble 133; ajoûtez 73 à 47 & l'argent de A ſera 120, au-lieu qu'en ôtant 73 de 133, l'argent de B & de C ſera 60; or $60\times 2=120$; outre cela, l'argent de B eſt 62, & celui de A & de C enſemble 118; retranchez 63 de 118, & il reſtera à A & à C 45, au-lieu qu'en ajoûtant 63 à 62 l'argent de B ſera 135; or $45\times 3=135$: enfin, l'argent de C eſt 71, & la ſomme de celui de B & de A 109; retranchez 73 de 109, & ajoûtez ce même nombre à 71, & C aura 144, & A & B 36; or $36\times 4=144$.

Eq. 1.	$a-2b-2c=$	$-3e$.	Eq. 7.	* *	$c=\frac{71e}{73}$.
2.	$3a-b+3c=$	$4e$.	8.	* b *	$=\frac{62e}{73}$.
3.	$4a+4b-c=$	$5e$.	9.	a * *	$=\frac{47e}{73}$.
4.	* $5b+9c=$	$13e$.			
5.	* $12b+7c=$	$17e$.			
6.	* * $73c=$	$71e$.			

PROBLEME 67.

96. *On demande quatre nombres* a, b, c & d, *qui ſoient tels, que* a *augmenté de la moitié de la ſomme de tout le reſte faſſe* f; *que* b *augmenté d'un tiers de la ſomme de tout le reſte faſſe* f; *que* c *augmenté d'un quart de la ſomme de tout le reſte faſſe* f; *& que* d *augmenté d'un cinquiéme de la ſomme de tout le reſte faſſe* f.

SOLUTION.

Les équations fondamentales de ce problême ſont

$a+\frac{b+c+d}{2}=f$.	$c+\frac{a+b+d}{4}=f$.
$b+\frac{a+c+d}{3}=f$.	$d+\frac{a+b+c}{5}=f$.

De

De ces équations dûment préparées ſe déduiſent les équations ſuivantes;

	Eq. 1.	$2a+b+c+d=2f.$
	2.	$a+3b+c+d=3f.$
	3.	$a+b+4c+d=4f.$
	4.	$a+b+c+5d=5f.$
Deux fois la 2de — la premiére donnent	5.	$*\quad 5b+c+d=4f.$
La 2de — la 3éme donne	6.	$*\quad 2b-3c\quad *=-f.$
La 3éme — la 4éme donne	7.	$*\quad *\quad 3c-4d=-f.$
Deux fois la 5éme — 5 fois la 6éme donnent	8.	$*\quad *\quad 17c+2d=13f.$
Trois fois la 8éme — 17 fois la 7éme donnent	9.	$*\quad *\quad *\quad 74d=56f.$
Cette derniére donne	10.	$*\quad *\quad *\quad d=\frac{28f}{37}.$
La 7éme & la 10éme donnent	11.	$*\quad *\quad c\quad *=\frac{25f}{37}.$
La 6éme & la 11éme donnent	12.	$*\quad b\quad *\quad *=\frac{19f}{37}.$
La 1ére, 12éme, 11éme & 10éme donnent.	13.	$a\quad *\quad *\quad *=\frac{1f}{37}.$

Suppoſez $f=37$, & les nombres a, b, c, d, ſe trouveront être 1, 19, 25, 28 reſpectivement.

PROBLEME 68.

97. *Quatre hommes*, A, B, C & D, *ayant chacun une différente ſomme d'argent, ſe mettent au jeu:* A *gagne à* B *la moitié de ſon argent*, B *gagne à* C *le tiers de ſon argent*, C *gagne à* D *le quart de ſon argent*, & D *gagne à* A *la cinquiéme partie de ſon argent; après cela ils quittent le jeu, ayant chacun la même ſomme d'argent, ſavoir* g; *laquelle quantité* g, *quoique connue, eſt ſuppoſée ne devoir être déterminée qu'après l'opération faite. On demande chacune des ſommes d'argent avec leſquelles* A, B, C, D, *ſe ſont mis au jeu; je veux dire, rélativement à la quantité connue* g.

Ce problême eſt ſuſceptible de différentes ſolutions; voici celle que nous croyons convenir le mieux ici.

SOLUTION.

Que a, b, c, d, repréſentent les ſommes inconnues reſpectives, avec leſquelles A, B, C & D ſe ſont mis au jeu; ſi A avoit perdu à D un cinquiéme de l'argent qu'il avoit d'abord, & n'avoit rien gagné à B, il auroit eu à la fin $\frac{a}{1}-\frac{a}{5}$ ou $\frac{4a}{5}$; mais ſuivant le probléme, A perd un cinquiéme de ſon argent à D, & gagne d'un autre côté à B la moitié de ſon

argent; donc la derniére ſomme de A, après le jeu fini, étoit $\frac{4a}{5}+\frac{b}{2}$; mais le problême porte, qu'à la fin du jeu, la derniére ſomme de A étoit g; ce qui nous fournit cette équation, $\frac{4a}{5}+\frac{b}{2}=g$; donc $4a+\frac{5b}{2}=5g$; par conſéquent $8a+5b=10g$: de même, les deux premiéres conditions du problême fourniſſent cette autre équation, $\frac{b}{1}-\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=g$, ou $\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=g$; cette équation, étant délivrée de ſes fractions, comme la précédente, devient $3b+2c=6g$: la ſeconde & la troiſiéme des conditions du problême fourniſſent cette équation, $\frac{c}{1}-\frac{c}{3}+\frac{d}{4}=g$, ou $\frac{2c}{3}+\frac{d}{4}=g$, laquelle étant dégagée de ſes fractions donne $8c+3d=12g$: enfin, la derniére & la premiére des conditions du problême, auſſi conſidérées enſemble, fourniſſent cette équation, $\frac{3d}{4}+\frac{a}{5}=g$; qu'on peut changer en celle-ci, $15d+4a$, ou $4a+15d=20g$; deſorte que les équations fondamentales de ce problême, dégagées de leurs fractions, ſe trouveront être;

$$8a+5b=10g.$$
$$3b+2c=6g.$$
$$8c+3d=12g.$$
$$4a+15d=20g.$$

Il eſt manifeſte que parmi ces équations il n'y en a que deux du premier rang, ſavoir, la premiére, $8a+5b=10g$, & la derniére, $4a+15d=20g$; la ſeconde équation fondamentale, ſavoir, $3b+2c=6g$ eſt une équation du ſecond rang, & la troiſiéme en ordre, $8c+3d=12g$ eſt une équation du troiſiéme rang; c'eſt pourquoi dans la réſolution de ce problême, ces équations fondamentales ne doivent pas être écrites toutes l'une ſous l'autre, comme dans les exemples précédens, mais doivent être placées chacune dans leur propre rang, ainſi;

Eq. 1. $8a+5b \quad * \quad * \quad =10g.$
2. $4a \quad * \quad * \quad +15d=20g.$

Or comme il n'y a point d'autres équations du premier rang que ces deux-là, voici de quelle maniére il faut s'y prendre en paſſant aux équations du ſecond rang; ſuivant l'Art. 70, retranchez deux fois la ſeconde équation de la premiére, & il reſtera $5b-30d=-30g$; donc diviſant les deux membres de cette équation par 5, nous aurons $b-6d=-6g$, pour une troiſiéme équation.

Eq. 3. $\quad * \quad b \quad * \quad - \quad 6d=-6g.$

Mais

Mais comme cette derniére équation eſt une équation du ſecond rang, il convient préſentement de faire uſage de l'équation du ſecond rang gardée juſqu'ici en réſerve dans le problème, ſavoir $3b+2c=6g$, & de la placer ſous les autres, ainſi:

Eq. 4. * $3b+2c$ * $=6g$.

Retranchez à-préſent trois fois la troiſiéme équation de la quatriéme, c'eſt-à-dire, retranchez * $3b$ * $-18d=-18g$ de * $3b+2c$ * $=6g$, & il reſtera $2c+18d=24g$; diviſant le tout par 2, nous aurons

Eq. 5. * * $c+9d=12g$.

Cette équation eſt du troiſiéme rang: ainſi, il conviendra de faire uſage de la derniére des équations fondamentales données dans le probleme, qui eſt de même rang que celle-ci, & de la placer ſous celle-ci comme une ſixiéme équation, ainſi;

Eq. 6. * * $8c+3d=12g$.

Retranchez cette ſixiéme équation de huit fois la cinquiéme, c'eſt-à-dire, * * $8c+3d=12g$ de * * $8c+72d=96g$, & il reſtera $69d=84g$; diviſant le tout par 3, nous aurons

Eq. 7. * * * $23d=28g$.

Eq. 8. * * * $d=\frac{28g}{23}$.

Subſtituez cette valeur à la place de d dans la cinquiéme équation, & au-lieu de $c+9d=12g$, vous aurez $c+\frac{252g}{23}=12g$; par conſéquent $23c+252g=276g$; & $23c=24g$; &

Eq. 9. * * c * $=\frac{24g}{23}$.

Subſtituez la valeur de d, trouvée dans la huitiéme équation, à la place de d dans la troiſiéme, où nous avions $b-6d=-6g$, & vous aurez $b-\frac{168g}{23}=-6g$; donc $23b-168g=-138g$; & $23b=30g$; &

Eq. 10. * b * * $=\frac{30g}{23}$.

Subſtituez cette valeur de b dans la premiére équation, $8a+5b=10g$, & vous aurez $8a+\frac{150g}{23}=10g$; par conſéquent $184a+150g=230g$; donc $184a=80g$, & $a=\frac{80g}{184}=\frac{10g}{23}$, donc nous avons

Eq. 11. a * * * $=\frac{10g}{23}$.

Deſorte qu'à la fin toutes les quantités a, b, c, d, viennent à être con-

nues rélativement à la grandeur g; car $a=\frac{10g}{23}$, $b=\frac{30g}{23}$, $c=\frac{24g}{23}$, & $d=\frac{28g}{23}$: ſuppoſez $g=23$, & les quantités ſe trouveront toutes exprimées par des nombres entiers; $a=10$, $b=30$, $c=24$, & $d=28$; & elles ſatisferont aux conditions du problême; car à ce compte

La derniére ſomme de A ſera $10-2+15=23$;
La derniére ſomme de B ſera $30-15+8=23$;
La derniére ſomme de C ſera $24-8+7=23$;
& La derniére ſomme de D ſera $28-7+2=23$;

Eq. 1.	$8a+5b$	*	*	$=10g$.	Eq. 8.	* * *	$d=\frac{28g}{23}$.
2.	$4a$	*	*	$+15d=20g$.	9.	* * c	$*=\frac{24g}{23}$.
3.	*	b	*	$-6d=-6g$.	10.	* b *	$*=\frac{30g}{23}$.
4.	*	$3b+2c$	*	$=6g$.	11.	a * *	$*=\frac{10g}{23}$.
5.	*	*	c	$+9d=12g$.			
6.	*	*	$8c$	$+3d=12g$.			
7.	*	*	*	$23d=28g$.			

La ſolution, que nous venons de donner ici, eſt deſtinée à inſtruire le lecteur de la maniére dont il doit s'y prendre dans des cas où toutes ſes équations fondamentales ne ſont pas du même rang; car autrement le problême eſt ſuſceptible d'une ſolution bien plus élégante en n'y employant qu'une ſeule inconnue, comme nous le verrons, ſi pour éviter les fractions, nous déſignons par x l'argent que D a gagné de A. Voici quelle eſt cette ſolution.

D gagne de A,	x;
Somme que A avoit d'abord,	$5x$;
Ce qui reſte à A après ce que D lui a gagné,	$4x$;
A gagne à B,	$g-4x$;
Somme que B avoit d'abord,	$2g-8x$;
Ce qui reſte à B après ce que A lui a gagné,	$g-4x$;
B gagne à C,	$4x$;
Somme que C avoit d'abord,	$12x$;
Ce qui reſte à C après ce que B lui a gagné,	$8x$;
C gagne à D,	$g-8x$;
Somme que D avoit d'abord,	$4g-32x$;
Ce qui reſte à D après ce que C lui a gagné,	$3g-24x$.

D a gagné de A, $24x-2g$; car le reſte de l'argent de D, après ce qu'il a perdu à C étoit $3g-24x$, & par conſéquent, ſi D n'avoit rien gagné

gagné à A, la quantité $3g-24x$ auroit été la dernière ſomme de D; mais il paroît par le problême que cette dernière ſomme étoit g; ainſi l'argent que D a gagné de A doit être l'excès de g par deſſus $3g-24x$; donc en retranchant $3g-24x$ de g, le reſte $24x-2g$ ſera l'argent que D a gagné de A; & c'eſt préciſément de même que tous les autres gains ont été déterminés: nous avons donc ici deux expreſſions différentes pour déterminer l'argent que D a gagné de A, ſavoir x par la ſuppoſition, & $24x-2g$ par la nature du problême; donc $24x-2g=x$; & $x=\frac{2g}{23}$; après quoi la ſomme que chaque joueur a eue d'abord, ſe trouvera ainſi:

$A.$	$5x=\frac{10g}{23}.$	$C.$	$12x=\frac{24g}{23}.$
$B.$	$2g-8x=\frac{30g}{23}.$	$D.$	$4g-32x=\frac{28g}{23}.$

ELEMENS D'ALGEBRE.

LIVRE III.

Quelques observations destinées à faciliter l'intelligence de la règle pour l'extraction de la Racine quarrée.

ART. 98. JE me suis engagé ci-dessus à profiter de la première occasion pour expliquer la méthode ordinaire de tirer la racine quarrée, & cette occasion s'offre à présent: car, d'un côté, il n'y a pas moyen de resoudre les équations du second degré, dont nous allons traiter, sans l'extraction de la racine quarrée; & de l'autre, je suppose le jeune Analyste assez habile à présent pour me suivre avec moins de peine pour lui & peut-être aussi pour moi, qu'il n'auroit pu faire, si j'avois entamé ce sujet plutôt. Mais je ne dois pas oublier d'avertir ici mon Lecteur, que si un nombre entier, ou un nombre mixte composé d'un nombre entier & de quelques parties décimales, n'est pas un quarré, sa racine quarrée sera un nombre entier, plus une suite infinie de fractions décimales: mais s'il y a moyen de trouver une règle à l'aide de laquelle on puisse déterminer le nombre entier, cela suffit, à cause que toutes les parties de la racine quarrée d'un nombre quelconque peuvent être considérées comme formant un nombre entier, jusqu'à ce que l'opération soit faite, puisque ce n'est qu'alors qu'il est nécessaire d'ajoûter au nombre entier ses parties décimales. Voyez Introd. Art. 24.

Pour mieux effectuer ce que je me propose ici, je ferai part au Lecteur des observations suivantes, qui pourront lui être de grand usage pour l'intelligence de la démonstration que je vais donner; & s'il trouve, ou qu'il s'imagine trouver de la difficulté dans l'application de ces observations, le meilleur avis que je puisse lui donner ici, aussi-bien que dans plusieurs autres endroits de ce Livre, est qu'il lise & relise la démonstration; par ce moyen l'obscurité, dont elle lui avoit paru couverte d'abord, se dissipera peu à peu, & à la fin s'évanouira entiérement.

OBSERVATION I.

Si quelque nombre, comme $a+x$, composé de deux parties a & x, est élevé au quarré, le produit sera $aa+2ax+xx=aa+\overline{2a+x}\times x$.

OBSER-

OBSERVATION 2.

$1 \times 1 = 1$; de même $10 \times 10 = 100$, & $100 \times 100 = 10000$, & $1000 \times 1000 = 1000000$, &c. d'où j'infére, que ſi quelque nombre eſt compoſé d'un ou de deux caractéres, ſa racine quarrée, ou du moins la partie de cette racine qui eſt un nombre entier, ne ſera que d'un caractére; ſi un nombre eſt compoſé de trois ou de quatre caractéres, le nombre entier de ſa racine ſera de deux caractéres; ſi un nombre eſt compoſé de cinq ou ſix caractéres, le nombre entier de ſa racine ſera de trois caractéres, &c.: ainſi le nombre entier de la racine quarrée de ce nombre de cinq caractéres 56644, ſera de trois caractéres; car ce nombre eſt entre 10000, dont la racine quarrée eſt 100, & entre 1000000, dont la racine quarrée eſt 1000; donc le nombre entier de la racine quarrée du nombre 56644 doit ſe trouver entre 100 & 1000, & conſiſter par conſéquent en trois caractéres.

OBSERVATION 3.

Il ſuit de l'obſervation précédente, que ſi à quelque nombre propoſé on met un point au-deſſus de la place des unités, & un autre point au-deſſus de la place des centaines, & ainſi toujours de ſuite, en laiſſant une place vuide entre deux, le nombre des points marquera celui des caractéres, dont le nombre entier de la racine quarrée du nombre propoſé ſera compoſé: par exemple, ſi le nombre 56644 étoit marqué ainſi, nous aurions $\dot{5}6\dot{6}44$; & les trois points donneroient à connoître, que la racine quarrée de ce nombre, ou du moins le nombre entier de cette racine, eſt de trois caractéres.

OBSERVATION. 4.

Suppoſant tout comme dans la derniére obſervation, ſi quelque nombre eſt avancé d'un point, c'eſt-à-dire, de deux caractéres vers la gauche, en ajoûtant des zéros, ou en changeant quelques caractéres à la droite en les dépouillant de leur qualité de fractions décimales, & en les conſidérant comme des nombres ordinaires; les caractéres qui exprimeront la racine quarrée, ſeront les mêmes, avec cette différence ſeulement, que ces caractéres ſeront avancés chacun d'une place vers la gauche; ſi le nombre eſt avancé de deux points, c'eſt-à-dire, de quatre caractéres, la racine quarrée ſera avancée de deux places; &c. par exemple, ſi la racine quarrée du nombre 576 eſt 24, celle du nombre 57600 ſera 240, celle de 5760000 ſera 2400, &c. par exemple encore,

re, ſi la racine quarrée du nombre 5 .6644 eſt 2 .38, la racine quarrée du nombre 566 .44 ſera 23 .8, & celle du nombre 56644 ſera 238, &c. Pour en être convaincu, & pour comprendre en même tems la raiſon de la choſe, on n'a qu'à élever à la ſeconde puiſſance les nombres 2 .38, 23 .8, 238.

N. B. Elever un nombre au quarré, comme il a été dit ci-deſſus, c'eſt le multiplier par lui-même.

Observation 5.

Il ſuit de la derniére obſervation, que ſi la racine quarrée de quelque nombre, par exemple, de 5 .6644 ſe trouve entre 2 & 3, la racine quarrée de 566 .44 ſe trouvera entre 20 & 30; & celle de 56644, entre 200 & 300 &c. par exemple encore, ſi la racine quarrée de 566. 44 ſe trouve entre 23 & 24, la racine quarrée de 56644 ſera entre 230 & 240: cela eſt manifeſte; car ſuppoſons la racine quarrée de 566 .44 égale à 23 .8, en ce cas, par la derniére obſervation, la racine quarrée de 56644 ſera 238; & comme le nombre 23 .8 ſe trouve entre 23 & 24, de même celui de 238 ſe trouve entre 230 & 240.

Recherche d'une règle pour l'extraction de la Racine quarrée:

99. Ces obſervations étant faites, qu'on propoſe quelque nombre, tel que 56644; & voyons s'il n'y auroit pas moyen d'en découvrir la racine quarrée par un ſimple effort de raiſonnement, ſans emprunter aucun ſecours de la méthode ordinaire. Ce nombre étant donc marqué, comme il a été dit dans la troiſiéme obſervation, je commencerai d'abord par le caractére 5, appartenant au premier point à la main gauche, ſans avoir aucun égard aux caractéres ſuivans. Je dirai donc: le nombre 5 lui-même n'eſt pas un nombre quarré; c'eſt pourquoi j'en ſouſtrais le nombre 4, qui eſt un nombre quarré, & il reſte 1; & comme 2 eſt la racine quarrée de 4, j'en infére, que de toute la ſuite infinie repréſentant la racine quarrée du nombre 5, le premier terme, ou le nombre entier de cette racine eſt 2: d'ailleurs, comme le quarré de 2 forme, en nombre entier, un quarré immédiatement au-deſſous de 5, qui lui-même n'eſt pas un nombre quarré, il s'enſuit que le quarré de 3 ſera, en nombre entier, le quarré le plus proche immédiatement au-deſſus de 5, & par conſéquent que le quarré de 3, quel qu'il ſoit, ne ſauroit être plus petit que 6; d'où j'infére enſuite, que le nombre 2 eſt le premier terme de la racine quarrée, non ſeulement du nombre 5, mais auſſi de quelque autre nombre entre 5 & 6 au moins;

ainſi

ainſi 2 ſera le premier caractére de la racine quarrée du nombre 5 .66, auſſi-bien que du nombre 5 .6644; donc par la quatriéme obſervation, 2 ſera le premier caractére de la racine quarrée du nombre 56644; ce qui eſt déjà un grand point de gagné. Pour découvrir préſentement le caractére ſuivant de la racine, je conſidére le nombre 566 en lui-même, ſans avoir aucun égard aux autres caractéres. Il a déjà été prouvé, que le premier caractére de la racine quarrée de 5 .66 eſt 2; donc cette racine ſe trouve entre 2 & 3, & en conſéquence de la cinquiéme obſervation, la racine quarrée du nombre 566 ſe trouve entre 20 & 30; que $20+x$ repréſente donc la partie de la racine quarrée de 566, qui eſt exprimable par un nombre entier, x étant un nombre entier du rang des unités: il eſt manifeſte alors, que le quarré de $20+x$ doit être préciſément égal à 566, ſi ce dernier nombre eſt un quarré parfait; ou bien le premier quarré en nombre entier au-deſſous de 566; mais le quarré de $20+x$ eſt par la premiére obſervation $20\times 20+\overline{40+x}\times x$; donc $20\times 20+\overline{40+x}\times x$ eſt ou égal à 566, ou plus petit que ce nombre; retranchez le quarré de 20 des deux côtés, en remarquant, que comme auparavant, 2×2 étant retranchés de 5, il reſtoit 1, ainſi préſentement 20×20 étant retranchés de 500, il doit reſter 100, & qu'après avoir ſouſtrait 400 de 566, il reſte 166, ainſi $\overline{40+x}\times x$ doit être ou égal à 166 ou moindre, ſuivant que le nombre 566 eſt, ou n'eſt pas un quarré parfait; & par conſéquent ſi $\overline{40+x}\times x$ eſt un nombre plus petit que 166, la différence ſera l'excès du nombre 566 par-deſſus le nombre quarré le plus proche de 566, & plus petit que ce nombre: on voit par-là, pour le dire un paſſant, que le nombre 166 doit être partagé en deux nombres, ſavoir x, & $40+x$, dont le produit doit être égal à 166, ou en approcher autant qu'il eſt poſſible: mais continuons; comme nous avons déjà prouvé que le produit $\overline{40+x}\times x$ ne doit pas ſurpaſſer 166, il s'enſuit que le produit $40x$ eſt moindre que 166, & par conſéquent que x eſt plus petit que le quotient de 166 diviſés par 40, ou que 16.6 diviſés par 4; mais le quotient de 16.6 diviſés par 4 ſe trouve entre les deux nombres entiers 4 & 5; donc x eſt plus petit que 5, & 4 eſt le plus grand nombre entier qu'on puiſſe ſuppoſer égal à x; ſuppoſons donc x égal à 4, & voyons ce qui en réſultera; ſi $x=4$, nous aurons $\overline{40+x}=44$, & $40+x\times x=44\times 4=176$; donc la ſuppoſition de $x=4$ étoit fauſſe, à cauſe que $\overline{40+x}\times x$ ne doit pas ſurpaſſer 166; cela étant, faiſons $x=3$, & nous aurons $40+x=43$, & $\overline{40+x}\times x=43\times 3=129$, nombre plus petit que 166, & qui par cela même n'a rien

d'opposé aux conditions marquées ci-dessus; & puisque x doit être fait égal au plus grand nombre entier, que les conditions précédentes pourront admettre, x doit être égal à 3, & par conséquent $20+x$, ou la partie la plus prochaine, & exprimable en nombre entier, de la racine quarrée du nombre 566 est 23; & puisque $\overline{40+x}\times x$ ou 129, retranchés de 166, laissent 37, il s'ensuit que 23×23 étant soustraits de 566, il doit rester aussi 37: outre cela, comme le quarré de 23 est le nombre quarré immédiatement au-dessous de 566, qui n'est pas un nombre quarré, il faut que le quarré de 24 soit plus grand que 566, & par conséquent pas plus petit que 567; c'est pourquoi la racine quarrée du nombre 566.44 doit nécessairement se trouver entre 23 & 24; donc par la cinquiéme observation, la racine quarrée du nombre 56644 doit être entre 230 & 240, ce qui est un nouveau pas en fait d'approximation: supposons présentement que $230+x$ est la racine quarrée, ou le nombre entier de la racine quarrée du nombre 56644; en ce cas la premiére observation nous donnera $230\times 230+\overline{460+x}\times x=56644$, ou moindres que ce nombre: retranchez 230×230 des deux côtés, en observant, que comme auparavant 23×23 étant retranchés de 566, il restoit 37, de même à présent 230×230 étant soustraits de 56600, il doit rester 3700; & qu'en retranchant ce même quarré de 56644, il doit rester 3744; donc $\overline{460+x}\times x$ ne sauroient surpasser 3744, & le nombre $460x$ est plus petit que 3744; de plus x doit être plus petit que le quotient de 3744 divisés par 460; mais le quotient de 3744 divisés par 460, ou (ce qui revient à peu près au même, surtout rélativement au nombre entier de la racine) le quotient de 374 divisés par 46 se trouve entre les deux nombres entiers 8 & 9; donc 8 est le plus grand nombre entier qu'on puisse supposer égal à x: supposons donc $x=8$, & nous aurons $\overline{460+x}=468$, & $\overline{460+x}\times x=468\times 8=3744$, ce qui s'accorde avec les conditions indiquées ci-dessus: ainsi le nombre 238 est exactement la racine quarrée du nombre proposé 56644. C. Q. F. T.

Celui qui voudra se donner la peine d'extraire la racine quarrée de ce même nombre 56644 en suivant la méthode ordinaire, s'appercevra aisément que cette méthode est fondée sur ce qui vient d'être démontré.

Fondement de la règle ordinaire pour l'extraction de la Racine cubique.

100. Le cube de $\overline{a+x}$ est $a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$; faites $\overline{3a+x}=b$; puis multipliant les deux membres de cette équation par x, vous aurez $3ax+xx=bx$, & $3a^2+3ax+xx=3a^2+bx$; & $3a^2x+3ax^2+x^3$

=

$= \overline{3a^2 + bx} \times x$; donc le cube de $a+x$ eſt $a^3 + \overline{3a^2+bx} \times x$: ceci répond à la premiére obſervation dans le penultiéme Article, & ſert de fondement à la règle pour l'extraction de la racine cubique; & quiconque appliquera les raiſonnemens des deux derniers Articles au cas préſent, ſera capable de ſe former à lui-même une règle pour l'extraction de la racine cubique, ou du moins pourra mieux comprendre la règle ordinaire, telle qu'elle ſe trouve dans les Livres d'Arithmétique.

N. B. La principale difficulté qu'on rencontre dans l'extraction de la racine quarrée ou cubique, conſiſte à trouver les deux premiers caractéres de la racine, & à leur égard il faut quelquefois y aller en tâtonnant; le reſte de l'opération eſt plus ſûr.

De la compoſition & de la réſolution d'un Quarré, qui a un binome pour racine.

101. Juſqu'ici nous ne nous ſommes principalement arrêtés qu'à des équations ſimples, & il eſt plus que tems que nous paſſions à celles du ſecond degré. Mais avant que d'en venir-là, il faut néceſſairement dire quelque choſe de la nature d'un binome.

Un binome (en prenant ce mot dans le ſens que nous y attachons ici) eſt une quantité compoſée de deux parties jointes enſemble par le ſigne $+$ ou $-$, comme $x+a$, $x-a$, $x+\frac{b}{2}$, $x-\frac{b}{2}$, & un quarré, qui a pour racine un binome, n'eſt autre choſe que le quarré d'une pareille quantité: ainſi le quarré de $x+\frac{b}{2}$ eſt $xx+bx+\frac{bb}{4}$, & celui de $x-\frac{b}{2}$ eſt $xx-bx+\frac{bb}{4}$.

$x+\frac{b}{2}$ | $x-\frac{b}{2}$

$x+\frac{b}{2}$ | $x-\frac{b}{2}$

$x^2+\frac{bx}{2}+\frac{bb}{4}$ | $x^2-\frac{bx}{2}+\frac{bb}{4}$

$+\frac{bx}{2}$ | $-\frac{bx}{2}$

$x^2+\frac{2bx}{2}+\frac{bb}{4}$; c'eſt-à-dire $x^2+bx+\frac{bb}{4}$. | $x^2-\frac{2bx}{2}+\frac{bb}{4}$; c'eſt-à-dire $x^2-bx+\frac{bb}{4}$.

La différence entre ces deux quarrés naît de la différence du ſigne qui eſt au devant de b; & cette différence n'affecte que le ſecond membre; car le troiſiéme membre $\frac{bb}{4}$, ſera le même, que b ſoit une grandeur

affirmative ou négative; c'eſt pourquoi, en réuniſſant ces deux cas en une ſeule formule, on aura: *Le quarré de* $x \pm \frac{b}{2}$ *eſt* $xx \pm bx + \frac{bb}{4}$; *ſavoir,* $+bx$ *quand la racine eſt* $x + \frac{b}{2}$, & $-bx$ *quand la racine eſt* $x - \frac{b}{2}$. Or des trois membres qui compoſent ce quarré, le premier xx eſt le quarré de x; le ſecond $\pm bx$ eſt la racine de ce quarré multipliée par le coëfficient $\pm b$; car la racine de xx eſt x, & $x \times \pm b = \pm bx$; le troiſiéme & dernier terme $\frac{bb}{4}$ eſt le quarré de $\pm \frac{b}{2}$, c'eſt-à-dire, le quarré de la moitié du coëfficient du ſecond terme; d'où nous déduiſons les deux obſervations ſuivantes.

OBSERVATION I.

Toutes les fois que nous rencontrons une quantité compoſée de deux termes, comme $xx \pm bx$, *dont l'une, comme* xx, *eſt un quarré, & l'autre* $\pm bx$ *eſt la racine de ce quarré multipliée par quelque coëfficient donné* $\pm b$; *toutes les fois, dis-je, que nous rencontrons une pareille quantité, nous pouvons la conſidérer comme un quarré imparfait, qui, s'il étoit complet, auroit pour racine un binome, mais qu'on peut aiſément rendre complet par l'addition de* $\frac{bb}{4}$, *c'eſt-à-dire, par l'addition du quarré de la moitié du coëfficient du ſecond terme:* ainſi $xx + 6x$ étant rendu complet, devient $xx + 6x + 9$; $xx - 8x$ devient $xx - 8x + 16$; $xx + 3x$ devient $xx + 3x + \frac{9}{4}$: de plus, $xx + \frac{2x}{3}$ devient $xx + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$; car le ſecond terme eſt ici $\frac{2x}{3}$, & par conſéquent le coëfficient de x eſt $\frac{2}{3}$ par l'Art. 70.; mais la moitié de $\frac{2}{3}$ eſt $\frac{1}{3}$, & le quarré de cette derniére fraction eſt $\frac{1}{9}$: pareillement $xx - \frac{5x}{6}$, quand on l'a rendu complet, devient $xx - \frac{5x}{6} + \frac{25}{144}$; car ici le coëfficient eſt $-\frac{5}{6}$, dont la moitié eſt $-\frac{5}{12}$, & le quarré de cette moitié eſt $\frac{25}{144}$: enfin, $xx - \frac{bx}{a}$ devient $xx - \frac{bx}{a} + \frac{bb}{4aa}$; car ici le coëfficient eſt $-\frac{b}{a}$, ſa moitié $-\frac{b}{2a}$, & le quarré de cette moitié $\frac{bb}{4aa}$.

OBSER-

OBSERVATION 2.

Nous obſervons en ſecond lieu, que la racine d'un tel quarré rendu complet, c'eſt-à-dire, la racine de $xx \pm bx + \frac{bb}{4}$, *ſera toujours* $x \pm \frac{b}{2}$, *c'eſt-à-dire, la racine quarrée du premier terme, plus la moitié du coëfficient du ſecond terme:* ainſi la racine quarrée de $xx+6x+9$, ſera $x+3$; celle de $xx-8x+16$ ſera $x-4$; celle de $xx-3x+\frac{9}{4}$ ſera $x+\frac{3}{2}$; celle de $xx+\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}$ ſera $x+\frac{1}{3}$; celle de $xx-\frac{5x}{6}+\frac{25}{144}$ ſera $x-\frac{5}{12}$; & enfin celle de $xx-\frac{bx}{a}+\frac{bb}{4aa}$ ſera $x-\frac{b}{2a}$.

Formule à laquelle toutes les Equations du ſecond degré doivent être réduites pour les réſoudre.

102. Comme une équation affectée du ſecond degré, telle que nous l'avons définie ci-deſſus, (Art. 23.) eſt une équation compoſée de trois différentes ſortes de quantités; une ſorte où le quarré de la quantité inconnue ſe trouve mêlé; une autre ſorte où la quantité inconnue n'eſt point multipliée par elle-même; & une troiſiéme ſorte où l'inconnue ne ſe trouve point du tout; il s'enſuit, que toutes les équations du ſecond degré, quelles qu'elles puiſſent être, ſont réductibles à la formule $Axx = Bx + C$, dans laquelle A, B & C déſignent des nombres entiers connus, affirmatifs ou négatifs, & x la quantité inconnue; le ſigne $+$ qui ſe trouve dans le ſecond membre de l'équation $Bx+C$, ne ſignifiant autre choſe ſinon que les deux quantités Bx & C doivent être ajoûtées enſemble ſuivant les régles ordinaires de l'addition, ſoit qu'elles ſoient toutes deux affirmatives, ou toutes deux négatives, ou l'une affirmative, & l'autre négative; c'eſt ce qu'on ne ſauroit révoquer en doute, ſi l'on conſidére, que les équations du ſecond degré peuvent, comme toutes les autres, être dégagées de fractions, de la même maniére que cela ſe pratique à l'égard des équations ſimples; & dès que cela eſt fait, il ne faut, tout au plus, qu'une tranſpoſition de termes, pour les réduire à la formule indiquée ci-deſſus: cependant nous ne laiſſerons pas de donner quelques exemples de la réduction des équations du ſecond degré à cette formule parmi celles que nous aurons occaſion de propoſer.

Théorême général pour réſoudre toutes les Equations du ſecond degré.

103. Suppoſons préſentement qu'il ſoit queſtion de réſoudre quelque équation générale du ſecond degré, avec laquelle toutes les équations

particuliéres du même degré pourront être comparées dans la ſuite, ce qui en facilitera la ſolution; comme par exemple, ſoit propoſée l'equation générale de l'Article précédent, ſavoir, $Axx = Bx + C$, & qu'on veuille trouver la valeur ou les valeurs de x dans cette équation: en tranſpoſant Bx, j'aurai $Axx - Bx = C$; puis diviſant les deux membres par A, afin de délivrer xx (qui eſt la plus haute puiſſance de x) de ſon coëfficient, il viendra $xx - \frac{Bx}{A} = \frac{C}{A}$; après cela, je conſidére le premier membre $xx - \frac{Bx}{A}$, comme un quarré imparfait, qui, s'il étoit complet, auroit pour racine un binome: j'ajoûte donc ce qui y manque, conformément à l'Art. 101, ſavoir, $\frac{BB}{4AA}$, c'eſt-à-dire, le quarré de la moitié du coëfficient du ſecond terme; mais ſi $\frac{BB}{4AA}$ doit être ajoûté au premier membre pour rendre le quarré complet, il faut auſſi l'ajoûter à l'autre membre pour conſerver l'égalité: cette addition étant faite, l'équation ſera $xx - \frac{Bx}{A} + \frac{BB}{4AA} = \frac{BB}{4AA} + \frac{C}{A}$; mais les deux fractions $\frac{BB}{4AA}$ & $\frac{C}{A}$ peuvent ſe réduire à une ſeule $\frac{4ABB + 4AAAC}{4AAA}$, laquelle étant diviſée par A, donnera $\frac{BB + 4AC}{4AA}$; donc $xx - \frac{Bx}{A} + \frac{4AA}{BB} = \frac{BB + 4AC}{4AA}$; donc la racine quarrée d'un des membres ſera égal à la racine quarrée de l'autre; mais la racine quarrée de la fraction $\frac{BB + 4AC}{4AA}$; au moins telle qu'elle eſt exprimée ici en lettres, ne ſauroit s'extraire; car ſi, d'un côté, la grandeur $4AA$ eſt un quarré de l'autre, il n'y a aucune grandeur litérale, qui, multipliée par elle-même, puiſſe produire $BB + 4AC$; ainſi pour donner à ce numérateur la forme d'un quarré, ſuppoſons $BB + 4AC = ss$; & l'équation ſe trouvera alors être $xx - \frac{Bx}{A} + \frac{BB}{4AA} = \frac{ss}{4AA}$; mais la racine quarrée de $xx - \frac{Bx}{A} + \frac{BB}{4AA}$ eſt $x - \frac{B}{2A}$, par l'Art. 101; & la racine quarrée de $\frac{ss}{4AA}$ eſt $\pm \frac{s}{2A}$ par une raiſon indiquée ci-deſſus, ſavoir, que la grandeur $\frac{-s}{2A}$ multipliée par elle-même produira $\frac{+ss}{4AA}$, auſſi bien que ſi cette multiplication eût eu lieu à l'égard de $\frac{+s}{2A}$; d'où il s'enſuit, par la définition même de la racine quarrée, que la premiére de ces quantités n'eſt pas moins une racine quarrée de $\frac{ss}{4AA}$ que la derniére; cela étant, cette

équa-

équation ſe trouve réduite à une autre plus ſimple, ſavoir, $x - \frac{B}{2A} = \pm \frac{s}{2A}$; donc $x = \frac{B \pm s}{2A}$, c'eſt-à-dire, $x = \frac{B+s}{2A}$, & $x = \frac{B-s}{2A}$ C. Q. F. T.

Il paroît par-là que toute équation du ſecond degré a néceſſairement deux nombres, ou deux racines (comme on les appelle) qui répondent également à la condition de l'équation, c'eſt-à-dire, qui, en ſuppoſant celle de ces racines qu'on voudra $= x$, rendra les deux membres de l'équation égaux l'un à l'autre; & ces deux racines, dans tous les Arts & dans toutes les Sciences où des équations du ſecond degré ſont employées, ſont également bonnes, qu'elles ſoient affirmatives ou négatives, ou que l'une ſoit affirmative, ou l'autre négative: comme par exemple, en Géométrie, ſi l'on conſidére comme affirmative une ligne menée d'un point vers la droite, une ligne, menée du même point vers la gauche, devra être conſidérée comme négative; car ſuppoſant que du point A, qui eſt vers la gauche, on méne au point B vers la droite la ligne AB, & qu'on conçoive enſuite que le point B ſe meut vers A; il eſt clair ici, que plus B approche de A, plus la ligne affirmative AB ira en diminuant; quand le point B coïncidera avec A, la ligne AB devra être conſidérée comme égale à zéro, & par conſéquent, quand le point B, en continuant à ſe mouvoir, ſe trouvera au-delà du point A, & à la gauche de ce point, la ligne AB deviendra négative, & cependant une pareille ligne eſt auſſi réelle qu'aucune ligne affirmative que ce ſoit: la même remarque eſt applicable à toutes les autres Sciences, où des équations du ſecond degré ſont employées: mais dans le train ordinaire de la vie, où des quantités négatives n'ont point lieu, les racines affirmatives des équations du ſecond degré ſont ſeules admiſes dans la ſolution des problêmes, les racines négatives en étant exclues la plupart du tems.

N. B. 1. La racine de quelque quantité, ſoit en nombres ou en lettres, qu'on ne ſauroit exprimer, s'appelle une racine ſourde: telle eſt par exemple, $\sqrt{3}$, de même que $\sqrt{BB + 4AC} = s$, ou, ce qui revient au même, $BB + 4AC = ss$.

2. La grandeur C, & par cela même la grandeur $4AC$ ſera quelquefois négative: en ce cas ss, où $BB + 4AC$ ſera la ſomme de la quantité affirmative BB & de la quantité négative $4AC$, ajoûtées enſemble ſuivant les règles ordinaires de l'addition.

3. Dans pluſieurs des exemples ſuivans, le Lecteur fera bien d'avoir devant les yeux les règles données ci-deſſus au ſujet des quantités négatives; par exemple, ſi x, c'eſt-à-dire $+x = -3$, il doit faire $4x$,

ou

ou $4x-3=-12$; mais il doit faire $-4x$, ou $-4x-3=+12$; de-même $-x$, ou $-1x$, ou $-1x-3$ eſt égal à 3, &c.

Démonſtration ſynthétique du Théorême précédent.

104. On a démontré analytiquement dans le dernier Article, que ſi Axx eſt égal à $Bx+C$, x doit néceſſairement être égal à $\frac{B+s}{2A}$, & à $\frac{B-s}{2A}$, dans la ſuppoſition que ss eſt égal à $BB+4AC$. Pour obliger les jeunes Algébriſtes, qui ont quelque génie, j'ai deſſein de prouver le même théorême ſynthétiquement, c'eſt-à-dire, de faire voir; que ſi x eſt fait égal à $\frac{B+s}{2A}$, ou à $\frac{B-s}{2A}$, en ce cas Axx doit néceſſairement être égal à $Bx+C$.

PREMIER CAS.

Soit $x=\frac{B+s}{2A}$; donc $xx=\frac{BB+2Bs+ss}{4AA}$; multipliez les deux membres par A, & vous aurez Axx (ou un des membres de l'équation générale) égal à $\frac{BB+2Bs+ss}{4A}$; car une fraction peut ſe multiplier auſſi bien par la diviſion du dénominateur que par la multiplication du numérateur: de plus, puiſque $x=\frac{B+s}{2A}$, on a $Bx=\frac{BB+Bs}{2A}$; en doublant tant le numérateur que le dénominateur de cette derniére fraction, ce qui n'en change pas la valeur, il vient $Bx=\frac{2BB+2Bs}{4A}$; donc $Bx+C=\frac{2BB+2Bs}{4A}+\frac{C}{1}=\frac{2BB+2Bs+4AC}{4A}=\frac{BB+2Bs+BB+4AC}{4A}$ $=\frac{BB+2Bs+ss}{4A}$ à cauſe que $BB+4AC=ss$ par l'hypothéſe; donc $Axx=Bx+C$, puiſque chaque membre de l'équation eſt égal à la même quantité $\frac{BB+2Bs+ss}{4A}$.

SECOND CAS.

Soit préſentement $x=\frac{B-s}{2A}$, & nous aurons $xx=\frac{BB-2Bs+ss}{4AA}$, & Axx (ou le premier membre de l'équation générale) $=\frac{BB-2Bs+ss}{4A}$; de plus $Bx=\frac{BB-Bs}{2A}=\frac{2BB-2Bs}{4A}$; donc $Bx+C=\frac{2BB-2Bs+4AC}{4A}$

=

$=\frac{BB-2Bs+ss}{4A}$; donc $Axx=Bx+C$, à cauſe que chaque membre eſt égal à la même grandeur $\frac{BB-2Bs+ss}{4A}$.

Divers exemples de la ſolution des Equations affectées du ſecond degré, tant par le moyen du théorême général, qu'independamment de ce théorême.

EXEMPLE I.

105. Soit l'équation qu'on propoſe à réſoudre $6xx=5x-1$. Cette équation particuliére peut, de-meme que celles qui ſuivent, ſe réſoudre préciſément de la même maniére que l'équation générale de l'Art. 103; mais comme ces ſortes de ſolutions ſont ſouvent accompagnées de fractions qui embarraſſent les commençans, & que ces équations particuliéres ne ſont que des cas particuliers de l'équation générale, il s'enſuit que la ſolution des premiéres doit être contenue dans celle de l'équation générale, & par conſéquent, que pour les réſoudre avec plus de facilité, il faut les rapporter à cette équation: cependant, pour la ſatisfaction du Lecteur, je réſoudrai quelques-unes de ces équations en partie par le moyen du théorême général, & en partie indépendamment de ce théorême; & je commencerai par réſoudre l'équation propoſée à l'aide du théorême général, de la maniére ſuivante. Dans l'équation générale, Art. 103, nous avons $Axx=Bx+C$; dans l'équation particuliére déjà propoſée, nous avons $6xx=5x-1$; donc A dans l'équation générale répond à 6 dans l'équation particuliére, B répond à 5, & C à -1; cela étant, ſi l'on rapporte l'équation particuliére à l'équation générale, voici quelle en ſera la ſolution: $A=6$, $B=5$, $C=-1$, $BB=25$, $4AC=-24$; donc ss, ou $BB+4AC$ ſera la ſomme de 25 & $-24=1$; donc $s=1$, $\frac{B+s}{2A}=\frac{5+1}{12}=\frac{1}{2}$, $\frac{B-s}{2A}=\frac{5-1}{12}=\frac{1}{3}$; ainſi les deux racines de cette équation $6xx=5x-1$ ſont $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$. La ſolution de cette équation en nombres ſans le ſecours du théorême général, peut ſe trouver ainſi. Equation $6xx=5x-1$; donc $6xx-5x=-1$, & $xx-\frac{5x}{6}=-\frac{1}{6}$; où $xx-\frac{5x}{6}$ peut être conſidéré comme formant les deux premiers termes d'un quarré, qui a pour racine un binome; le coëfficient du ſecond terme eſt $=\frac{5}{6}$, ſa moitié $=\frac{5}{12}$, & le quarré de cette moitié $\frac{+25}{12\times12}$: expreſſion que je préfére à celle de $\frac{+25}{144}$ par une raiſon dont on s'appercevra bientôt: ajoûtez préſentement $\frac{25}{12\times12}$ des deux

côtés, c'eſt-à-dire, à un des membres pour rendre le quarré complet, & à l'autre pour conſerver l'égalité, & vous aurez $xx-\frac{5x}{6}+\frac{25}{12\times12}=\frac{-1}{6}+\frac{25}{12\times12}$; il eſt manifeſte ici que les fractions $\frac{-1}{6}$ & $\frac{-+25}{12\times12}$ doivent être réduites au même dénominateur, afin de pouvoir les ajoûter mieux en une même ſomme; mais ſi cette opération ſe fait ſuivant la méthode ordinaire, il ſera impoſſible d'avoir la racine quarrée de cette ſomme ſans avoir beſoin d'une autre réduction: ainſi pour l'éviter, je recherche par quel nombre le dénominateur 6 doit être multiplié pour faire 12×12, qui eſt le même que l'autre dénominateur; & la réponſe dans ce cas, comme dans tous les autres de ce genre, ſera très-facile; car $2\times6=12$, & par conſéquent $12\times2\times6$, ou $24\times6=12\times12$; c'eſt pourquoi je multiplie tant le numérateur que le dénominateur de la fraction $\frac{-1}{6}$ par 24, & j'ai $\frac{-24}{12\times12}$; & cette fraction ajoûtée à l'autre fraction $\frac{-+25}{12\times12}$ me donne $\frac{-+1}{12\times12}$; après quoi l'équation devient $xx-\frac{5x}{6}+\frac{25}{12\times12}=\frac{1}{12\times12}$; tirez la racine quarrée de chacun des membres, & vous aurez $x-\frac{5}{12}=\pm\frac{1}{12}$: donc $x=\frac{5\pm1}{12}=\frac{1}{2}$; mais $\frac{5-1}{12}=\frac{1}{3}$; par conſéquent $x=\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$.

La même choſe peut ſe prouver ſynthétiquement ainſi: ſoit $x=\frac{1}{2}$; en ce cas $xx=\frac{1}{4}$, & $6xx=\frac{6}{4}$ ou $1\frac{1}{2}$: de plus, $5x=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$; donc $5x-1=1\frac{1}{2}$; donc $6xx=5x-1$, puiſque chacune de ces grandeurs en particulier $=1\frac{1}{2}$.

Suppoſons préſentement $x=\frac{1}{3}$, & nous aurons $xx=\frac{1}{9}$, & $6xx=\frac{6}{9}$, ou $\frac{2}{3}$; d'un autre côté nous aurons $5x=\frac{5}{3}$ ou $1\frac{2}{3}$; ainſi $5x-1=\frac{2}{3}$; donc $6xx=5x-1$: d'où il ſuit que ces deux fractions ſatisfont à la condition de l'équation, & parmi tous les autres nombres entiers ou rompus, il n'y a qu'elles ſeules qui y ſatisfaſſent.

EXEMPLE 2.

On demande la ſolution de l'équation $24x-2xx=xx+45$. Tranſpoſant d'abord $-2xx$, nous avons $3xx+45=24x$; ce qui donne $3xx=24x-45$, & réduit l'équation propoſée à la forme de l'équation générale de l'Art. 102; c'eſt pourquoi appliquant l'équation générale à cette équation particuliére, nous aurons en conſéquence de l'Art. 103: $A=3$, $B=24$, $C=-45$, $BB=576$, $4AC=-540$, $ss=576-540=36$, $s=6$, $\frac{B+s}{2A}=5$, $\frac{B-s}{2A}=3$; donc $x=5$ ou 3; & la choſe paroîtra manifeſte-

ment

ment par la ſubſtitution de 5 ou de 3 dans l'équation originale: cette ſubſtitution donnera, ſi $x=5$, $24x=120$; $xx=25$; donc $24x-2xx=120-50=70$, qui eſt un des membres de l'équation; d'un autre côté nous avons $xx+45=25+45=70$; par conſéquent $24x-2xx=xx+45$. Soit x à-préſent $=3$, nous aurons dans cette ſuppoſition $24x=72$, & $xx=9$, & $24x-2xx=54$: d'un autre côté, $xx+45=54$; donc $24x-2xx=xx+45$.

N. B. Cette dernière équation, après avoir été réduite à la formule de l'équation générale de l'Art. 102, étoit $3xx=24x-45$; mais cette équation auroit pu avoir été réduite à une autre plus ſimple de la même formule en diviſant le tout par 3, & en ce cas l'équation auroit été $xx=8x-15$, cela étant nous aurions $A=1$, $B=8$, $C=-15$, $BB=64$, $4AC=-60$, $ss=4$, $s=2$, $\frac{B+s}{2A}=5$, $\frac{B-s}{2A}=3$, comme ci-deſſus; en ſe ſervant de la méthode ordinaire on auroit eu la ſolution ſuivante; $xx-8x=-15$, donc en rendant le quarré complet, $xx-8x+16=1$; tirant la racine quarrée $x-4=\pm 1$; donc $x=+4\pm 1=5$ ou 3.

Exemple 3.

On propoſe à réſoudre l'équation $72x-2xx+144=3xx-8x+444$. En tranſpoſant nous aurons $72x+144=5xx-8x+444$, & $80x+144=5xx+444$, & $5xx=80x-300$, & $xx=16x-60$; en réſolvant cette équation comme celle du dernier exemple, nous trouverons $x=10$, ou 6; & pour s'en convaincre, on n'a qu'à ſubſtituer 10 ou 6 à la place de x dans l'équation originale.

Exemple 4.

Soit propoſée à réſoudre l'équation $28x-xx=115$. Nous avons ici $xx+115=28x$, & $xx=28x-115$: en réſolvant cette équation comme celle du ſecond exemple, on a $x=23$ ou 5.

Exemple 5.

On demande les racines de l'équation $\frac{120}{x}-5=\frac{120}{x+4}$. En multipliant les deux membres par x nous aurons $120-5x=\frac{120x}{x+4}$; donc $100x-5xx+480=120x$; donc $5xx+120x=100x+480$; donc $5xx=-20x+480$; donc (en diviſant toute l'équation par 5) $xx=-4x+96$; donc dans ce cas, $A=1$, $B=-4$, $C=96$, $BB=16$, $4AC=384$, $ss=16$

$ss=16+384=400$, $s=20$, $\frac{B+s}{2A}=\frac{-4+20}{2}=8$, $\frac{B-s}{2A}=\frac{-4-20}{2}$ $=-12$; donc l'équation, $x=8$, ou -12: en voici la preuve; soit $x=+8$; alors $\frac{120}{x}=15$, & $\frac{120}{x}-5=10$: de plus, $x+4=12$, & $\frac{120}{x+4}$ $=10$; donc $\frac{120}{x}-5=\frac{120}{x+4}$. Soit préſentement $x=-12$, & nous aurons $\frac{120}{x}=-10$; donc $\frac{120}{x}-5=-10-5=-15$: d'un autre côté, $x+4$ $=-12+4=-8$; par conſéquent $\frac{120}{x+4}=\frac{120}{-8}=-15$; donc $\frac{120}{x}$ $-5=\frac{120}{x+4}$. Pour trouver la ſolution par la méthode ordinaire, on auroit dit; $xx=-4x+96$; donc $xx+4x=96$; donc $xx+4x+4$ $=100$; donc $x+2=\pm 10$; donc $x=-2\pm 10=8$ ou -12.

Exemple 6.

Soit propoſée à réſoudre l'équation $2xx+3x=65$; donc $2xx=-3x$ $+65$; par conſéquent en ce cas, $A=2$, $B=-3$, $C=65$, $BB=9$, $4AC=520$, $ss=529$, $s=23$, $\frac{B+s}{2A}=\frac{-3+23}{4}=5$, $\frac{B-s}{2A}=\frac{-3-23}{4}$ $=-6\frac{1}{2}$: ainſi dans cette équation, $x=+5$, ou $-6\frac{1}{2}$. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à ſubſtituer ces valeurs de x à la place de cette inconnue dans l'équation propoſée. Suppoſons donc $x=-6\frac{1}{2}=\frac{-13}{2}$ donc $xx=\frac{+169}{4}$; donc $2xx=\frac{169}{2}$, & $+3x=+3\times\frac{-13}{2}=\frac{-39}{2}$; par conſéquent $2xx+3x=\frac{169-39}{2}=\frac{130}{2}=65$. Pour avoir la ſolution en nombres, je dis, $2xx+3x=65$; donc $xx+\frac{3x}{2}+\frac{9}{4\times 4}=\frac{65}{2}+\frac{9}{4\times 4}$ $=\frac{520+9}{4\times 4}=\frac{529}{4\times 4}$; donc $x+\frac{3}{4}=\pm\frac{23}{4}$; donc $x=\frac{-3\pm 23}{4}=+5$, ou $-6\frac{1}{2}$.

Exemple 7.

On demande la valeur des racines de l'équation $9xx-x=140$; donc $9xx=1x+140$. Ici $A=9$, $B=1$, $C=140$, $BB=1$, $4AC=5040$, $ss=5041$, $s=71$, $\frac{B+s}{2A}=4$, $\frac{B-s}{2A}=-3\frac{8}{9}$; donc $x=+4$, ou $-3\frac{8}{9}$: le dernier cas peut ſe démontrer ainſi; $x=-3\frac{8}{9}=\frac{-35}{9}$; donc $xx=$ $\frac{+1225}{81}$; & $9xx=\frac{1225}{9}$: de plus, $-1x$, c'eſt-à-dire, $-1\times\frac{-35}{9}=\frac{+35}{9}$;

par

par conſéquent $9xx-x=\frac{1225+35}{9}=\frac{1260}{9}=140$. En nombres, le calcul doit ſe faire ainſi; $9xx-1x=140$; donc $xx-\frac{1x}{9}=\frac{140}{9}$; par conſéquent $xx-\frac{1x}{9}+\frac{1}{18\times18}=\frac{140}{9}+\frac{1}{18\times18}=\frac{5040+1}{18\times18}=\frac{5041}{18\times18}$; tirez la racine quarrée des deux membres de l'équation, c'eſt-à-dire, de $xx-\frac{1x}{9}+\frac{1}{18\times18}$ d'un côté, & de $\frac{5041}{18\times18}$ de l'autre, & vous aurez $x-\frac{1}{18}=\pm\frac{71}{18}$; ainſi $x=+4$, ou $-3\frac{8}{9}$.

Exemple 8.

Soit propoſée l'équation $\frac{45}{2x+3}+\frac{116}{4x+5}=7$; donc $45+\frac{232x+348}{4x+5}=14x+21$; par conſéquent $180x+225+232x+348=56xx+154x+105$; c'eſt-à-dire, $412x+573=56xx+154x+105$; donc $258x+573=56xx+105$; donc $56xx=258x+468$; diviſant l'équation par 2, nous aurons $28xx=129x+234$: en comparant cette équation avec l'équation générale de l'Art. 103, il en réſultera, $A=28$, $B=129$, $C=234$, $BB=16641$, $4AC=26208$, $ss=42849$, $s=207$, $\frac{B+s}{2A}=6$, $\frac{B-s}{2A}=-1\frac{11}{28}$; ainſi dans cette équation $x=+6$, ou $-1\frac{11}{28}$. Voici comment je démontre l'un & l'autre cas.

Premiérement $x=6$. Donc $2x+3=15$; & $\frac{45}{2x+3}=3$: de plus, $4x+5=29$; donc $\frac{116}{4x+5}=4$; par conſéquent $\frac{45}{2x+3}+\frac{116}{4x+5}=3+4=7$.

Secondement $x=-1\frac{11}{28}=-\frac{39}{28}$; donc $2x=\frac{-39}{14}$; donc $2x+3=\frac{-39}{14}+\frac{3}{1}=\frac{3}{14}$; ainſi $\frac{45}{2x+3}$ eſt le quotient de $\frac{45}{1}$ diviſés par $\frac{3}{14}$; mais ce quotient, ſuivant les règles de la diviſion des fractions, eſt $\frac{630}{3}=210$; par conſéquent $\frac{45}{2x+3}=210$: de plus, $4x=\frac{-39}{7}$; donc $4x+5=\frac{-39}{7}+\frac{5}{1}=\frac{-4}{7}$; donc $\frac{116}{4x+5}$ eſt le quotient de $\frac{116}{1}$ diviſés par $\frac{-4}{7}$; mais ce quotient eſt $\frac{-812}{4}$, ou -203; donc $\frac{116}{4x+5}=-203$; donc $\frac{45}{2x+3}+\frac{116}{4x+5}=210-203=7$.

Voici comment on réſout cette équation à la manière ordinaire; $56xx-258x$

$-258x=468$; donc $xx-\frac{258x}{56}=\frac{468}{56}$: le coëfficient du ſecond terme eſt ici $-\frac{258}{56}$, la moitié de ce coëfficient $\frac{129}{56}$, & ſon quarré $\frac{16641}{56\times56}$; ajoûtez ce quarré à chaque membre de l'équation, & vous aurez $xx-\frac{258x}{56}+\frac{16641}{56\times56}=\frac{468}{56}+\frac{16641}{56\times56}=\frac{26208+16641}{56\times56}=\frac{42849}{56\times56}$; tirez la racine quarrée des deux côtés, c'eſt-à-dire, de $xx-\frac{258x}{56}+\frac{16641}{56\times56}$ d'un côté, & de $\frac{42849}{56\times56}$ de l'autre, & vous aurez $x-\frac{129}{56}=\pm\frac{207}{56}$; par conſéquent $x=+6$, ou $-1\frac{11}{28}$.

EXEMPLE 9.

Soit l'équation $15x-xx=56$. Cette équation étant réſolue par le théorême général donne $x=8$, ou 7; ce qu'on trouve ainſi par la méthode ordinaire. Changez tous les ſignes pour rendre la quantité xx affirmative, & vous aurez $xx-15x=-56$. Ajoûtant de part & d'autre le quarré de la moitié du coëfficient du ſecond terme, & vous aurez $xx-15x+\frac{225}{4}=-56+\frac{225}{4}=\frac{1}{4}$; donc $x-\frac{15}{2}=\pm\frac{1}{2}$, & $x=8$, ou 7. Le principal but que je me ſuis propoſé dans cet exemple, eſt de faire voir, qu'en réſolvant une équation du ſecond degré à l'aide du théorême général, il n'eſt beſoin d'aucune tranſpoſition pour rendre le quarré xx affirmatif, ſuppoſé qu'il ne le fût pas, comme dans l'équation propoſée $15x-xx=56$; tranſpoſez $15x$, & vous aurez $-xx$, c'eſt-à-dire, $-1xx=-15x+56$. En rapportant cette équation à la formule générale de l'Art. 102, & en la réſolvant par le moyen du théorême général de l'Art. 103, il viendra $A=-1$, $B=-15$, $C=56$, $BB=225$, $4AC=-224$, $ss=1$, $s=1$, $\frac{B+s}{2A}=\frac{-15+1}{-2}=\frac{-14}{-2}=+7$, $\frac{B-s}{2A}=\frac{-15-1}{-2}=+8$.

Comment il faut s'y prendre quand les Racines d'une équation du ſecond degré ſont inexprimables.

106. Comme il n'y a que très-peu de nombres quarrés en comparaiſon de ceux qui ne ſont pas tels, & que les équations du ſecond degré ſe réſolvent par l'extraction de la racine quarrée, il s'enſuit qu'il y a peu de ces équations ſuſceptibles d'une ſolution exprimable en nombres, en com-

comparaiſon de celles qui ne le ſont pas: mais comme la racine quarrée peut être tirée à tel point d'approximation qu'on voudra, la ſolution d'une équation du ſecond degré, qui dépend de cette extraction de racine, peut auſſi être donnée à tel point de préciſion qu'on pourra demander; comme il paroîtra par l'exemple ſuivant.

EXEMPLE 10.

Soit l'équation $xx-4x+1=0$, ou $xx=4x-1$. Ici $A=1$, $B=4$, $C=-1$, $BB=16$, $4AC=-4$, $ss=12$, $s=\sqrt{12}$, $\frac{B+s}{2A}=\frac{4+\sqrt{12}}{2}$, & $\frac{B-s}{2A}=\frac{4-\sqrt{12}}{2}$; donc $x=\frac{4+\sqrt{12}}{2}$, ou $\frac{4-\sqrt{12}}{2}$: voyons ſi ces deux fractions ne peuvent point être réduites à des termes plus ſimples: il eſt clair d'abord que $\frac{4}{2}=2$; outre cela $\frac{\sqrt{12}}{2}=\sqrt{3}$; car $12=3\times4$; par conſéquent $\sqrt{12}=\sqrt{3}\times\sqrt{4}=\sqrt{3}\times2$; donc $\frac{\sqrt{12}}{2}=\sqrt{3}$; d'où il s'enſuit, que $x=2+\sqrt{3}$, ou $2-\sqrt{3}$; mais l'extraction de $\sqrt{3}$ en y employant trois caractéres décimaux donne 1.732: donc $2+\sqrt{3}=3.732$, & $2-\sqrt{3}=.268$; donc $x=$ (à peu près) 3.732, ou .268, comme on pourra s'en mieux aſſurer encore par les opérations ſuivantes.

Premiérement $x=3.732$; donc $xx=13.927824$; & $4x=14.928$; donc $4x-xx=1.000176$; donc $xx-4x=-1.000176$; donc $xx-4x+1=-.000176=0$ à peu près. Secondement, ſoit $x=.268$, & vous aurez $xx=.071824$ & $4x=1.072$, & $4x-xx=1.000176$; donc $xx-4x=-1.000176$; donc $xx-4x+1=-.000176=0$, à peu près; ainſi dans les deux cas, on ſatisfait à la condition de l'équation avec une exactitude proportionée au nombre des caractéres décimaux qu'on employe pour extraire la racine quarrée de 3.

On peut dire, quoique la choſe ait un air de paradoxe, que les deux valeurs de la quantité inconnue trouvées dans le cas préſent, & dans d'autres cas pareils, ſont juſtes quoiqu'inexprimables en nombres. Ainſi je puis démontrer, que ſi l'une des deux valeurs de x, ſavoir $2+\sqrt{3}$, ou $2-\sqrt{3}$, eſt ſubſtituée à la place de x, nous aurons cette équation $xx-4x+1=0$, qui étoit l'équation propoſée: pour cet effet, faiſons $\sqrt{3}=s$; & premiérement, ſoit $x=2+\sqrt{3}$, ou $2+s$; & nous aurons $xx=4+4s+ss$, & $-4x=-8-4s$; & $xx-4x=4+4s+ss-8-4s=ss-4$; mais ſi $s=\sqrt{3}$, $ss=3$, & $ss-4=-1$; donc $xx-4x=-1$, & $xx-4x+1=0$: ſecondement ſoit $x=2-\sqrt{3}$, ou $2-s$, &

nous

nous aurons $xx=4-4s+ss$, & $-4x=-8+4s$, & $xx-4x=ss-4=-1$, comme ci-deſſus; donc encore $xx-4x+1=0$.

Des Racines impoſſibles dans une équation du ſecond degré, & d'où vient leur impoſſibilité.

107. Les racines des équations du ſecond degré ſont non ſeulement très-ſouvent inexprimables, mais quelquefois auſſi impoſſibles, comme il paroîtra par l'exemple ſuivant.

EXEMPLE II.

Soit l'équation $xx-4x+6=0$, ou $xx=4x-6$. En ce cas $A=1$, $B=4$, $C=-6$, $BB=16$, $4AC=-24$, $ss=-8$, $s=\sqrt{-8}$, $\frac{B+s}{2A}=\frac{4+\sqrt{-8}}{2}$, $\frac{B-s}{2A}=\frac{4-\sqrt{-8}}{2}$; mais $\frac{4}{2}=2$, & $-8=-2\times+4$; donc $\sqrt{-8}=\sqrt{-2}\times\sqrt{+4}=\sqrt{-2}\times 2$; donc $\frac{\sqrt{-8}}{2}=\sqrt{-2}$; donc dans cette équation $x=2+\sqrt{-2}$, ou $2-\sqrt{-2}$; mais comme aucune quantité, affirmative ou négative, multipliée par elle-même, ne ſauroit former un produit négatif, il s'enſuit, que $\sqrt{-2}$, eſt non ſeulement une quantité inexprimable, mais auſſi impoſſible; & par conſéquent, que les deux valeurs de x dans cette équation $2+\sqrt{-2}$ & $2-\sqrt{-2}$ ſeront impoſſibles l'une & l'autre.

De ce qui vient d'être dit touchant ces ſortes de racines, il ſuit que les deux racines d'une équation du ſecond dégré, doivent être poſſibles toutes deux, ou toutes deux impoſſibles: car on vient de voir dans la ſolution de la dernière équation, que l'impoſſibilité des racines naît de l'impoſſibilité de la quantité s, c'eſt-à-dire de la racine quarrée de ss, lorſque cette dernière quantité eſt négative: quand s eſt poſſible, les deux racines de l'équation, ſavoir, $\frac{B+s}{2A}$ & $\frac{B-s}{2A}$ ſeront poſſibles auſſi; d'un autre côté, quand s eſt impoſſible, les deux racines ſeront impoſſibles pareillement.

Puiſque la poſſibilité ou l'impoſſibilité des deux racines d'une équation du ſecond degré dépend de ce que la quantité ss eſt affirmative ou négative, il s'enſuit, que quand ss & par cela même s eſt égale à rien, les racines ſeront dans les limites qui ſéparent le poſſible de l'impoſſible. Si $s=0$, nous aurons $\frac{B+s}{2A}=\frac{B}{2A}$, & $\frac{B-s}{2A}=\frac{B}{2A}$; ainſi les deux racines inégales d'une équation du ſecond degré approchent de plus en plus de l'état d'égalité, à meſure qu'elles approchent d'un état d'impoſſibili-

ſibilité, mais ne parviennent néanmoins à être égales, que quand elles parviennent au point qui ſépare la poſſibilité de l'impoſſibilité.

Maniére de trouver la ſomme & le produit des deux racines d'une équation du ſecond degré ſans la réſoudre; comme auſſi celle de former une pareille équation, qui ait pour ſes racines deux nombres quelconques donnés.

108. *Dans une équation du ſecond degré exprimée par cette formule générale, ſavoir,* $Axx=Bx+C$, *la ſomme des racines ſera toujours* $\frac{B}{A}$, *& le produit de leur multiplication* $\frac{-C}{A}$: car les racines de cette équation ſont $\frac{B+s}{2A}$ & $\frac{B-s}{2A}$, dont la ſomme eſt $\frac{2B}{2A}$ ou $\frac{B}{A}$. En multipliant enſemble ces deux racines, leur produit donnera $\frac{BB-ss}{4AA}$; mais $ss=BB+4AC$, comme on l'a vu dans l'Art. 103; ainſi $ss-BB=4AC$, & $BB-ss=-4AC$; donc $\frac{BB-ss}{4AA}$, ou le produit des deux racines vaut $\frac{-4AC}{4AA}=\frac{-C}{A}$.

Cela étant, ſi $A=1$, c'eſt-à-dire, ſi l'équation eſt $xx=Bx+C$, la ſomme des racines ſera B, & leur produit $-C$; c'eſt-à-dire que de la maniére dont l'équation eſt rangée à-préſent, la ſomme des racines ſera le coëfficient de l'inconnue dans le ſecond membre de l'équation, & leur produit, ce que nous appellons le terme abſolu, dont le ſigne a été changé.

On peut déduire de-là une méthode aiſée de former une équation du ſecond degré, qui ait pour ſes racines deux nombres quelconques donnés: Comme par exemple, ſi l'on vouloit avoir une équation de deux dimenſions dont les racines fuſſent les nombres 3 & 4; il eſt clair que la ſomme de ces nombres eſt 7, & le produit de leur multiplication 12; ainſi il n'y a qu'à former une équation dont un des membres ſoit xx, & l'autre membre $7x-12$, ſavoir $xx=7x-12$; & les racines de cette équation ſeront les nombres donnés 3 & 4, comme nous le prouverons à l'inſtant: ſi l'on avoit pris pour racines 3 & -4, leur ſomme auroit été -1, leur produit -12, & l'équation même $xx=-x+12$: en prenant pour racines -3 & $+4$, leur ſomme ſera $+1$, leur produit -12, & l'équation $xx=x+12$: enfin, ſi l'on demandoit que les racines fuſſent -3 & -4, leur ſomme ſeroit -7, leur produit $+12$, & l'équation $xx=-7x-12$. Je démontrerai un cas général, qui ſuffira pour faire voir comment il faut s'y prendre dans tous les autres cas du même genre: ſoient les racines propoſées p & q, dont la ſomme eſt $p+q$, & le produit pq; l'équation ſera $xx=\overline{p+q}\times x-pq$. En rapportant cette équation au théorême général

néral de l'Art. 103. nous aurons $A=1$, $B=\overline{p+q}$, $C=-pq$, $BB=pp+2pq+qq$, $4AC=-4pq$, $ss=pp-2pq+qq$, $s=p-q$, $\frac{B+s}{2A}=\frac{p+q+p-q}{2}=\frac{2p}{2}=p$, $\frac{B-s}{2A}=\frac{p+q-p+q}{2}=\frac{2q}{2}=q$; donc les deux racines de cette équation ſont p & q. Ce qu'il falloit démontrer.

Au reſte, ſi l'on vouloit former une équation de deux dimenſions, qui eût deux racines quelconques données, & qui fuſſent impoſſibles, la choſe pourroit ſe faire par la méthode que nous venons d'expliquer, pourvu que ces racines impoſſibles euſſent la forme requiſe pour une équation du ſecond degré. Suppoſons, par exemple, que je veuille donner à une pareille équation les deux racines impoſſibles, $2+\sqrt{-3}$ & $2-\sqrt{-3}$; car quoiqu'il n'y ait aucune quantité poſſible, qui, multipliée par elle-même, puiſſe former un produit négatif, une quantité impoſſible le peut; car c'eſt en cela même que conſiſte ſon impoſſibilité. Faiſant donc $ss=-3$, j'ai $s=\sqrt{-3}$, & les deux racines ſeront $\overline{2+s}$, & $\overline{2-s}$; la ſomme de ces racines eſt 4, & leur produit $4-ss$; mais ſi $ss=-3$, $-ss=+3$ & $4-ss=4+3=7$; donc l'équation, qui aura ces racines, ſera $xx=4x-7$. Pour qu'il ne reſte aucun doute à cet égard, on n'a qu'à réſoudre l'équation: car ſi $xx=4x-7$, c'eſt-à-dire, ſi $xx-4x=-7$, nous aurons $xx-4x+4=-3$, & $x-2=\pm\sqrt{-3}$, & $x=2+\sqrt{-3}$, ou $2-\sqrt{-3}$.

Comment on détermine les ſignes des racines poſſibles d'une équation du ſecond degré ſans la réſoudre.

109. Si l'on place tous les termes d'une équation du ſecond degré dans un des membres, deſorte que l'autre membre ſoit égal à rien; & que le terme, qui contient xx, quarré de l'inconnue, ſoit le premier, celui, où ſe trouve x, le ſecond, & le terme abſolu le dernier; le nombre des racines affirmatives & négatives dans une pareille équation pourra être exactement déterminé par la règle ſuivante. *Auſſi ſouvent qu'il y a changement dans les ſignes depuis le premier terme juſqu'au dernier, autant l'équation a de racines affirmatives; au-lieu que le nombre des racines négatives eſt toujours égal au nombre de fois que les ſignes ſont les mêmes.* Cette règle convient à toutes les équations, de quelque degré qu'elles puiſſent être; mais nous n'en donnerons ici la démonſtration que rélativement aux équations de deux dimenſions, après avoir fait précéder quelques éclairciſſemens.

1. Cas.

1. Cas.

Soit l'équation $axx-bx+c=0$. On trouve ici deux changemens en parcourant tous les termes depuis le premier juſqu'au dernier, ſavoir, depuis $+axx$ juſqu'à $-bx$, & depuis $-bx$ juſqu'à $+c$; ainſi les racines de cette équation ſont toutes deux affirmatives.

2 Cas.

Soit l'équation $axx-bx-c=0$. De $+axx$ à $-bx$ il y a un changement, & de $-bx$ à $-c$ point. Donc cette équation a une racine affirmative, & une négative.

3. Cas.

Soit l'équation $axx+bx-c=0$. De $+axx$ à $+bx$ il n'y a aucun changement de ſigne, mais bien depuis $+bx$ à $-c$; ainſi cette équation a pareillement une racine affirmative & une autre négative.

4. Cas.

Enfin ſoit l'équation $axx+bx+c=0$. Ici il n'y a point de changement, & par conſéquent les racines de cette équation ſont négatives toutes deux. Ces différens cas peuvent ſe démontrer de la maniére ſuivante.

1. Cas.

Soit l'équation $axx-bx+c=0$, ou $axx=bx-c$. Ici le produit des deux racines eſt $\frac{c}{a}$ par le dernier Article, c'eſt-à-dire, que le produit des deux racines eſt une quantité affirmative, & par conſéquent ces racines doivent être toutes deux affirmatives, ou toutes deux négatives; mais elles ne ſauroient être négatives l'une & l'autre, puiſque leur ſomme eſt $\frac{+b}{a}$ par le meme Article; donc elles doivent être toutes deux affirmatives.

2. Cas.

Soit l'équation $axx-bx-c=0$, ou $axx=bx+c$. Ici le produit des deux racines eſt $-\frac{c}{a}$, & par conſéquent ces racines doivent être de différent genre, l'une affirmative & l'autre négative; & comme leur ſomme, $+\frac{b}{a}$, eſt une quantité affirmative, on peut en inférer que la plus grande racine eſt affirmative.

3. Cas.

Soit l'équation $axx+bx-c=0$, ou $axx=-bx+c$. Ici le produit des deux racines eſt encore $\frac{-c}{a}$, ce qui fait voir qu'une des racines doit être affirmative & l'autre négative; & puiſque leur ſomme $\frac{-b}{a}$ eſt une quantite négative, la plus grande des racines doit néceſſairement être négative.

4. Cas.

Enfin, ſoit l'équation $axx+bx+c=0$, ou $axx=-bx-c$. Ici le produit des deux racines eſt $+\frac{c}{a}$, quantité affirmative; ainſi les racines ſont toutes deux affirmatives, ou toutes deux négatives; mais la premiére ſuppoſition ne ſauroit avoir lieu, parce que leur ſomme $\frac{-b}{a}$ eſt négative; donc il faut qu'elles ſoient l'une & l'autre négatives.

La Règle précédente ne s'étend pas aux racines impoſſibles.

La règle, que nous venons de donner pour déterminer le nombre des racines affirmatives & négatives, n'a rapport qu'aux ſeules racines poſſibles; car celles qui ſont impoſſibles, n'appartiennent à aucune des deux claſſes; elles ſont méme ſi capricieuſes à cet égard, que dans une ſeule & même équation, les mêmes racines impoſſibles paroiſſent quelquefois ſous l'une des formes, & d'autrefois ſous l'autre: comme par exemple, cette équation $xx+3=0$ peut être remplie de deux maniéres ſans rien changer ni à l'équation, ni à ſes racines; ſavoir, en mettant $xx+0x+3=0$, équation, dont les deux racines ſont affirmatives en vertu de la règle démontrée dans cet Article; ou bien $xx-0x+3=0$: équation qui quoiqu'elle ſoit abſolument la même que l'autre, dont elle ne différe que dans la forme, a ſes deux racines négatives. La raiſon de cette abſurdité eſt, que les deux racines de l'équation $xx+3=0$ ſont impoſſibles, & paroiſſent ſous deux formes différentes dans deux équations, qui au fond ſont la même. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à dégager l'inconnue; car ſi $xx+3=0$, nous avons $xx=-3$, & $x=+\sqrt{-3}$, ou $-\sqrt{-3}$, qui ſont toutes deux des quantités impoſſibles. Par exemple encore, l'équation $x^3-3=0$ peut être remplie de différentes maniéres; car on peut lui donner cette forme $x^3-0x^2+0x-3=0$: équation qui, par la règle précédente, a trois racines affirmatives; ou bien celle-ci, $x^3-0x^2-0x-3=0$; équation, qui n'a qu'une racine.

ne affirmative, & deux négatives. De-là un Algébriſte un peu habile auroit d'abord inféré (ce qui eſt auſſi très-vrai) que deux des racines de l'équation $x^3 - 3 = 0$ ſont impoſſibles, & qu'elles tenoient lieu de quantités affirmatives dans la premiére maniére d'exprimer l'équation, & de quantités négatives dans la derniére. Mais c'eſt à quoi nous aurons occaſion de revenir quand nous traiterons des équations cubiques.

Des Equations du quatriéme degré, & autres qui paroiſſent ſous la forme d'Equations de deux dimenſions.

110. En voilà aſſez ſur la ſolution, la nature, & les propriétés des équations de deux dimenſions: je n'ajoûterai qu'un ou deux exemples de quelques autres équations, qui paroiſſent quelquefois ſous la forme d'équations du ſecond degré.

EXEMPLE 12.

Soit l'équation propoſée $\frac{1600}{xx} + xx = 116$. Donc $1600 + x^4 = 116xx$; donc $x^4 = 116xx - 1600$. Cette équation eſt, à proprement parler, de quatre dimenſions, puiſque l'inconnue y eſt élevée à la quatriéme puiſſance. Or comme toute équation poſſible du ſecond degré a deux racines, qui en donnent également la ſolution, ainſi une équation cubique peut avoir trois pareilles racines, une équation de quatre dimenſions quatre, &c. Mais l'équation $x^4 = 116xx - 1600$, quoiqu'elle ſoit de quatre dimenſions, & ait quatre racines, a pourtant la forme d'une équation de deux dimenſions, ſi l'on conſidére xx comme étant la quantité inconnue; en ce cas x^4 eſt le quarré de l'inconnue, & l'équation doit être rapportée à la formule générale de l'Art. 103, de la maniére ſuivante; $A = 1$, $B = 116$, $C = -1600$, $BB = 13456$, $4AC = -6400$, $ss = 7056$, $s = 84$ $\frac{B+s}{2A} = 100$ $\frac{B-s}{2A} = 16$; donc dans cette équation $xx = 100$ ou 16: en faiſant $xx = 100$, nous aurons $x = +$ ou -10; ſi $xx = 16$, nous aurons $x = +$ ou -4; donc les quatre racines de cette équation de quatre dimenſions ſont, $+10 - 10 + 4 - 4$: mais quoique dans cette équation x ait quatre valeurs, xx n'en a que deux, ſavoir 100 & 16, dont chacune ſubſtituée à la place de xx dans l'équation originale réſoudra l'égalité.

N. B. Toutes les fois que deux des quatre racines d'une équation du quatriéme degré ſont égales, & contraires aux deux autres, l'équation paroîtra être du ſecond degré, & pourra être réſolue comme ſi elle en étoit réellement.

Exemple 13.

Soit l'équation $\frac{576}{xx} - xx = 55$: nous avons ici $576 - x^4 = 55xx$, & $x^4 + 55xx = 576$, & $x^4 = -55x^2 + 576$; donc ſuivant la formule générale de l'Art. 103, $A = 1$, $B = -55$, $C = 576$, $BB = 3025$, $4AC = 2304$, $ss = 5329$, $s = 73$, $\frac{B+s}{2A} = 9$, $\frac{B-s}{2A} = -64$; par conſéquent dans cette équation, $xx = +9$ ou -64. Si $xx = +9$, $x = +$ ou -3; ſi $xx = -64$, $x = +\sqrt{-64}$, ou $-\sqrt{-64}$: valeurs, qui ſont l'une & l'autre impoſſibles, & qui, ſubſtituées à la place de xx dans l'équation originale, réſolvent l'égalité. On voit par cet exemple, qu'une équation du quatriéme degré peut avoir quatre racines, & n'en ſauroit jamais avoir davantage; mais elle en a quelquefois moins, quand quelques-unes de ſes racines ſont impoſſibles. Il ſeroit facile même de prouver par des exemples, que cette impoſſibilité s'étend quelquefois ſur toutes les racines d'une équation du quatriéme degré Ceux qui pourroient deſapprouver ces ſolutions, trouveront peut-être celle-ci plus à leur gré. Soit l'équation $Ax^4 = Bx^2 + C$; ici mettant z pour xx, & par conſéquent zz pour x^4; l'equation deviendra une équation ordinaire du ſecond degré, $Azz = Bz + C$, dont la ſolution fera connoître z ou xx, & par cela même x; ſuppoſons que l'équation ſoit $Ax^6 = Bx^3 + C$; en ſubſtituant z à la place de x^3, l'équation ne ſera que de deux dimenſions, & la même que dans l'autre exemple, ſavoir $Azz = Bz + C$, dont la ſolution donnera z ou x^3, & conſequemment x par une extraction de racine cubique: enfin, ſoit l'équation $Ax = B \times \sqrt{x} + C$; en mettant zz pour x, & z pour $\sqrt{x}$, l'équation ſera $Azz = Bz + C$, comme auparavant, ainſi z, & par conſequent zz ou x ſeront connues.

Solution de quelques problêmes, qui ſe réduiſent à des Equations du ſecond degré.

Probleme 69.

111. *Diviſer le nombre* 60 *en deux parties, qui ſoient telles que le produit de leur multiplication faſſe* 864.

Solution.

Soit une des parties nommée x; alors l'autre partie ſera $60 - x$, & le produit de leur multiplication $60x - xx$; ainſi l'équation ſera $60x - xx = 864$; donc $xx + 864 = 60x$, & $xx = 60x - 864$: cette équation rapporte

portée à la formule générale de l'Art. 103, donne $A=1$, $B=60$, $C=-864$, $BB=3600$, $4AC=-3456$, $ss=144$, $s=12$, $\frac{B+s}{2A}=36$, $\frac{B-s}{2A}=24$; donc les parties cherchées ſont 24 & 36: valeurs qui ſatisfont l'une & l'autre aux conditions du problême.

Remarques ſur le Problême précédent.

1. REMARQUE.

Ce problême fait voir clairement la néceſſité que la quantité inconnue ait quelquefois deux valeurs différentes dans une ſeule & même équation: car ſi je déſigne ici la plus grande partie de 60 par x, la plus petite ſera $60-x$, & l'équation même $60x-xx=864$: ſuppoſons préſentement que x déſigne la plus petite partie, alors la plus grande ſera $60-x$, & l'équation reſtera $60x-xx=864$; ainſi nous retombons toujours dans la même équation, ſoit que x exprime la plus grande ou la plus petite partie; d'où l'on peut inférer, que la ſolution de cette équation doit nous donner l'une & l'autre des parties cherchées, ou aucune des deux; puiſqu'il ne ſauroit y avoir de raiſon pourquoi elle nous donneroit plutôt l'une que l'autre.

2. REMARQUE.

Ce même problême ſert à faire ſentir la néceſſité qu'il y ait quelquefois des racines impoſſibles, c'eſt-à-dire, quand les cas des problêmes qu'elles doivent réſoudre deviennent impoſſibles: comme par exemple, ſi un nombre, tel que 60, eſt diviſé en deux parties, plus les deux parties approchent de l'égalité, plus le produit de leur multiplication ſera grand; & par conſéquent ſi les parties ſont égales, le produit ſera le plus grand poſſible: ainſi ſuppoſant que les parties ſont 24 & 36, le produit ſera 864; ſi elles ſont 25 & 35, le produit ſera 875; ſi 30 & 30, le produit montera à 900, qui eſt le plus grand poſſible. Imaginons à préſent un cas impoſſible; & qu'on demande de diviſer le nombre 60 en deux parties qui ſoient telles que le produit de leur multiplication monte à 901; l'équation ſera $60x-xx=901$, laquelle étant réſolue ſuivant le théorême de l'Art. 103, donne $x=\frac{60+\sqrt{-4}}{2}$, ou $\frac{60-\sqrt{-4}}{2}$; mais ces valeurs de x peuvent être exprimées plus ſimplement ainſi; $-4=-1\times+4$; donc $\sqrt{-4}=\sqrt{-1}\times\sqrt{+4}=\sqrt{-1}\times 2$; donc $\frac{\sqrt{-4}}{2}=\sqrt{-1}$; mais $\frac{60}{2}=30$; ainſi les deux parties cherchées ſont $30+\sqrt{-1}$, & $30-\sqrt{-1}$, quantités qui ſont

ſont l'une & l'autre impoſſibles à cauſe de l'impoſſibilité de $\sqrt{-1}$; & cependant ces deux parties, conſidérées d'une maniére abſtraite, ſatisfont aux conditions du problême; car faiſant $\sqrt{-1}$ égale à s, les deux parties ſeront $30+s$ & $30-s$; dont la ſomme vaut 60, & le produit $900-ss$; mais ſi $s=\sqrt{-1}$, nous aurons $ss=-1$, & moins $ss=+1$, & $900-ss=901$; donc le produit des deux parties $30+\sqrt{-1}$, & $30-\sqrt{-1}$ monte à 901, comme on le demandoit.

3. Remarque.

Enfin, le problême en queſtion indique auſſi la raiſon pourquoi une des racines d'une équation du ſecond degré ne ſauroit devenir impoſſible ſans que l'autre le devienne auſſi. Deux quantités impoſſibles ajoûtées enſemble, peuvent quelquefois en faire une poſſible, à cauſe que l'une eſt autant impoſſible dans un ſens que l'autre l'eſt dans un ſens oppoſé: c'eſt ainſi que les deux quantités impoſſibles $30+\sqrt{-1}$ & $30-\sqrt{-1}$ ajoûtées enſemble ſont 60, les racines ſourdes & impoſſibles $+\sqrt{-1}$ & $-\sqrt{-1}$ s'entrè-détruiſant; mais en ajoûtant enſemble une quantité poſſible & une autre impoſſible, la ſomme de cette addition ne ſauroit jamais être une quantité poſſible. Donc les deux parties de 60 dans ce problême doivent être poſſibles toutes deux, ou l'une & l'autre impoſſibles.

Probleme 70.

112. *Il y a trois nombres en proportion continue, dont le terme moyen vaut ſoixante & la ſomme des extrêmes cent vingt & cinq. On demande la valeur des extrêmes.*

Solution.

Nommant les extrêmes x & $125-x$, nous aurons cette proportion; x eſt à 60 comme 60 à $125-x$, d'où réſulte par la multiplication des extremes & des moyennes, $125x-xx=3600$, ou $xx+3600=125x$, ou $x^2=125x-3600$: Ici $A=1$, $B=125$, $C=-3600$, $BB=15625$, $4AC=-14400$, $ss=1225$, $s=35$, $\frac{B+s}{2A}=80$, $\frac{B-s}{2A}=45$; donc dans cette équation, $x=45$ ou 80; mais x repréſente l'extrême qu'on veut, l'autre étant toujours $125-x$, & l'équation reſtant la même, ſavoir, $125x-xx=3600$; ainſi les deux extrêmes ſont 45 & 80, & ſatisfont aux conditions du problême; car 45 ſont à 60 comme $\frac{45}{15}$ à $\frac{60}{15}$, c'eſt-à-dire, comme 3 à 4; & 60 ſont à 80 comme $\frac{60}{20}$ à $\frac{80}{20}$, auſſi comme 3 à 4.

Pro-

PROBLEME 71.

113. *Connoiſſant la ſomme ou la différence de deux nombres, & la ſomme de leurs quarrés, on demande les nombres mêmes.*

SOLUTION.

1. *Cas.* Soit la ſomme des nombres cherchés 28, & celle de leurs quarrés 400; mettant x & $28-x$ pour les deux nombres, le quarré du premier ſera xx, celui du ſecond $784-56x+xx$, & la ſomme de ces quarrés $2xx-56x+784=400$; & la même équation ſe trouvera, quel des deux nombres que x repréſente; ainſi les deux valeurs de x dans cette équation ſeront les deux nombres cherchés; mais ſi $2xx-56x+784=400$, nous aurons $2xx-56x=-384$, & diviſant le tout par 2, $xx-28x=-192$, c'eſt-à-dire $xx=28x-192$: équation qui, étant réſolue ſuivant le théorême de l'Art. 103, donne $x=12$ ou 16; ainſi 12 & 16 ſont les nombres cherchés.

2. *Cas.* Suppoſons à-préſent la différence des deux nombres donnée; qu'elle ſoit par exemple 4, & la ſomme des quarrés 400, comme ci-deſſus; cela étant, j'appelle le petit nombre x & le grand $x+4$: la ſomme de leurs quarrés ſera $2xx+8x+16=400$; d'où l'on peut déduire $2xx+8x=384$, $xx+4x=192$, $xx+4x+4=196$, $x+2=\pm 14$, $x=+12$ ou -16; mais comme ces deux nombres $+12$ & -16 ne ſauroient être ceux que demande le problême, puiſque leur différence n'eſt pas 4, mais 30. Pour réſoudre cette difficulté, il faut conſidérer, que quand x a été mis pour le plus petit nombre, & $x+4$ pour le plus grand, l'équation étoit $2xx+8x+16=400$; mais ſi x exprimoit le plus grand nombre, & par conſéquent $x-4$ le plus petit, l'équation ſeroit $2xx-8x+16=400$, différente de la premiére; puis donc qu'il naît une autre équation ſuivant que x repréſente le plus grand nombre ou le plus petit, il n'eſt pas poſſible qu'une ſeule & même équation donne les deux nombres. Voici proprement l'explication de cette eſpéce d'énigme: il y a deux paires de nombres qui réſolvent également le problême, & l'équation $2xx+8x+16=400$ donne le plus petit nombre de chaque paire; car faiſant $x=12$, & $x+4=16$, les nombres 12 & 16 réſoudront la queſtion; d'un autre côté, faiſant $x=-16$, $x+4$ ſera $=-12$, & les nombres -16 & -12 donneront pareillement la ſolution du problême; car leur différence eſt $+4$, & la ſomme de leurs quarrés $+400$: il paroît par-là, que les ſolutions négatives ſont auſſi bonnes dans la nature des choſes que les ſolutions affirmatives, quoique

nous n'en jugions pas ainſi ordinairement; mais comme la vérité ne dépend point de notre maniére d'enviſager les choſes, & que les nombres négatifs ne différent pas davantage des nombres affirmatifs, que les affirmatifs ne différent l'un de l'autre, c'eſt-à-dire en degré & pas en eſpéce, on peut dire que les quantités négatives n'appartiennent pas moins à la claſſe des nombres, que celles qui ſont affirmatives.

PROBLEME 72.

114. *On demande deux nombres dont la ſomme ſoit dix-ſept, & la ſomme de leurs cubes mille trois cens quarante-trois.*

SOLUTION.

Nommant les deux nombres cherchés x & $17-x$, le cube du premier ſera xxx, & celui du ſecond $4913-867x+51xx-xxx$, comme on peut s'en convaincre par le calcul ſuivant;

$$\begin{array}{r} 17-x \\ 17-x \\ \hline 289-17x+xx \\ \quad -17x \\ \hline 289-34x+xx \\ 17-x \\ \hline 4913-578x+17xx-x^3 \\ \quad -289x+34xx \\ \hline 4913-867x+51xx-x^3. \end{array}$$

Ainſi la ſomme de ces deux cubes ſera $51xx-867x+4913=1343$, & l'équation ſe trouvera la même, quel des deux nombres cherchés qui ſoit déſigné par x mais ſi $51xx-867x+4913=1343$, nous aurons $51xx-867x=-3570$; diviſant le tout par 51, ce qui peut ſe faire ſans fractions, & rend l'équation plus ſimple, le quotient eſt $xx-17x=-70$. Cette équation, réſolue ſuivant l'Art. 103, donne $x=7$, ou 10; donc 7 & 10 ſont les deux nombres cherchés.

PROBLEME 73.

115. *Soit un quarré dont le côté ait cent & dix pouces; on demande la longueur & la largeur d'un rectangle, dont le périmétre ſurpaſſe celui du quarré de quatre pouces, mais dont l'aire ait quatre pouces quarrés de moins que celle du quarré.*

N. B. Par le périmétre d'une figure plane on entend la longueur d'une

ne ligne qui meſure exactement tout le contour de la figure: deſorte que le périmétre d'un quarré eſt égal au côté pris quatre fois, & celui d'un rectangle égal à deux fois la longueur du rectangle, & à autant de fois ſa largeur, ajoûtées enſemble.

SOLUTION.

Puiſque le côté du quarré donné eſt de 110 pouces, ſon aire ſera de 12100 pouces quarrés, & l'aire du rectangle de 12096 des mêmes pouces: d'un autre côté, le périmétre du quarré donné eſt de 444 pouces; ainſi la moitié du périmétre, c'eſt-à-dire la longueur & la largeur ajoûtées enſemble, doit être de 222 pouces. Cela étant, ſi l'on appelle la longueur ou la largeur x, l'autre dimenſion ſera $222-x$, & l'aire $222x-xx=12096$. Cette équation, réſolue ſuivant l'Art. 103, donnera $x=96$ ou 126; donc la largeur du rectangle cherché doit être de 96 pouces, & la longueur de 126; & ces nombres ſatisfont aux conditions du problême; car deux fois la longueur ſera 252, deux fois la largeur 192, & tout le périmétre 444; outre cela 126×96, ou l'aire ſera 12096.

SCHOLIE.

Ce problême fait voir combien ſe trompent groſſiérement ceux, qui regardent les aires des figures planes comme proportionelles à leurs périmétres; au-lieu qu'il paroît clairement ici, que le périmétre d'une figure ſurpaſſe celui d'une autre de la longueur de quatre pouces, & que * cependant l'aire de la premiére figure eſt ſurpaſſée par celle de la ſeconde de la quantité de quatre pouces quarrés. Ces ſortes d'erreurs, à-la-

* *Cependant l'aire de la premiére figure eſt ſurpaſſée par celle de la ſeconde.*] En général (les périmétres étant égaux) la grandeur des aires dépend de l'égalité des côtés, & de leur nombre. C'eſt par cette égalité que le quarré, quoique ſon périmétre fût même plus petit, l'a emporté ſur le rectangle: car pour ce qui eſt du nombre des côtés, il étoit égal, le rectangle & le quarré en ayant chacun quatre. Si l'on augmente le nombre des côtés, & qu'après avoir partagé la ligne a en quatre parties égales, dont chacune ſera $=\frac{a}{4}$, on en faſſe un quarré, l'aire ſera $\frac{aa}{16}$; mais ſi on l'avoit partagée en ſix parties égales, pour en faire un exagone régulier, on auroit trouvé (en menant une perpendiculaire du centre du cercle qu'on auroit circonſcrit à cet exagone) l'aire de l'exagone $=\frac{aa}{2\sqrt{48}}$: or comme ce dénominateur eſt plus petit que 16, il s'enſuit que l'aire $\frac{aa}{2\sqrt{48}}$ eſt plus grande que l'aire $\frac{aa}{16}$; & l'on peut s'aſſurer par le calcul, que la même choſe a lieu par rapport aux aires de tous les polygones réguliers iſopérimétres, en croiſſant depuis le triangle équilatéral juſqu'au cercle par l'augmentation ſucceſſive du nombre de leurs côtés.

la-vérité, ne ſe trouvent que dans des hommes d'une capacité tout-à-fait bornée, & n'y reſtent qu'auſſi longtems que la matiére en queſtion eſt pour eux un ſujet de ſpéculation; car dès que leur intérêt y eſt mêlé, & que l'erreur tourneroit à leur préjudice, ils ne tardent guéres à ſe détromper. La plupart des gens ont une averſion naturelle à penſer d'une maniére abſtraite, & à moins que d'y avoir quelque intérêt, aiment mieux ſoumettre leurs opinions à leur humeur, au caprice & à la coutume, ou bien n'avoir point d'opinions du tout, que d'examiner avec attention la nature des choſes.

PROBLEME 74.

116. *Quelqu'un achéte un certain nombre de bœufs pour quatre-vingts guinées, s'il en avoit acheté quatre de plus pour la même ſomme, il les auroit eus à meilleur marché, une guinée piéce: quel étoit le nombre des bœufs?*

SOLUTION.

J'appellê le nombre des bœufs x; enſuite pour trouver le prix de chaque bœuf je dis, ſi le nombre x de bœufs coute 80 guinées, que coutera un bœuf? & la réponſe eſt $\frac{80}{x}$; & par la même raiſon, s'il y avoit quatre bœufs de plus d'achetés, c'eſt-à-dire, ſi pour le même argent l'acheteur avoit eu le nombre x de bœufs $+4$, le prix de chaque bœuf auroit été $\frac{80}{x+4}$; mais par le problême, le dernier prix eſt moindre que le premier d'une guinée; ce qui donne cette équation, $\frac{80}{x} - 1 = \frac{80}{x+4}$; donc $80 - x = \frac{80x}{x+4}$; donc $\overline{80-x} \times \overline{4+x}$, ou $320 + 76x - xx = 80x$; donc $xx + 80x = 76x + 320$; donc $xx = -4x + 320$. Ici $A = 1$, $B = -4$, $C = 320$, $BB = 16$, $4AC = 1280 = ss = 1296$, $s = 36$, $\frac{B+s}{2A} = 16$, $\frac{B-s}{2A} = -20$; donc $x = +16$ ou -20; donc le nombre des bœufs étoit 16, la racine négative -20 ne pouvant être d'aucun uſage dans la ſolution de ce problême. Pour le nombre de 16, il répond à la queſtion; car ſi 16 bœufs coûtent 80 guinées, un bœuf coutera 5 guinées, au-lieu que ſi 20 bœufs coutent 80 guinées, un bœuf coutera 4 guinées.

N. B. L'équation $\frac{80}{x} - 1 = \frac{80}{x+4}$, donne $x = 16$ ou -20, non parce que le nombre -20 eſt propre à réſoudre le problême, mais parce qu'il réſout l'équation; car faiſant $x = -20$, nous aurons $\frac{80}{x} = -4$, &

& $\frac{80}{x} - 1 = -5$; d'un autre côté nous aurons $x+4 = -16$, & $\frac{80}{x+4} = -5$; donc ſi $x = -20$, nous aurons $\frac{80}{x} - 1 = \frac{80}{x+4}$, à cauſe que les deux membres ſont égaux à -5; & de même dans tous les autres cas il ſe trouvera, que les différentes racines d'une équation réſoudront également cette équation, quoiqu'elles ne ſoient peut-être pas également propres à réſoudre le problême d'où l'équation a été déduite; mais c'eſt de quoi nous aurons occaſion de parler plus au long dans un autre endroit.

PROBLEME 75.

117. *Quelques perſonnes doivent à un Cabaretier pour leur écot ſept livres ſterling quatre ſchellings; mais deux de la compagnie s'étant ſauvés quand il a été queſtion de payer, chacun des autres a été obligé de payer un ſchelling de plus qu'il n'auroit fait ſans cela: on demande le nombre des perſonnes.*

SOLUTION.

J'appelle le nombre des perſonnes x; pour trouver enſuite le nombre de ſchellings que chaque perſonne auroit dû payer, dites, ſi le nombre x de perſonnes devoit payer 144 ſchellings, quel a été l'écot de chacune d'elles? & la réponſe eſt $\frac{144}{x}$; par la même raiſon $\frac{144}{x-2}$ exprime le nombre de ſchellings que chaque homme a payé effectivement; mais par la condition du problême, ce ſecond écot eſt plus grand pour chacun d'un ſchelling que le premier; ainſi l'équation ſera $\frac{144}{x} + 1 = \frac{144}{x-2}$; donc $144 + x = \frac{144x}{x-2}$; donc $\overline{x-2} \times \overline{144+x}$, ou $xx + 142x - 288 = 144x$; donc $xx = 2x + 288$. Ici $A = 1$, $B = 2$, $C = 288$, $BB = 4$, $4AC = 1152$, $ss = 1156$, $s = 34$, $\frac{B+s}{2A} = 18$, $\frac{B-s}{2A} = -16$; donc $x = +18$ ou -16; mais des racines négatives ne ſauroient être admiſes dans ces ſortes de problêmes; donc le nombre des perſonnes étoit 18, ce qui ſatisfait au problême; car $\frac{144}{18} = 8$, & $\frac{144}{16} = 9$.

PROBLEME 76.

118. *On demande quel eſt le nombre, qui, étant ajoûté à ſa racine quarrée, vaut deux cens & dix.*

SOLUTION.

Appellez le nombre cherché xx; alors ſa racine quarrée ſera x, & l'équation même $xx+x=210$, ou $xx=-x+210$; ici $A=1$, $B=-1$, $C=210$, $BB=1$, $4AC=840$, $ss=841$, $s=29$, $\frac{B+s}{2A}=14$, $\frac{B-s}{2A}=-15$; donc $x=+14$ ou -15; donc xx, ou le nombre cherché, vaut 196 ou 225, dans la ſuppoſition que la racine quarrée de 225 eſt -15; & chacun de ces deux nombres ſatisfera au problême; car $196+14=210$, & $225-15=210$.

PROBLEME 77.

119. *On demande deux nombres tels, que le produit de leur multiplication ſoit cent quatre-vingts douze, & la ſomme de leurs quarrés ſix cens quarante.*

SOLUTION.

Nommant les deux nombres x & $\frac{192}{x}$, le quarré du premier ſera xx, & celui du dernier $\frac{36864}{xx}$. La ſomme de leurs quarrés $xx+\frac{36864}{xx}=640$, donnera la même équation, quel des deux nombres cherchés que x repréſente; mais ſi $xx+\frac{36864}{xx}=640$, nous aurons $x^4+36864=640xx$; & $x^4=640xx-36864$; ici $A=1$, $B=640$, $C=-36864$, $BB=409600$, $4AC=-147456$, $ss=262144$, $s=512$, $\frac{B+s}{2A}=576$, $\frac{B-s}{2A}=64$; donc $xx=576$, ou 64; donc $x=+$ ou -24, ou bien $+$ ou -8; donc les deux nombres cherchés ſont 8 & 24.

PROBLEME 78.

120. *Un homme employe une certaine ſomme en marchandiſes, qu'il débite enſuite pour 24 livres, & il gagne autant pour cent que les marchandiſes lui ont couté. On demande ce qu'elles lui coutent.*

N. B. Le gain qu'on fait *pour cent* eſt celui qu'on fait autant de fois qu'on employe cent livres; & en cas que la ſomme employée n'aille pas à cent livres, c'eſt autant moins à proportion de ce qui manque à cette ſomme pour être égale à cent: ainſi celui qui gagne 2 livres ſur 20 livres qu'il a employées, gagne 10 *pour* 100; car 20 eſt à 2, comme 100 à 10.

So-

SOLUTION.

Nommant la ſomme employée en marchandiſes x, le gain ſera $24-x$; ainſi par la règle de trois, ſi x gagne $24-x$, quel auroit été le gain ſi 100 livres avoient été employées avec le même avantage? & la réponſe ſera $\frac{2400-100x}{x}$; donc $\frac{2400-100x}{x}$ exprimera ce qui aura été gagné *pour cent*; mais par la condition du problême, ce gain eſt égal à x, valeur de la ſomme qui a été employée; donc $x=\frac{2400-100x}{x}$, & $xx=2400-100x$: ici $A=1, B=-100, C=2400, BB=10000, 4AC=9600, ss=19600, s=140, \frac{B+s}{2A}=20, \frac{B-s}{2A}=-120$; donc la ſomme employée étoit 20 livres, & le gain *pour vingt* 4 livres; donc le gain *pour cent* étoit 20 livres, ſomme égale à la ſomme employée.

PROBLEME 79.

121. *Un Marchand employe trente-trois livres ſterling, quinze ſchellings en piéces de toile, qu'il revend pour quarante-huit ſchellings piéce, & il gagne autant en tout que chaque piéce lui a couté: on demande ce qu'il a payé pour chaque piéce.*

SOLUTION.

Soit x le nombre de ſchellings que chaque piéce a couté, & le gain, avec lequel chaque piéce aura été revendue, ſera $48-x$; ainſi par la règle de proportion, ſi en employant x on gagne $48-x$, que gagnera-t-on ſi l'on employe 33 livres ſterling 15 ſchellings, ou 675 ſchellings? & la réponſe ſera $\frac{32400-675x}{x}$; donc $\frac{32400-675x}{x}$ exprimera tout le gain; mais par la condition du problême, tout le gain eſt égal à x, l'argent donné pour chaque piéce; donc $x=\frac{32400-675x}{x}$, & $xx=32400-675x$; ici $A=1, B=-675, C=32400, BB=455625, 4AC=129600, ss=585225, s=765, \frac{B+s}{2A}=45, \frac{B-s}{2A}=-720$; donc $x=45$ ou -720; donc chaque piéce a couté 45 ſchellings, & le gain fait ſur chaque piéce eſt de 3 ſchellings; mais ſi 45 ſchellings en gagnent 3, 33 livres ſterling 15 ſchellings, ou 675 ſchellings gagneront 45 ſchellings; ainſi le gain total étoit 45 ſchellings, & par cela même égal à ce que chaque piéce avoit couté.

N. B. Il eſt très-poſſible que deux différens problêmes produiſent la mê-

même équation; & en ce cas l'équation doit ſatisfaire également à l'un & à l'autre problême: ainſi quoiqu'une pareille équation ait deux racines, & toutes deux affirmatives, il ne faut pas s'attendre que ces deux racines donneront également la ſolution d'un des problêmes; mais nous devons conclure, que quand une équation a deux racines, toutes deux affirmatives, dont une ſeule donne la ſolution du problême qui a produit l'équation, nous devons, dis-je, inférer de-là, que l'autre racine appartient à la ſolution de quelque autre problême, qui produit la même équation. C'eſt de quoi les deux problêmes ſuivans nous fourniſſent un exemple curieux.

PROBLEME 80.

122. *Deux Voyageurs* A *&* B, *partent en même tems de deux endroits* C *&* D, A *de* C *pour* D, *&* B *de* D *pour* C; *après s'être rencontrés, ils calculent le chemin qu'ils ont fait, & il ſe trouve que le chemin de* A *ſurpaſſe de trente milles celui de* B, *& qu'à proportion de la diligence qu'ils faiſoient,* A *comptoit de gagner* D *en quatre jours, & que* B *comptoit de gagner* C *en neuf jours: on demande la diſtance entre* C *&* D.

SOLUTION.

Soit le nombre des milles qu'il y a entre *C* & *D* exprimé par x; ainſi x exprime le chemin de *A* & celui de *B* joints enſemble dans le tems qu'ils ſe ſont rencontrés; ainſi, autant que les milles faits par *A* excédent $\frac{x}{2}$, autant les milles faits par *B* ſont-ils en-deçà de $\frac{x}{2}$; mais ſuivant la ſuppoſition, les milles faits par *A* excédent ceux que *B* a faits de 30; donc *A* doit avoir fait $\frac{x}{2}+15=\frac{x+30}{2}$ milles; & *B* $\frac{x}{2}-15$ ou $\frac{x-30}{2}$ milles; par conſéquent le chemin que *A* devoit faire encore, eſt $\frac{x-30}{2}$ milles, qu'il comptoit d'achever en quatre jours; & ce qui manquoit au chemin de *B* eſt $\frac{x+30}{2}$ milles, qu'il comptoit d'achever en neuf jours. Cela étant, tâchons de trouver combien de jours chacun d'eux a été en chemin; ce qui ſe pourra, en raiſonnant de la maniére ſuivante: ſi *A* compte de faire $\frac{x+30}{2}$ milles en quatre jours, en combien de jours fera-t-il $\frac{x+30}{2}$ milles? la réponſe eſt $\frac{4\times\frac{x+30}{2}}{\frac{x-30}{2}}=\frac{4\times x+30}{x-30}$;

de-

de-même, ſi B compte de faire $\frac{x+30}{2}$ milles en 9 jours, en combien de jours a-t-il fait $\frac{x-30}{2}$ milles? & la réponſe eſt $\frac{9\times\overline{x-30}}{x+30}$; donc A a voyagé $\frac{4\times\overline{x+30}}{x-30}$ jours, & B $\frac{9\times\overline{x-30}}{x+30}$ jours depuis le tems qu'ils ſe ſont mis en chemin; mais comme ils ſont partis en même tems, & qu'ils viennent de ſe rencontrer, ils doivent avoir voyagé le même nombre de jours; ainſi $\frac{4\times\overline{x+30}}{x-30}=\frac{9\times\overline{x-30}}{x+30}$: multipliant les deux membres de l'équation par $\overline{x-30}$, nous aurons $4\times\overline{x+30}=\frac{9\times\overline{x-30}\times\overline{x-30}}{x+30}$; enſuite multiplant $\overline{x+30}$, nous aurons $4\times\overline{x+30}\times\overline{x+30}=9\times\overline{x-30}\times\overline{x-30}$; tirant la racine quarrée de l'un & l'autre membre nous aurons $\pm 2\times\overline{x+30}=\pm 3\times\overline{x-30}$. Cette équation générale donne ces quatre équations particuliéres, ſavoir.

1ére, $+2\times\overline{x+30}=+3\times\overline{x-30}$.
2de, $+2\times\overline{x+30}=-3\times\overline{x-30}$.
3éme, $-2\times\overline{x+30}=+3\times\overline{x-30}$.
4éme, $-2\times\overline{x+30}=-3\times\overline{x-30}$.

Mais comme les deux derniéres de ces équations donnent préciſément les mêmes valeurs que les deux premiéres, je ne ferai uſage que de celles-ci.

Premiérement, ſuppoſons $+2\times\overline{x+30}=+3\times\overline{x-30}$, en ce cas nous aurons $2x+60=3x-90$, & $x=150$.

En ſecond lieu, ſuppoſons $+2\times\overline{x+30}=-3\times\overline{x-30}$, nous aurons alors $2x+60=-3x+90$, & $x=6$; ainſi la diſtance entre les deux endroits C & D doit être ou de 150 milles ou de 6 milles; mais cette derniére diſtance eſt impoſſible, à cauſe que dans le tems que A a joint B, il avoit déjà fait 30 milles plus que B, ſans être encore arrivé à l'endroit D; donc la diſtance entre C & D doit être de 150 milles, & ce nombre ſatisfait au probléme; car A doit avoir fait $75+15$, ou 90 milles, & B $75-15$ ou 60 milles, depuis le tems de leur départ; par conſéquent il reſtoit encore au voyageur A 60 milles à faire, & 90 milles au voyageur B; mais ſi A a pu faire 60 milles en 4 jours, il devoit, par la même raiſon, en faire 90 en 6 jours; & ſi B a pu faire 90 milles en 9 jours, il devoit en faire encore 60 en 6 jours; donc ils ont été en chemin le même nombre de jours depuis leur départ jusqu'au tems où ils ſe ſont rencontrés, comme l'exige le probléme.

PROBLEME 81.

123. *Deux Voyageurs* A *&* B, *partent de deux endroits* C *&* D *en même tems*; A *de* C *dans le deſſein de paſſer par* D, *&* B *de* D *dans le deſſein d'aller du même côté.* A *atteint* B; *& par le calcul de leur chemin il ſe trouve, qu'ils avoient fait enſemble trente milles, que* A *avoit paſſé par* D *depuis quatre jours, & que* B, *à proportion du chemin qu'il avoit fait, ſe trouvoit à la diſtance de neuf journées de* C. *On demande la diſtance entre les deux endroits* C *&* D.

SOLUTION.

Soit cette diſtance, exprimée en milles, nommée x. Il eſt évident que A a fait les milles x plus que B; mais par la ſuppoſition ils ont fait enſemble 30 milles; donc autant que les milles d'A excédent 15, autant ceux de B ſont-ils au-deſſous de ce nombre; or la différence totale eſt x; donc A doit avoir fait $15+\frac{x}{2}$, ou $\frac{30+x}{2}$ milles, & B doit en avoir fait $15-\frac{x}{2}$, ou $\frac{30-x}{2}$ milles; donc la diſtance où A ſe trouvoit de D, après avoir atteint B, étoit de $\frac{30-x}{2}$ milles, qu'il avoit faits en 4 jours, & la diſtance où B ſe trouvoit de C, étoit de $\frac{30+x}{2}$ milles, qu'il pouvoit, ſuivant le problême, faire en 9 jours; ainſi pour déterminer le nombre de jours qu'ils avoient été en chemin, dites, ſi A a fait $\frac{30-x}{2}$ milles depuis D en 4 jours, en combien de jours a-t-il fait $\frac{30+x}{2}$ milles depuis qu'il eſt parti de C? & la réponſe ſera $\frac{4\times\frac{30+x}{2}}{\frac{30-x}{2}}=\frac{4\times\overline{30+x}}{30-x}$; dites enſuite, ſi B devroit, pour faire $\frac{30+x}{2}$ milles, c'eſt-à-dire la diſtance où il eſt de C, employer 9 jours, combien de jours a-t-il mis pour faire $\frac{30-x}{2}$ milles depuis qu'il eſt parti de D? & la réponſe eſt $\frac{9\times\overline{30-x}}{30+x}$; mais comme ils ſont partis tous deux en même tems, & qu'A vient d'atteindre B, ils doivent avoir voyagé le même nombre de jours; donc nous avons cette équation, $\frac{4\times\overline{30+x}}{30-x}=\frac{9\times\overline{30-x}}{30+x}$: multipliant l'un & l'autre membre par $\overline{30-x}$, vous aurez $4\times\overline{30+x}=\frac{9\times\overline{30-x}\times\overline{30-x}}{30+x}$; multipliant cette nouvelle équa-

équation par $\overline{30+x}$, vous aurez $4\times\overline{30+x}\times\overline{30+x}=9\times\overline{30-x}\times\overline{30-x}$; mais le produit de $\overline{30-x}\times\overline{30-x}$ eſt le même que celui de $\overline{x-30}\times\overline{x-30}$; car les deux quantités $\overline{30-x}$ & $\overline{x-30}$ ne différent pas davantage l'une de l'autre qu'une quantité affirmative ne fait d'une autre quantité négative égale, & par conſéquent chacune de ces quantités, multipliées par elle-même, doit donner le même produit. Cela étant l'équation peut s'exprimer ainſi, $4\times\overline{x+30}\times\overline{x+30}=9\times\overline{x-30}\times\overline{x-30}$; mais cette équation eſt préciſément la même que celle que nous avons déduite du dernier problême, ce qui prouve, comme nous l'avons remarqué dans l'Art. 121; que différens problêmes peuvent donner la même équation; ainſi les deux racines de cette équation ſeront 6 & 150, comme dans l'Article précédent; & la diſtance entre *C* & *D* doit être de 6 ou bien de 150 milles; mais cette derniére diſtance eſt impoſſible, à cauſe qu'*A*, après avoir paſſé depuis *C* au-delà de *D*, & avoir atteint *B*, n'avoit cependant fait en tout, en ajoûtant ſon chemin à celui de *B*, que 30 milles; ainſi la diſtance entre *C* & *D* doit avoir été de 6 milles; & ce nombre donne la ſolution du problême; car *A*, dans le tems qu'il atteignit *B*, avoit fait $15+3$ ou 18 milles, & *B* $15-3$ ou 12 milles; donc *A* avoit fait 12 milles au-delà de *D* en 4 jours, & *B* étoit à 18 milles de *C*: diſtance qui, à proportion du chemin qu'il avoit fait, étoit de 9 journées; mais à raiſon de 12 milles en 4 jours, *A* doit avoir fait ſes 18 milles en 6 jours; & à raiſon de 18 milles en 9 jours, *B* doit avoir fait ſes 12 milles en 6 jours; donc depuis le tems de leur départ juſqu'à celui où *A* a joint *B*, ils avoient été en chemin le même nombre de jours, comme le problême l'exige; donc la ſuppoſition, ſur laquelle ce calcul eſt fondé, ſavoir, qu'il y a une diſtance de 6 milles entre *C* & *D* eſt juſte.

N.°B. Les ſolutions des deux derniers problêmes, qui viennent d'être données, ſont, à mon avis, les plus naturelles, quoique tant ſoit peu différentes de celles qui les ont précédées.

LEMME.

124. *La ſomme d'une ſuite de quantités en progreſſion Arithmétique ſe trouve, en ajoûtant enſemble le plus grand & le plus petit terme, & en multipliant enſuite la moitié de cette ſomme par le nombre entier des termes, ou toute la ſomme par la moitié du nombre des termes, ou enfin, en multipliant toute la ſomme par le nombre entier des termes, & en prenant enſuite la moitié du produit:* ainſi dans la ſuite 2, 4, 6, 8, 10, 12, où le plus petit terme eſt 2 & le plus grand 12, leur ſomme 14, & le nombre des termes 6; la

ſomme de tous les termes pris enſemble ſera 7×6, ou 14×3, ou $\frac{14\times 6}{2}$ $=42$. C'eſt ce qui paroîtra à l'œil, ſi l'on écrit au-deſſus de la ſuite 2, 4, 6, 8, 10, 12, cette même ſuite dans un ordre renverſé, 12, 10, 8, 6, 4, 2: car alors le nombre 2, premier terme de la ſuite inférieure, ajoûté à 12 premier terme de la ſuite d'enhaut (c'eſt-à-dire le plus petit terme & le plus grand pris enſemble) feront 14; ce qui eſt également vrai de tout terme d'une des ſuites ajoûté à ſon terme correſpondant; donc les deux ſuites ajoûtées enſemble ſeront égales au nombre de 14 pris autant de fois qu'il y a de termes dans chaque ſuite, c'eſt-à-dire à 6 fois 14, ou 84; ainſi chaque ſuite ſeule vaudra 42.

12.	10.	8.	6.	4.	2.
2.	4.	6.	8.	10.	12.
14.	14.	14.	14.	14.	14.

Le but de ce lemme eſt d'enſeigner la maniére de trouver la ſomme d'une ſuite en progreſſion Arithmétique dont on ne connoît que le plus grand terme, & le plus petit, avec le nombre des termes: les termes intermédiaires n'étant pas marqués, ou étant en trop grand nombre pour pouvoir en former la ſomme par voye d'addition.

PROBLEME 82.

125. *Un Voyageur* A *part d'un certain endroit, & fait un mille le premier jour, deux milles le ſecond, trois le troiſiéme, quatre le quatriéme, &c., & cinq jours après un autre Voyageur* B *part du même endroit, & va du même côté faiſant douze milles par jour: on demande combien de jours* A *doit être en chemin, & combien de milles il doit faire avant que d'être atteint par* B.

SOLUTION.

J'appelle x le nombre de jours qu'A a été en chemin avant que B l'ait joint; pour exprimer enſuite le nombre des milles qu'il a faits en ce tems, je conſidére qu'en trois jours le nombre des milles parcourus par A eſt $1+2+3$, c'eſt-à-dire que les milles, qu'il fait, ſont en progreſſion Arithmétique; le nombre des termes de cette progreſſion eſt 3, le plus grand terme 3, & le plus petit terme 1; en quatre jours il parcourt une ſuite de termes dont le nombre eſt 4, le plus grand terme 4, & le plus petit 1; ainſi en général, dans un nombre x de jours, il doit parcourir une ſuite de milles en progreſſion Arithmétique, dont le nombre de termes eſt x, le plus grand terme x, & le plus petit terme

terme 1; mais la ſomme des extrêmes de cette ſuite eſt $x+1$, dont la multiplication par x nombre des termes, donne $xx+x$; par le lemme précédent la moitié de cette quantité, ſavoir $\frac{xx+x}{2}$, ſera la ſomme de la ſuite, & exprimera par cela même les milles qu'A a faits avant que B l'eût joint: d'un autre côté, ſi A a voyagé le nombre de jours exprimé par x, B doit avoir voyagé $x-5$ jours, ce qui, à raiſon de douze milles par jour, donne $12x-60$ pour les milles faits par B dans le tems qu'il joignit A; mais étant tous deux partis du même endroit, il faut néceſſairement, dans le tems que B atteint A, qu'ils ayent fait le même nombre de milles; ainſi nous avons cette équation $\frac{xx+x}{2}=12x-60$; donc $xx+x=24x-120$, c'eſt-à-dire, $xx=23x-120$. Réſolvant cette équation par le théorême général de l'Art. 103, nous aurons $A=1$, $B=23$, $C=-120$, $BB=529$, $4AC=-480$, $ss=49$, $s=7$, $\frac{B+s}{2A}=15$, $\frac{B-s}{2A}=8$; donc $x=8$, ou 15. Pour bien trouver la ſolution du problême par le moyen de ces racines, il faut obſerver, que le problême eſt plus limité que l'équation qui en a été déduite; préciſément comme ſi en traduiſant une phraſe d'une langue en une autre, les termes de la derniére avoient une ſignification plus étendue que ceux de l'autre: le problême ſuppoſe uniquement que B atteint A, au-lieu que dans l'équation il n'eſt point ſpécifié ſi c'eſt B qui atteint A, ou bien A qui atteint B, après avoir fait le même nombre de milles, à compter depuis leur départ; car A doit auſſi atteindre B, pourvu qu'ils continuent leur voyage. Comme B avance d'abord le plus vite, s'ils ſe joignent, cela ne peut venir que de ce que B atteint A, ce qui n'arrive qu'après qu'A a voyagé 8 jours; ſi nous ſuppoſons qu'ils continuent enſuite leur chemin, B paſſe A, & le devance pendant quelque tems; mais au bout de 12 jours, A doit avancer plus vite que B, & joindre ce dernier après qu'il a été en chemin 15 jours: ainſi quoique les deux racines 8 & 15 répondent l'une & l'autre à ce qui eſt exprimé dans l'équation, une ſeule néanmoins, ſavoir 8, répondra à la condition du problême. Car il eſt évident qu'elles ſatisfont toutes deux à ce qu'exige l'équation.

En 8 jours A fait une ſuite de milles, dont le nombre de termes eſt 8, le plus grand terme 8, & le plus petit 1; la ſomme de cette ſuite eſt 36; mais quand A a voyagé 8 jours, B doit en avoir voyagé 3, & avoir fait auſſi 36 milles, à raiſon de 12 milles par jour; donc après qu'A & B ont été 8 jours en chemin, ils doivent néceſſairement ſe trouver enſemble:

ſemble : outre cela, en 15 jours, A doit avoir parcouru une ſuite de milles, dont le nombre de termes eſt 15, le plus grand terme auſſi 15, le plus petit 1, & la ſomme 120 milles; mais quand A a voyagé 15 jours, B doit en avoir voyagé 10, ce qui, à raiſon de 12 milles par jour, fait auſſi 120 milles; donc puiſqu'A & B ſe retrouvent de-nouveau, les nombres 8 & 15 répondent-également à la ſuppoſition contenue dans l'équation.

N. B. Si nous avions ſuppoſé que B s'étoit mis en chemin 5 jours après A, & n'avoit fait que 10 milles par jour, il n'auroit jamais pu atteindre A, deſorte qu'en ce cas les deux racines de l'équation ſeroient devenues impoſſibles, comme on peut le voir en réſolvant une équation fondée ſur cette ſuppoſition.

PROBLEME 83.

126. *On demande de partager le nombre de dix en deux parties, qui ſoient telles que le produit de leur multiplication ajoûté à la ſomme de leurs quarrés, faſſe ſoixante-ſeize.*

SOLUTION.

Les deux parties cherchées ſont, x & $10-x$.

Le produit de leur multiplication $10x-xx$.

La ſomme de leurs quarrés, $2xx-20x+100$.

Le produit de leur multiplication ajoûté à la ſomme de leurs quarrés, $\left.\begin{matrix}\\\\\end{matrix}\right\} x^2-10x+100=76.$

Ainſi $x=4$ ou 6; mais cette équation ſera la même, quelle des deux parties qui ſoit déſignée par x; donc les deux parties cherchées ſont 4 & 6.

PROBLEME 84.

127. *On demande deux nombres qui ayent les propriétés ſuivantes; que deux fois le premier, & trois fois le ſecond faſſent ſoixante; & de plus, que deux fois le quarré du premier, & trois fois le quarré du ſecond ſoient égaux à huit cens quarante.*

SOLUTION.

Nommant les deux nombres x & y, nous aurons

1ére, Eq. $2x+3y=60$, &

2de, Eq. $2x^2+3y^2=840$.

La premiére équation, $2x+3y=60$, donne une

3éme, Eq. $x=\frac{60-3y}{2}$; & en élevant les deux membres au quarré cette 4éme, Eq. $xx=\frac{3600-360y+9yy}{4}$.

De

De la ſeconde équation $2xx+3yy=840$, ſe déduit une 5ème, Eq. $xx=\frac{840-3yy}{2}$.

Comparez les deux valeurs de xx dans les deux derniéres équations, & vous aurez $\frac{3600-360y+9yy}{4}=\frac{840-3yy}{2}$; multipliez les deux membres par 2 en diminuant de la moitié les dénominateurs, & vous aurez $\frac{3600-360y+9yy}{2}=840-3yy$; donc $3600-360y+9yy=1680-6yy$; donc $3600-360y+15yy=1680$; donc $15yy-360y=-1920$; donc $15yy=360y-1920$. Diviſant le tout par 15 pour rendre l'équation plus ſimple, nous aurons $yy=24y-128$; donc $y=8$ ou 16: ſuppoſons $y=8$; alors, puiſque par la troiſiéme équation $x=\frac{60-3y}{2}$, nous aurons $x=18$; ſuppoſons $y=16$, en ce cas x ou $\frac{60-3y}{2}=6$; ainſi il y a deux paires de nombres, qui ſatisfont également aux conditions de ce problême, ſavoir, 18 & 8, comme auſſi 6 & 16. Pour s'en convaincre on n'a qu'à ſuppoſer d'abord que les deux nombres ſont 18 & 8; deux fois le premier nombre & trois fois le ſecond feront $=36+24=60$; deux fois le quarré du premier & trois fois le quarré du ſecond, font $648+192=840$. La ſuppoſition que les deux nombres ſont 6 & 16, donne $12+48=60$, & pour les quarrés $72+768=840$.

Probleme 85.

128. *Trouver quatre nombres en proportion continue, & tels, que la ſomme des deux termes moyens ſoit dix-huit, & celle des extrêmes vingt & ſept.*

N. B. Quatre nombres ſont dits être en proportion continue, quand le premier eſt au ſecond, comme le ſecond eſt au troiſiéme, & le ſecond au troiſiéme, comme le troiſiéme eſt au quatriéme.

Solution.

Nommant les deux termes moyens x & y, ſans prétendre déterminer lequel des deux eſt le plus grand, l'extrême le plus proche de x ſe trouvera en diſant, comme y eſt à x ainſi x eſt à $\frac{xx}{y}$; pareillement l'extrême le plus proche de x eſt à y comme y ſera à $\frac{yy}{x}$; ainſi les extrêmes ſont $\frac{xx}{y}$ & $\frac{yy}{x}$, & leur ſomme $\frac{x^3+y^3}{xy}$; par conſéquent les équations fondamentales ſont, $x+y=18$, ou $x=18-y$; & $\frac{x^3+y^3}{xy}=27$, ou

x^3+y^3

$x^3 + y^3 = 27xy$; mettez à la place de x dans cette équation $18 - y$, & la valeur de x^3 exprimée par le cube de $18 - y$, & vous aurez $x^3 + y^3 = y^3 + 5832 - 972y + 54yy - y^3$; c'eſt-à-dire, $x^3 = 5832 - 972y + 54yy - y^3$. Outre cela $27xy$ ou $27y \times 18 - y = 486y - 27yy$; donc $5832 - 972y + 54yy = 486y - 27yy$; tranſpoſez $486y - 27yy$, & vous aurez $81yy - 1458y + 5832 = 0$; diviſant le tout par 81, ce qui peut ſe faire ſans fraction, le quotient ſera $yy - 18y + 72 = 0$. Cette équation, réſolue par le théorême général, ou de quelque autre maniére, donne $y = 6$, & 12 ; ainſi l'extrême le plus proche de 6 doit être 3, & le plus proche de 12 doit être 24 ; par conſéquent les nombres ſont 3, 6, 12, 24, ou 24, 12, 6, & 3.

Probleme 86.

129. *Il y a trois nombres en proportion continue, dont la ſomme eſt dix-neuf, & la ſomme de leurs quarrés cent trente-trois : Quels ſont ces nombres ?*

Solution.

J'appelle les trois nombres x, y, & z. Puiſque par la premiére condition x eſt à y comme y eſt à z, en multiplant les extrêmes & les moyennes, nous aurons $yy = xz$; de plus, par la ſeconde condition du problême, $x + y + z = 19$, & $19 - y = x + z$. Elevant les deux membres au quarré, $361 - 38y + yy = xx + zz + 2xz$; ſi l'on retranche d'un des membres de cette équation yy, & de l'autre la quantité xz égale à ce quarré, il reſtera $361 - 38y = x^2 + xz + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 133$; par la troiſiéme condition du problême ayant donc $361 - 38y = 133$, il ſera facile de trouver que $y = 6$, & $19 - y$, ou la ſomme des extrêmes $= 13$; ainſi le problême propoſé ſe trouve réduit à ceci, *De trois nombres en proportion continue, dont ſix eſt le terme moyen, & treize la ſomme des extrêmes, trouver la valeur de chaque extrême :* ce problême eſt du même genre que celui de l'Art. 112, & étant réſolu, donne 4 & 9 pour les extrêmes ; ainſi les trois nombres cherchés ſont 4, 6 & 9, ou 9, 6 & 4.

Probleme 87.

130. *Trouver deux nombres qui ſoient tels, que leur différence multipliée par la différence de leurs quarrés faſſe trente-deux, mais que leur ſomme multipliée par la ſomme de leurs quarrés ſoit égale à deux cens ſoixante-douze.*

So-

SOLUTION.

Nommant les deux nombres cherchés x & y, la premiére équation fondamentale ſera $\overline{x-y} \times \overline{x^2-y^2}$, ou $\overline{x-y} \times \overline{x-y} \times \overline{x+y}$, ou $x^2-2xy+y^2 \times \overline{x+y} = 32$; donc

1ére, Eq. $x^2-2xy+y^2 = \frac{32}{x+y}$.

La ſeconde équation fondamentale eſt, $\overline{x+y} \times \overline{x^2+y^2} = 272$; donc

2de, Eq. $x^2+y^2 = \frac{272}{x+y}$.

De la ſeconde équation priſe deux fois retranchez la premiére c'eſt-à-dire de

$2x^2 \quad * \quad +2y^2 = \frac{544}{x+y}$

retranchez $x^2-2xy+y^2 = \frac{32}{x+y}$

il reſtera $x^2+2xy+y^2 = \frac{512}{x+y}$,

c'eſt-à-dire, $\overline{x+y}^2 = \frac{512}{x+y}$; donc $\overline{x+y}^3 = 512$, & $x+y = \sqrt[3]{512} = 8$: ainſi nous avons trouvé la ſomme des deux nombres cherchés, ſavoir 8. Voici comment on pourroit trouver leur différence par le moyen de la premiére équation; $x^2-2xy+yy = \frac{32}{x+y}$, c'eſt-à-dire, $\overline{x-y}^2 = \frac{32}{8} = 4$; donc $x-y$, ou la différence cherchée eſt égale à 2; & le problême propoſé ſe réduit à ceci: *Ayant deux nombres* x *&* y, *dont la ſomme eſt huit & la différence deux, trouver ces nombres*; par l'Art. 26. x ſera $= 5$, & $y = 3$.

N. B. Après avoir trouvé $x+y$, ſomme des deux nombres $= 8$, nous aurions pu trouver la ſomme de leurs quarrés par la ſeconde équation, $x^2+y^2 = \frac{272}{x+y} = \frac{272}{8} = 34$; & le problême auroit été réduit à ceci, *Trouver deux nombres dont la ſomme eſt huit, & dont la ſomme des quarrés eſt trente-quatre.* Ce problême, exprimé Algébriquement, donne une équation du ſecond degré, ſemblable à celle de l'Art. 113, & dont les deux racines ſont 5 & 3.

PROBLEME 88.

131. *Trouver deux nombres, dont la différence ajoûtée à la différence de leurs quarrés faſſe quatorze, & dont la ſomme ajoûtée à la ſomme de leurs quarrés faſſe vingt & ſix.*

SOLUTION.

Appellez les deux nombres cherchés x & y, & vous aurez les deux équations ſuivantes;

1ére, Eq. $x-y+x^2-y^2=14$.

2de, Eq. $x+y+x^2+y^2=26$.

Ajoûtant enſemble les deux équations, nous aurons $2xx+2x=40$, $xx+x=20$, & $x=+4$, ou -5; d'un autre côté, retranchez la premiére équation de la ſeconde, & il reſtera $2yy+2y=12$, $yy+y=6$, & $y=+2$, ou -3; & comme ces deux valeurs de y ſont indépendantes des valeurs de x, il eſt clair que chacune des valeurs de x peut être aſſociée à chacune des valeurs de y; ce qui ne donnera pas moins de quatre paires de nombres, qui ſatisferont également aux conditions des équations, ſavoir, $+4$ & $+2$, $+4$ & -3, -5 & $+2$, -5 & -3; mais il n'y a que la premiére paire, conſiſtant en nombres affirmatifs, qui ſoit propre à bien réſoudre le problême; $2+12=14$; outre cela la ſomme de 4 & 2 eſt 6, la ſomme de leurs quarrés 20, & $6+20=26$: voyons néanmoins comment les autres paires ſatisfont aux conditions des équations; faites $x=4$, y, c'eſt-à-dire, $+y=-3$, & vous aurez $-y=+3$; ainſi $x-y=4+3=7$, $x^2-y^2=16-9=7$, & $7+7=14$; de plus $x+y=4-3=1$, & $x^2+y^2=16+9=25$, & $1+25=26$: faites enſuite $x=-5$, & $y=+2$, vous aurez alors $x-y=-5-2=-7$, $x^2-y^2=25-4=21$, & $-7+21=14$; de plus, $x+y=-5+2=-3$, & $x^2+y^2=25+4=29$, & $-3+29=26$: enfin, faites $x=-5$, & $y=-3$, & vous aurez $x-y=-5+3=-2$, & $x^2-y^2=25-9=16$, & $-2+16=14$; de plus, $x+y=-5-3=-8$, & $x^2+y^2=25+9=34$, & $-8+34=26$.

PROBLEME 89.

132. *Trouver deux nombres, qui ajoûtés enſemble, ou multipliés l'un par l'autre, donnent la même ſomme, laquelle, ajoûtée à la ſomme de leurs quarrés, ſoit égale à douze.*

SOLUTION.

Appellant x & y les deux nombres cherchés, la premiére équation fondamentale ſera $x+y=xy$; la ſeconde, $x+y+x^2+y^2=12$; la premiére de ces équations donne par tranſpoſition $yx-x=y$; mais $yx-x$ eſt le produit de $\overline{y-1}\times x$ ou de $x\times\overline{y-1}$; donc $x\times\overline{y-1}=y$, & $x=\frac{y}{y-1}$. En ſubſtituant cette valeur de x dans la ſeconde équation

tion fondamentale, nous aurons une équation de quatre dimenſions, dont la ſolution dépend de certaines règles que nous n'avons point données juſqu'ici; pour y ſuppléer il eſt bon d'avoir recours à quelque autre artifice. Par exemple, appellons la ſomme des deux nombres cherchés z, qui par la ſuppoſition ſera auſſi le produit de leur multiplication; & puiſque ce produit z ajoûté à la ſomme de leurs quarrés eſt égal à 12, la ſomme de leurs quarrés ſera $12-z$; mais perſonne n'ignore, que ſi à la ſomme des quarrés de deux nombres quelconques eſt ajoûté le double de leur produit, on a le quarré de leur ſomme; donc $12-z+2z$, ou $12+z=zz$: équation, dont la ſolution donne $z=+4$ &c.; ainſi la queſtion ſe trouve à-préſent réduite à ceci: *Trouver deux nombres dont la ſomme eſt quatre, & dont le produit eſt quatre auſſi.* Appellez les nombres x & $4-x$, & vous aurez $4x-xx=4$, & en changeant les ſignes $xx-4x=-4$; ajoûtant $+4$ dans chaque membre de cette équation pour compléter le quarré $xx-4x+4=0$; & tirant la racine quarrée $x-2=\pm 0$; ainſi $x=2$, ou 2, car les racines ſont égales; donc 2 & 2 ſont les nombres cherchés; car $2+2=4=2+2$; & outre cela, 4 ſomme de $2+2$, & 8 ſomme de leurs quarrés, font enſemble 12.

Corollaire.

Nous pouvons inférer de la premiére tentative que nous avons faite pour réſoudre ce problême, qu'en faiſant un nombre quelconque égal à y, ces deux nombres y & $\frac{y}{y-1}$ auront toujours cette propriété, que leur ſomme ſera égale à leur produit; par exemple, ſi $3=y$, & par conſéquent $\frac{3}{2}=\frac{y}{y-1}$, nous aurons $3+\frac{3}{2}=4\frac{1}{2}$, & $3\times\frac{3}{2}$ ou $\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$; d'où il ſuit, que ce problême ne ſauroit avoir d'autre ſolution en nombres entiers que celle que nous avons donnée.

Probleme 90.

133. *On demande deux nombres dont la ſomme ajoûtée au produit de leur multiplication faſſe trente-quatre, & dont la même ſomme retranchée de la ſomme de leurs quarrés laiſſe quarante-deux.*

Solution.

Pour rendre le calcul plus ſimple, appellez la ſomme des deux nombres cherchés z. Puiſque cette ſomme ajoûtée au produit de leur multiplication fait 34, le produit en queſtion ſera $34-z$; mais la ſomme z re-

retranchée de la ſomme de leurs quarrés, laiſſe 42; donc la ſomme de leurs quarrés eſt $42+z$; ajoûtez à cette ſomme le double du produit de leur multiplication $68-2z$, & vous aurez $110-z=zz$; par conſéquent $z=+10$, &c. & $34-z=24$; ainſi la queſtion ſe trouve réduite à ceci, *Quels ſont les nombres dont la ſomme eſt dix, & le produit de leur multiplication vingt & quatre?* par l'Art. 111. les deux nombres cherchés ſont 4 & 6.

Ceux qui ſeront curieux de voir d'autres queſtions de cette nature, pourront conſulter le Commentaire de *Bachet* de Meziriac ſur la 33ème queſtion du premier Livre d'Arithmétique de *Diophante*.

N. B. Après avoir traité des équations du ſecond degré je devrois naturellement paſſer à d'autres équations d'un genre plus élevé: cependant je prendrai la liberté de manquer pour cette fois aux règles de la méthode, dans le deſſein de revenir dans la ſuite à ces équations, & d'expliquer diſtinctement ce qui y a rapport. Mais avant tout j'ai cru devoir offrir aux yeux de mes Lecteurs divers objets plus inſtructifs & plus importans.

ELE-

ELEMENS D'ALGEBRE.

LIVRE IV.

Des Problémes généraux, & des Théorémes généraux qu'on peut en déduire; avec la maniére d'appliquer & de démontrer ces Théorémes.

Le deſſein de ce quatriéme Livre marqué plus en détail.

ART. 134. JUſqu'ici notre jeune Analyſte ne s'eſt occupé que d'une eſpéce d'Algébre aſſez limitée, dans laquelle les quantités inconnues étoient ſimplement exprimées par des lettres; mais s'il ſouhaite de raiſonner d'une maniére abſtraite ſur les problêmes qu'il a réſolus, & d'en tirer des concluſions générales, il faut qu'il déſigne par des lettres non ſeulement les quantités inconnues, mais auſſi celles dont il ſait la valeur, afin que les problêmes ſoient propoſés & réſolus indéterminément. Par ce moyen, il obtient, d'un côté des réponſes générales, qui ſont préférables aux réponſes particuliéres, en ce qu'elles peuvent s'appliquer à une infinité de cas; & d'un autre côté, il peut démontrer ſon opération; ce qui non ſeulement vérifie ſon *Analyſe*, mais le familiariſe auſſi de plus en plus avec les opérations de l'Arithmétique ſymbolique ou ſpécieuſe. Nous avons déjà donné à cet égard un exemple ſuffiſant, dans notre théorême général de l'Art. 103; ainſi tout ce qui nous reſte à faire eſt de reprendre quelques problémes déjà réſolus, & de montrer comment on peut les réſoudre en termes généraux.

PROBLEME I. (Voyez Art. 26.)

135. *On demande deux nombres tels, que leur ſomme ſoit* a, *& leur différence* b.

SOLUTION.

Si l'on appelle le plus petit nombre x, le plus grand ſera $x+b$, & leur ſomme $2x+b=a$; ainſi $2x=a-b$, & x (le plus petit nombre) ſera $\frac{a-b}{2}$; d'un autre côté $x+b$ (le plus grand nombre) ſera $\frac{a-b}{2}+\frac{b}{1}=\frac{a-b+2b}{2}=\frac{a+b}{2}$; de ſorte que le plus grand nombre ſe

trouvera être $\frac{a+b}{2}$, & le plus petit $\frac{a-b}{2}$. Dans cette expreſſion les grandeurs a & b reſtent indéterminées, juſqu'à ce qu'il ſoit queſtion d'appliquer le problême général à quelque cas particulier; alors les quantités a & b ſeront non ſeulement déterminées, mais le problême pourra être réſolu par le théorême général ſans la moindre *Analyſe*. Par exemple, ſi l'on propoſe, comme dans l'Art. 26, de trouver deux nombres dont la ſomme ſoit 48, & la différence 14, il eſt clair que dans le problême général a répond à 48 dans le cas particulier, & que b répond à 14; donc $\frac{a+b}{2}$ (ou le plus grand nombre) $=\frac{48+14}{2}=\frac{62}{2}=31$, & $\frac{a-b}{2}$ (ou le plus petit nombre) $=\frac{48-14}{2}=\frac{34}{2}=17$; ſi bien que les deux nombres cherchés ſont 31 & 17. Si, par exemple encore, la ſomme des deux nombres avoit été 35, & leur différence 9, a & b auroient été d'autres nombres, & $\frac{a+b}{2}$ (ou le plus grand nombre) $=22$ & $\frac{a-b}{2}$ (ou le plus petit nombre) $=13$.

Ces théorêmes peuvent ſe traduire du langage Algébraïque en toute autre langue; mais cette peine eſt aſſez inutile dès qu'on eſt tant ſoit peu verſé dans l'Arithmétique ſpécieuſe; car en fait de clarté le langage Algébraïque ſurpaſſe, à mon avis, tous les autres. Le problême précédent, & ſa ſolution peuvent s'énoncer ainſi en François.

PROBLEME.

La ſomme & la différence de deux nombres quelconques étant données, on demande les nombres mêmes.

SOLUTION. 1*ment*, *Ajoûtez la différence à la ſomme, & la moitié du tout ſera le plus grand nombre.* 2*ment*, *Retranchez la différence de la ſomme, & la moitié du reſte ſera le plus petit nombre.*

Cette traduction eſt ſurement fidéle: car qu'eſt-ce que $\frac{a+b}{2}$ ſinon la moitié de la ſomme & de la différence? Et qu'eſt-ce que $\frac{a-b}{2}$ ſinon la moitié du réſte, après que la différence a été retranchée de la ſomme?

Examinons à-préſent le théorême tel qu'il eſt exprimé en termes généraux, & eſſayons s'il répond aux conditions du problême énoncé en lettres. Il s'agiſſoit de trouver deux nombres dont la ſomme fût a, & la différence b; & la réponſe a été que le plus grand nombre étoit $\frac{a+b}{2}$ & le plus petit $\frac{a-b}{2}$. Il n'y a aucun lieu de douter que cette

réponſe

réponſe ne ſoit vraye; pourvu qu'on ajoûte ſimplement les nombres enſemble, ou qu'on les retranche l'un de l'autre; car ajoûtant $\frac{a+b}{2}$ à $\frac{a-b}{2}$, leur ſomme ſera $\frac{2a}{2}$ ou a, ce qui ſatisfait à la premiére condition du problême; & ſi $\frac{a-b}{2}$ eſt retranché de $\frac{a+b}{2}$, le reſte ſera $\frac{2b}{2}=b$, ce qu'exigeoit la ſeconde condition.

C'eſt ce qu'on appelle une démonſtration ſynthétique, démonſtration qui ne prouve pas moins bien la vérité du théorême auquel elle eſt rélative, que l'*Analyſe* qui a ſervi à trouver le théorême; avec cette différence néanmoins, que la démonſtration ſynthétique fait voir ſeulement que la propoſition eſt vraye; au-lieu que la démonſtration analytique indique de-plus pourquoi elle eſt vraye, & développe tout le myſtére. Les démonſtrations ſynthétiques demandent ordinairement moins de principes que les démonſtrations analytiques, comme on peut s'en convaincre en comparant les deux démonſtrations telles qu'elles ſe trouvent dans l'exemple que nous venons de donner; & voilà, ſi je ne me trompe, pourquoi les Anciens, généralement parlant, ont préféré les démonſtrations ſynthétiques; non qu'ils tâchaſſent de cacher leur *Analyſe*, comme on l'a prétendu; mais parce que ce genre de démonſtration ſuppoſe moins de principes, & qu'outre cela les principes ſur lesquels on ſe fonde, ſont plus connus.

PROBLEME 2.

136. *On demande trois nombres qui ſoient tels, que la ſomme du premier & du ſecond ſoit* a, *celle du premier & du troiſiéme* b, *& celle du ſecond & du troiſiéme* c.

SOLUTION.

Mettez x pour le premier nombre cherché, alors le ſecond ſera $a-x$, puiſque le premier nombre & le ſecond ajoûtés enſemble ſont a, par la même raiſon le troiſiéme nombre ſera $b-x$; ajoûtez enſemble le ſecond nombre & le troiſiéme, & vous aurez $a+b-2x=c$; donc $2x+c=a+b$; donc $2x=a+b-c$; & x, (ou le premier nombre) $=\frac{a+b-c}{2}$; retranchez le premier nombre $\frac{a+b-c}{2}$ de a, ou, ce qui revient au même, ajoûtez $\frac{-a-b+c}{2}$ à a, & vous aurez le ſecond nombre $=\frac{-a-b+c}{2}+\frac{a}{1}=\frac{-a-b+c+2a}{2}=\frac{a-b+c}{2}$; de plus retranchez le premier

mier nombre $\frac{a+b-c}{2}$ de b, & vous aurez le troiſiéme nombre égal à $\frac{-a-b+c}{2}+\frac{b}{1}=\frac{-a+b+c}{2}$; ainſi nous avons les trois nombres cherchés, ſavoir,

Le premier, $\frac{a+b-c}{2}$,

Le ſecond, $\frac{a-b+c}{2}$,

Le troiſiéme, $\frac{-a+b+c}{2}$.

Pour appliquer cette ſolution générale à quelque cas particulier, je ferai uſage du problême de l'Art. 42, où il a été queſtion de trouver trois nombres tels, que la ſomme du premier & du ſecond faſſent 60, celle du premier & du troiſiéme 80, & celle du ſecond & du troiſiéme 92: en ce cas il eſt évident que $a=60$, $b=80$, & $c=92$; donc $\frac{a+b-c}{2}$ ou le premier nombre ſera 24; $\frac{a-b+c}{2}$ ou le ſecond nombre ſera 36; & $\frac{-a+b+c}{2}$ ou le troiſiéme nombre ſera 56: nombres, qui répondent exactement aux conditions du problême. Mais pour faire voir que les théorêmes que nous venons d'indiquer ſont généraux, nous en donnerons la démonſtration ſynthétique que voici.

1ment, Le premier nombre $\frac{a+b-c}{2}$ & le ſecond $\frac{a-b+c}{2}$ ajoûtés enſemble ſont $\frac{2a}{2}$ ou a, comme l'exige la premiére condition.

2ment, Le premier nombre $\frac{a+b-c}{2}$ & le troiſiéme $\frac{-a+b+c}{2}$ ajoûtés enſemble ſont $\frac{2b}{2}$ ou b, ce qui étoit requis par la ſeconde condition.

Enfin, Le ſecond nombre $\frac{a-b+c}{2}$, & le troiſiéme $\frac{-a+b+c}{2}$ ajoûtés enſemble ſont $\frac{2c}{2}$ ou c, conformément à la derniére condition.

Ce probléme eſt ſuſceptible d'une ſolution plus élégante. Déſignez par s la ſomme inconnue des trois nombres cherchés, alors ſi c, ſomme du ſecond nombre & du troiſiéme, eſt retranché de s, ſomme de tous les trois nombres, il reſtera le premier nombre égal à $s-c$; pareillement ôtant b, ſomme du premier nombre & du troiſiéme, de s, il reſtera le ſecond nombre égal à $s-b$; enfin, ſi l'on retranche a, ſomme

me du premier nombre & du ſecond, de s, on aura le troiſiéme nombre égal à $s-a$; ajoûtez enſemble ces trois nombres, ſavoir $s-c$, $s-b$, & $s-a$, & la ſomme ſera $3s-a-b-c$; mais la ſomme eſt s, par la ſuppoſition; donc $3s-a-b-c=s$; & $s=\frac{a+b+c}{2}$; ce qui donne le théorême ſuivant:

Faites $\frac{a+b+c}{2}=s$; *cela étant, ſi l'on retranche de* s *chacun des trois nombres* a, b, c, *en commençant par le dernier, & ainſi de ſuite, les trois reſtes* $\overline{s-c}$, $\overline{s-b}$ & $\overline{s-a}$ *ſeront les trois nombres cherchés, rangés dans l'ordre marqué par le problême.* Si par exemple $a=60$, $b=80$, & $c=92$, comme ci-deſſus, nous aurons $\frac{a+b+c}{2}$ ou $s=116$; donc le premier nombre eſt $116-92$ ou 24, le ſecond $116-80$ ou 36, & le troiſiéme $116-60$ ou 56.

Scholie.

On demande trois nombres, qui ayent les propriétés ſuivantes; que le produit du premier & du ſecond ſoit a, *celui du premier & du troiſiéme* b, *& enfin celui du ſecond & du troiſiéme* c.

Solution.

Appellez le produit de tous les trois nombres p; cela étant, puiſque c eſt le produit des deux derniers, nous aurons le premier nombre égal à $\frac{p}{c}$; par la même raiſon le ſecond nombre eſt égal à $\frac{p}{b}$, & le troiſiéme à $\frac{p}{a}$, & le produit de tous les trois $\frac{p^3}{abc}=p$; ainſi $p^2=abc$ & $p=\sqrt{abc}$.

Demonstration.

$\frac{p}{c}\times\frac{p}{b}$, ou le produit du premier nombre & du ſecond, eſt $\frac{p^2}{bc}=\frac{abc}{bc}=a$; & ainſi du reſte.

Probleme 3.

137. *On demande deux nombres qui ayent pour différence* b, *& a pour différence de leurs quarrés.*

Solution.

Si l'on appelle le plus petit nombre x, & par conſéquent le plus grand $x+b$, le quarré du plus petit nombre ſera xx, celui du plus grand

$xx+2bx+bb$, & la différence de ces quarrés $2bx+bb=a$; ainſi $2bx=a-bb$, & x, (le petit nombre) $=\frac{a-bb}{2b}$; donc $x+b$ (le plus grand nombre) $=\frac{a-bb}{2b}+\frac{b}{1}=\frac{a-bb+2bb}{2b}=\frac{a+bb}{2b}$.

Pour appliquer cette ſolution générale à un cas particulier, ſuppoſons qu'on demande deux nombres, qui ayent pour différence 4, & pour différence de leurs quarrés 112: alors $a=112$, $b=4$, $bb=16$, $\frac{a-bb}{2b}=12$ $\frac{a+bb}{2b}=16$; donc les nombres ſont 12 & 16. En voici la démonſtration générale: ſi l'on retranche le plus petit nombre $\frac{a-bb}{2b}$ du plus grand $\frac{a+bb}{2b}$, leur différence ſera $\frac{2bb}{2b}$ ou b, conformément à la premiére condition du problême; de-plus, le quarré du plus petit nombre $\frac{a-bb}{2b}$ eſt $\frac{aa-2abb+b^4}{4bb}$, & le quarré du plus grand $\frac{a+bb}{2b}$ eſt $\frac{aa+2abb+b^4}{4bb}$; retranchez le premier de ces quarrés du ſecond, & vous aurez leur différence $\frac{4abb}{4bb}=a$, conformément à la ſeconde condition.

PROBLEME 4.

138. *Soient* r & s *deux multiplicateurs donnés, dont* r *eſt le plus grand; on demande de partager un nombre donné comme* a *en deux parties, tellement que le produit de la plus grande partie par le plus petit multiplicateur ſoit égal au produit de la plus petite partie par le plus grand multiplicateur.*

SOLUTION.

Si l'on appelle la plus grande partie x, & la plus petite $a-x$, le produit du plus petit multiplicateur par la plus grande partie ſera sx, & celui de la plus petite partie par le plus grand multiplicateur ſera $ar-rx$; mais ſuivant le problême ces produits doivent être égaux; donc $sx=ar-rx$, & $rx+sx=ar$; mais $rx+sx=x\times\overline{r+s}$; donc $x\times\overline{r+s}=ar$; & x (la plus grande des parties cherchées) $=\frac{ar}{r+s}$; donc $a-x$ (la plus petite des parties) $=\frac{a}{1}-\frac{ar}{r+s}=\frac{ar+as-ar}{r+s}=\frac{as}{r+s}$; ſi bien que la plus grande partie eſt $\frac{ar}{r+s}$, & la plus petite $\frac{as}{r+s}$.

L'Ar-

L'Application.

Pour appliquer cette formule à un exemple, ſuppoſons qu'on veuille partager 84 en deux parties, tellement qu'une des parties priſe cinq fois ſoit égale à ſept fois l'autre: ici $a=84$, r le plus grand multiplicateur $=7$, $s=5$, $\frac{ar}{r+s}=\frac{7\times 84}{12}=49$, $\frac{as}{r+s}=\frac{5\times 84}{12}=35$; donc la plus grande partie eſt 49 & la plus petite 35; & ces parties ſatisfont aux conditions du problême; car premiérement, $49+35=84$; & ſecondement, $49\times 5=245=35\times 7$. Par exemple encore, s'il avoit été queſtion de partager 99 en deux parties, tellement que les $\frac{4}{7}$ de l'une fuſſent égaux aux $\frac{5}{7}$ de l'autre, nous aurions eu $a=99$, $r=\frac{4}{7}$, $s=\frac{5}{7}$, $r+s=\frac{9}{7}$, $\frac{r}{r+s}=\frac{\frac{4}{7}}{\frac{9}{7}}=\frac{4}{9}$, $\frac{s}{r+s}=\frac{\frac{5}{7}}{\frac{9}{7}}=\frac{5}{9}$, $\frac{ar}{r+s}=99\times\frac{4}{9}=54$, $\frac{as}{r+s}=99\times\frac{5}{9}=45$; de ſorte que les deux parties ſont 54 & 45; ce qui eſt vrai; car premiérement, $54+45=99$; & ſecondement, $\frac{4}{7}$ de $54=36=\frac{5}{7}$ de 45.

Il eſt bon d'obſerver au ſujet de la démonſtration de cette ſolution générale, qu'il y a dans ce problême deux conditions; premiérement, que les deux parties, ajoûtées enſemble, ſont a; & ſecondement, que le produit de la plus grande partie par le plus petit multiplicateur doit être égal à celui de la plus petite partie par le plus grand multiplicateur; par rapport à la premiére condition, il eſt certain que les parties $\frac{ar}{r+s}$ & $\frac{as}{r+s}$ ajoûtées enſemble font $\frac{ar+as}{r+s}$; mais $ar+as=a\times\overline{r+s}$; donc $\frac{ar+as}{r+s}=a\times\frac{r+s}{r+s}=a\times 1=a$: pour ce qui concerne la ſeconde condition, ſi la plus grande partie $\frac{ar}{r+s}$, eſt multipliée par s, le plus petit multiplicateur, le produit ſera $\frac{ars}{r+s}$; & d'un autre côté, ſi la plus petite partie $\frac{as}{r+s}$ eſt multipliée par r, le plus grand multiplicateur, le produit ſera pareillement $\frac{ars}{r+s}$; ainſi les deux produits ſont égaux, comme l'exige le problême; & les deux conditions ſe trouvent remplies. C. Q. F. D.

N. B. Si l'on vouloit exprimer par des mots le théorême précédent, on pourroit le faire ſans peine, & cela d'une maniére qui portéroit pour ainſi dire avec elle ſa démonſtration; car par la règle de trois, $r+s$ eſt à r comme a eſt à $\frac{ar}{r+s}$; & $r+s$ eſt à s comme a eſt à $\frac{as}{r+s}$; donc, *comme la ſomme des deux multiplicateurs eſt au plus grand multiplicateur ou au*

plus petit, ainſi la ſomme des deux parties cherchées, eſt à la plus grande partie ou à la plus petite: & cela eſt très-évident; car ſi $\overline{r+s}$ avoit été le nombre à partager, les parties auroient certainement été $r+s$; par conſéquent ſi un nombre plus grand ou plus petit que $\overline{r+s}$ doit être partagé, les parties ſeront néceſſairement plus grandes ou plus petites que r & s dans la même proportion.

PROBLEME 5.

139. *Que* r *&* s *ſoient deux multiplicateurs donnés, &* r *le plus grand; on demande de partager un nombre donné comme* a *en deux parties, tellement que* r *fois une partie, plus* s *fois l'autre partie, faſſent le nombre donné* b.

SOLUTION.

Appellant x la partie qui doit être multipliée par r, & par conſéquent $a-x$ l'autre partie qui doit être multipliée par s, les produits ſeront rx & $as-sx$, & leur ſomme $rx+as-sx=b$; donc $rx-sx=b-as$, c'eſt-à-dire; $x\times\overline{r-s}=b-as$; donc x (la partie qui doit être multipliée par r) $=\frac{b-as}{r-s}$; donc $a-x$ (la partie qui doit être multipliée par s) $=\frac{a}{1}-\frac{b+as}{r-s}=\frac{ar-as-b+as}{r-s}=\frac{ar-b}{r-s}$.

L'APPLICATION.

Si l'on vouloit partager 20 en deux parties, tellement que trois fois une des parties & cinq fois l'autre fiſſent enſemble 84, nous aurions $a=20$, $b=84$, $r=5$, $s=3$, $as=60$, $b-as=24$, $\frac{b-as}{r-s}$ (ou la partie à multiplier par 5) $=\frac{24}{2}=12$, $ar=100$, $ar-b=16$, $\frac{ar-b}{r-s}$ (ou la partie à multiplier par 3) $=\frac{16}{2}=8$; donc les parties cherchées ſont 8 & 12; car premiérement $8+12=20$; & en ſecond lieu trois fois $8+5$ fois $12=84$.

Par exemple encore: s'il falloit partager 100 en deux parties telles que les $\frac{3}{4}$ de l'une retranchés des $\frac{1}{2}$ de l'autre laiſſent 39, il ſeroit néceſſaire d'abord d'obſerver, que retrancher les $\frac{3}{4}$ d'une quantité de quelque autre quantité du même genre, eſt la même choſe qu'ajoûter à cette derniére quantité $\frac{-3}{4}$ de l'autre; ainſi ce problême peut s'exprimer ainſi: *partager cent en deux parties telles, que* $\frac{-3}{4}$ *de l'une ajoûtés à* $\frac{1}{2}$ *de l'autre*

l'autre faſſent trente-neuf. Ici $a=100$, $b=39$, $r=\frac{1}{4}$, $s=\frac{-3}{4}$, $r-s=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}$, $as=\frac{-300}{4}=-75$, $b-as=39+75=114$, $\frac{b-as}{r-s}=\frac{114}{\frac{19}{12}}$ $=72$, $ar=\frac{500}{6}=\frac{250}{3}$, $ar-b=\frac{250}{3}-\frac{39}{1}=\frac{133}{3}$, $\frac{ar-b}{r-s}=\frac{3}{\frac{19}{12}}=28$; ſi bien que les deux parties ſont 28 & 72; car $28+72=100$; outre cela $\frac{3}{4}$ de 28, c'eſt-à-dire 21, retranchés de $\frac{1}{4}$ de 72, c'eſt-à-dire de 60, laiſſent 39.

Demonstration Generale.

Les deux parties $\frac{ar-b}{r-s}$ & $\frac{b-as}{r-s}$ ajoûtées enſemble font $\frac{ar-b+b-as}{r-s}$ $=\frac{ar-as}{r-s}=a\times\frac{r-s}{r-s}=a$: d'un autre côté, la partie $\frac{b-as}{r-s}$ étant multipliée par r, ſon multiplicateur, donne $\frac{br-ars}{r-s}$, & l'autre $\frac{ar-b}{r-s}$, multipliée par s donne $\frac{ars-bs}{r-s}$; ajoûtez enſemble ces deux produits, & vous aurez $\frac{br-ars+ars-bs}{r-s}=\frac{br-bs}{r-s}=b$. C. Q. F. D.

Si quelqu'un de mes Lecteurs me trouve trop concis dans les ſolutions de ces problêmes généraux, il fera bien d'avoir recours aux problêmes particuliers contenus dans les articles que j'indiquerai, où ces mêmes problêmes ſont réſolus d'une maniére plus étendue. Pour ce qui concerne l'application des ſolutions générales au cas particuliers, il y a lieu de préſumer que ceux qui ſe ſont attachés à bien entendre ce qui a précédé, n'y trouveront aucune difficulté; ainſi je leur laiſſerai desormais ce ſoin, horsmis dans quelques occaſions où mon ſecours pourroit leur être néceſſaire.

Probleme 6. (Voyez Art. 35.)

140. *Quelqu'un ayant rencontré un certain nombre de Pauvres, donne à chacun d'eux* p *ſous & ſe trouve avoir* a *ſous de reſte; mais s'il leur avoit voulu donner à chacun* q *ſous, il auroit trouvé qu'il lui manquoit pour cela* b *ſous. Combien y avoit-il de Pauvres?*

Solution.

Le nombre des Pauvres, x.
Sous donnés, px.
Sous en tout, $px+a$.

Les ſous qui auroient été donnés dans l'autre ſuppoſition, qx.

Une autre expreſſion pour déſigner le nombre des ſous en tout $qx-b$.

Eq. $qx-b=px+a$; donc $qx-px-b=a$; donc $qx-px=a+b$; donc x (nombre des Pauvres) $=\frac{a+b}{q-p}$.

DEMONSTRATION.

Si le nombre des Pauvres eſt $\frac{a+b}{q-p}$, le nombre des ſous donnés ſera $\frac{ap+bp}{q-p}$, & le nombre des ſous en tout $\frac{ap+bp}{q-p}+\frac{a}{1}=\frac{ap+bp+aq-ap}{q-p}$ $=\frac{aq+bp}{q-p}$: d'un autre côté, le nombre des ſous qui auroient été donnés dans la ſeconde ſuppoſition eſt $\frac{aq+bq}{q-p}$; par conſéquent l'autre expreſſion, qui déſigne le nombre des ſous en tout ſera $\frac{aq+bq}{q-p}-\frac{b}{1}$ $=\frac{aq+bp}{q-p}$; & la parfaite convenance entre ce calcul & le calcul précédent prouve que le nombre des Pauvres a été bien aſſigné.

PROBLEME 7. (Voyez Art. 64.)

141. *On demande de partager le nombre donné* a *en deux parties, qui ſoient l'une à l'autre comme* r *à* s.

SOLUTION.

Les deux parties cherchées x & $a-x$.

Proportion, x eſt à $a-x$ comme r à s.

Equation, $sx=ar-rx$; donc $rx+sx=ar$; donc x (ou le premier nombre) $=\frac{ar}{r+s}$; donc $a-x$ (ou le ſecond nombre) $=\frac{a}{1}-\frac{ar}{r+s}$ $=\frac{as}{r+s}$; donc les deux nombres ſont $\frac{ar}{r+s}$ & $\frac{as}{r+s}$.

DEMONSTRATION.

1ment, Les deux nombres $\frac{ar}{r+s}$ & $\frac{as}{r+s}$ ajoûtés enſemble ſont $\frac{ar+as}{r+s}=a$.

2ment, Le premier nombre $\frac{ar}{r+s}$ eſt au ſecond $\frac{as}{r+s}$, comme ar eſt à as; l'action d'effacer un dénominateur commun à deux fractions étant la même que ſi l'on avoit multiplié chacune de ces fractions par leur dénomina-

nominateur: or perſonne n'ignore que la multiplication de deux quantités par un même nombre, ne change point la proportion qui ſe trouve entre elles: outre cela, ar eſt à as (diviſant l'une & l'autre quantité par a) comme r à s; car tout le monde ſait qu'un même diviſeur n'altére pas davantage les différentes quantités, qui ont entre elles une certaine proportion, que ne feroit un même multiplicateur: puis donc que le premier nombre eſt au ſecond comme ar à as, & que ar eſt à as comme r à s, il s'enſuit que le premier nombre eſt au ſecond comme r à s. C. Q. F. D.

PROBLEME 8. (Voyez Art. 66.)

142. *On demande un nombre, qui étant ajoûté ſéparément à deux nombres donnés, dont* a *eſt le plus grand &* b *le plus petit, faſſe deux ſommes, dont la premiére ſoit à la ſeconde comme* r *à* s; *ainſi il faut que* r *ſoit plus grand que* s.

SOLUTION.

Le nombre cherché, x.

Proportion, $a+x$ eſt à $b+x$ comme r à s.

Equation, $br+rx=as+sx$; donc $br+rx-sx=as$; donc $rx-sx=as-br$; donc $x=\frac{as-br}{r-s}$.

DEMONSTRATION.

Le nombre $\frac{as-br}{r-s}$ ajoûté au nombre a donne $\frac{ar-br}{r-s}$; & le même nombre étant ajoûté à b donne $\frac{as-bs}{r-s}$; or $\frac{ar-br}{r-s}$ eſt à $\frac{as-bs}{r-s}$ comme $ar-br$ eſt à $as-bs$, c'eſt-à-dire, comme $r \times \overline{a-b}$ eſt à $s \times \overline{a-b}$, c'eſt-à-dire, comme r à s. C. Q. F. D.

SCHOLIE

Il s'eſt agi dans ce problême de trouver un nombre, qui étant ajoûté ſéparément aux nombres a & b, faſſe deux nombres dont le premier ſoit au ſecond comme r à s; changeons à-préſent l'un pour l'autre les nombres a & b, & faiſons en de-même à l'égard de r & s: l'expreſſion du problême ſera alors: *Trouver un nombre qui étant ajoûté ſéparément aux nombres* a *&* b *faſſe la premiére ſomme à la ſeconde comme* s *à* r; mais la condition de ce problême eſt préciſément la même que celle de l'autre, & par conſéquent la ſolution doit être la même auſſi, c'eſt-à-dire, que com-

comme le changement réciproque de a pour b, de-même que celui de r pour s, laiſſent le problême tel qu'il étoit, la ſolution doit ſe trouver la même auſſi. Voyons cependant quel effet produiroit le changement que nous venons de ſuppoſer: le nombre cherché étoit $\frac{as-br}{r-s}$; mais par la nouvelle ſuppoſition as devient br, & br devient as, $r-s$ devient $s-r$, & l'expreſſion totale ſera tournée ainſi, $\frac{br-as}{s-r}$; mais $\frac{br-as}{s-r}$ eſt la même choſe que $\frac{as-br}{r-s}$; car en changeant le ſigne, tant du numérateur que du dénominateur d'une fraction quelconque, on n'altére pas davantage la valeur de cette fraction, que dans la diviſion le changement du ſigne, tant du dividende que du diviſeur n'affecte la valeur du quotient: ainſi il eſt clair, que le changement réciproque de a pour b, & de r pour s, n'affecte pas plus le théorême, par le moyen duquel nous avons déterminé le nombre cherché, qu'il n'altére le problême, dont ce théorême a été déduit.

Probleme 9.

143. *Partager un nombre donné* a *en deux parties, tellement que la quantité dont une de ces parties ſurpaſſe* b, *ſoit à ce qui manque à l'autre partie pour égaler* b, *comme* r *à* s.

Solution.

Soit x la plus grande partie, & $\overline{a-x}$ la plus petite; cela étant, la quantité dont x ſurpaſſe b ſera $x-b$; & celle dont b ſurpaſſe $\overline{a-x}$ ſera $x-a+b$; mais par la condition du problême le premier excès eſt au ſecond comme r à s: réduiſez cette analogie en équation, & vous aurez $sx-bs = rx-ar+br$; donc $rx-sx=ar-br-bs$, & x (la plus grande partie) $=\frac{ar-br-bs}{r-s}$; donc $a-x$ (la plus petite partie) $=\frac{a}{1}-\frac{-ar+br+bs}{r-s}$ $=\frac{br+bs-as}{r-s}$; deſorte que la plus grande partie eſt à la plus petite, comme $\frac{ar-br-bs}{r-s}$ eſt à $\frac{br+bs-as}{r-s}$.

Exemple.

S'il étoit queſtion (comme dans l'Art. 41.) de partager le nombre 48 en deux parties telles, que l'une fut trois fois autant au-deſſus de 20 que l'autre partie eſt au-deſſous de ce nombre: Ici $a=48$, $b=20$, $r=3$, $s=1$;

$s=1$; car dire que l'excès doit ſurpaſſer trois fois le défaut, c'eſt dire en d'autres termes, que l'excès doit être au défaut comme 3 à 1; le reſte n'a aucune difficulté.

Demonstration Generale.

Iment, la plus grande partie $\frac{ar-br-bs}{r-s}$, & la plus petite $\frac{br+bs-as}{r-s}$ ajoûtées enſemble font $\frac{ar-as}{r-s}=a$: d'un autre côté, l'excès de la plus grande partie par deſſus b, eſt $\frac{ar-br-bs}{r-s}-\frac{b}{1}=\frac{ar-br-bs-br+as}{r-s}$ $=\frac{ar-2br}{r-s}$, & l'excès de b par deſſus la plus petite partie, qui eſt ce qui manque à cette partie pour être égale à b, eſt $\frac{b}{1}\ \frac{-br-bs+as}{r-s}$ $=\frac{br-bs-br-bs+as}{r-s}=\frac{as-2bs}{r-s}$ donc l'excès d'une partie par deſſus b eſt ce qui manque à l'autre partie pour égaler b, comme $\frac{ar-2br}{r-s}$ eſt à $\frac{as-2bs}{r-s}$, c'eſt-à-dire, comme $ar-2br$ eſt à $as-2bs$, c'eſt-à-dire, comme $r\times\overline{a-2b}$ eſt à $s\times\overline{a-2b}$, ou comme r à s. C. Q. F. D.

Problème 10. (Voyez Art. 55.)

144. *De deux endroits, éloignés l'un de l'autre de la diſtance* a, *partent en même tems deux hommes, dont l'un avance à raiſon de* p *milles dans le nombre d'heures* q, *& l'autre à raiſon de* r *milles dans le nombre d'heures* s: *on demande combien de tems ils ont été en chemin, & combien de milles chacun d'eux avoit faits, quand ils ſe ſont rencontrés.*

Solution.

Le nombre d'heures que chacun d'eux a été en chemin, x.

Milles faits par le premier, $\frac{px}{q}$.

Par le ſecond, $\frac{rx}{s}$.

Par tous deux, $\frac{px}{q}+\frac{rx}{s}$.

Equation, $\frac{px}{q}+\frac{rx}{s}=a$; donc $px+\frac{qrx}{s}=aq$; donc $psx+qrx=aqs$; donc x (nombre d'heures que chacun d'eux a été en chemin)

$= \frac{aqs}{ps+qr}$: pour trouver préſentement combien de milles le premier a faits, je dis, s'il fait p milles dans le nombre d'heures q, combien en fera-t-il dans un nombre d'heures égal à $\frac{aqs}{ps+qr}$? Pour avoir cette quatriéme proportionnelle, je multiplie le troiſiéme nombre $\frac{aqs}{ps+qr}$ par le ſecond p, & le produit eſt $\frac{apqs}{ps+qr}$; je diviſe enſuite ce produit par le premier nombre q, & le quotient eſt $\frac{aps}{ps+qr}$; car pour diviſer une fraction il faut ſimplement diviſer le numérateur : par un raiſonnement tout pareil, les milles faits par l'autre ſe trouveront être $\frac{aqr}{ps+qr}$; donc le nombre total de milles faits par tous deux eſt $\frac{aps+aqr}{ps+qr} = a$, ce qui démontre la juſteſſe de la ſolution.

Exemple.

Que la diſtance, qui ſépare les deux endroits, ſoit de 154 milles; que le premier voyageur faſſe 3 milles en 2 heures, & le ſecond 5 milles en 4 heures ; nous aurons alors $a=154, p=3, q=2, r=5, s=4, ps=12, qr=10, ps+qr=22, \frac{aqs}{ps+qr}$ $= \frac{154\times2\times4}{22} = 56, \frac{aps}{ps+qr} = \frac{154\times3\times4}{22} = 84, \frac{aqr}{ps+qr} = \frac{154\times2\times5}{22} = 70$: donc chacun d'eux a été 56 heures en chemin ; le premier a fait 84 milles, & l'autre 70.

Scholie.

Si dans le problême précédent on change p en r & q en s, & réciproquement ; il réſultera de cette ſuppoſition, que le premier voyageur a avancé avec la viteſſe du ſecond, & le ſecond avec la viteſſe du premier ; mais le mouvement, par lequel ces deux voyageurs approchent l'un de l'autre, reſtera le même, & par conſéquent le tems que chacun d'eux a été en chemin doit reſter le même auſſi : faiſons donc les changemens indiqués, premiérement dans l'expreſſion du tems, & voyons ſi cette expreſſion ſera la même : faiſons enſuite les changemens en queſtion dans les deux expreſſions des milles, pour voir ſi l'une de ces expreſſions n'eſt pas devenue l'autre, & réciproquement : premiérement donc, l'expreſſion du tems, qui eſt $\frac{aqs}{ps+qr}$, en changeant p en r, & q en s, & réciproquement, devient $\frac{asq}{sq+rp}$, qui eſt la même que $\frac{aqs}{ps+qr}$; donc les changemens en ques-

queſtion n'en produiſent aucun dans l'expreſſion du tems: ſecondement, les milles faits par le premier étoient $\frac{aps}{ps+qr}$: quantité qui, après les changemens indiqués, devient $\frac{arq}{rq+sp}$, qui eſt la même que $\frac{aqr}{ps+qr}$, c'eſt-à-dire, que les milles faits par le ſecond. En vertu du même raiſonnement, l'expreſſion $\frac{aqr}{ps+qr}$ ſera changée en $\frac{aps}{ps+qr}$; & ainſi le cas du premier voyageur ſera devenu celui du ſecond, & réciproquement.

PROBLEME II. (Voyez Art. 46.)

145. *Suppoſons que* p *livres d'or hors de l'eau péſent* q *livres dans l'eau, & que* r *livres d'argent péſent* s *livres dans l'eau; ſuppoſons de plus qu'une maſſe peſant* a *livres, & compoſée d'or & d'argent, ne péſe que* b *livres dans l'eau: on demande la quantité d'or, & celle d'argent qu'il y a dans la maſſe.*

SOLUTION.

Le nombre de livres d'or dans la maſſe, x.
D'argent, $a-x$.

Le poids des livres d'or dans l'eau, $\frac{qx}{p}$.

Celui des livres d'argent $\frac{as-sx}{r}$.

Equation, $\frac{qx}{p}+\frac{as-sx}{r}=b$; donc $qx+\frac{aps-psx}{r}=bp$; donc $qrx+aps-psx=bpr$; donc $qrx-psx=bpr-aps$; donc x (ou le nombre de livres d'or dans la maſſe) $=\frac{bpr-aps}{qr-ps}$; donc $a-x$ (ou le nombre de livres d'argent) $=\frac{a}{1}-\frac{bpr+aps}{qr-ps}=\frac{aqr-bpr}{qr-ps}$.

DEMONSTRATION.

Premiérement, le poids de l'or $\frac{bpr-aps}{qr-ps}$, & celui de l'argent $\frac{aqr-bpr}{qr-ps}$ étant ajoûtés enſemble font $\frac{aqr-aps}{qr-ps}=a$.

Secondement, nous devons déterminer combien chacun de ces métaux péſe dans l'eau, en diſant, ſi p livres d'or péſent q livres dans l'eau, que péſera $\frac{bpr-aps}{qr-ps}$? & la réponſe ſera $\frac{bqr-aqs}{qr-ps}$; pareillement le poids de l'argent ſe trouvera être $\frac{aqs-bps}{qr-ps}$.

En troiſiéme lieu, ajoûtez enſemble ces deux poids, c'eſt-à-dire $\frac{bqr-aqs}{qr-ps}$, & $\frac{aqs-bps}{qr-ps}$, & vous aurez $\frac{bqr-bps}{qr-ps}$, ou b. C. Q. F. D.

Prbleme 12.

146. *Il y a deux tuyaux dont l'ouverture eſt telle que l'eau, qui paſſe par l'un remplit une citerne dans le tems* p; *celle qui paſſe par l'autre tuyau remplit la citerne dans le tems* q: *en quel tems la citerne ſera-t-elle remplie ſi l'eau coule à la fois par les deux tuyaux?*

Solution.

Appellez le tems cherché x; puis dites, ſi dans le tems p le premier tuyau fournit aſſez d'eau pour remplir la citerne, combien en fournira-t-il dans le tems x? & la réponſe ſera $\frac{x}{p}$; par la même raiſon $\frac{x}{q}$ déſignera la quantité d'eau fournie par l'autre tuyau dans le même tems x; donc $\frac{x}{p}+\frac{x}{q}$ exprimera la quantité d'eau fournie par tous deux; mais par la condition du problême, il faut qu'ils fourniſſent enſemble aſſez d'eau pour remplir la citerne en ce tems; ce qui nous donne cette Equation $\frac{x}{p}+\frac{x}{q}=1$; donc $x+\frac{px}{q}=p$; donc $qx+px=pq$; donc x (ou le tems cherché) $=\frac{pq}{p+q}$.

Demonstration.

Premiérement, ſi l'eau, qui paſſe par le premier tuyau, remplit la citerne dans le tems p, l'eau, qui s'écoulera dans le tems $\frac{qp}{p+q}$, ſera $\frac{q}{p+q}$.

Secondement, par la même raiſon, dans le tems $\frac{pq}{p+q}$, l'autre tuyau fournira la quantité $\frac{p}{p+q}$.

Donc, en troiſiéme lieu, dans le tems $\frac{pq}{p+q}$, les deux tuyaux fourniront la quantité $\frac{p+q}{p+q}=1$, c'eſt-à-dire, rempliront la citerne. C. Q. F. D.

Pro-

PROBLEME 13.

147. *Quelqu'un a le nombre* n *d'enfans, dont les âges ſont en progreſſion arithmétique; la différence commune de cette progreſſion eſt* d, *& l'âge de l'aîné des enfans eſt à celui du plus jeune comme* r *à* s: *on demande l'âge de l'aîné & celui du plus jeune.*

SOLUTION.

Ici on peut déſigner l'âge de l'aîné par x, & par conſéquent celui du ſecond des enfans par $x-d$, & ainſi de ſuite; mais le calcul ſera plus facile ſi l'on nomme l'âge de l'aîné $x-d$, ou $x-1d$, l'âge du ſecond $x-2d$, celui du troiſiéme $x-3d$, &c.; car par ce moyen, le coëfficient de d marquera dans l'expreſſion de l'âge de chaque enfant le quantiéme enfant c'eſt; mais ſuivant cette façon de calculer, le coëfficient de d pour le plus jeune enfant ſera n; donc ſon âge ſera $x-nd$; ce qui nous donne cette proportion, $x-d$, $x-nd$, comme r à s; & (changeant la proportion en égalité) $rx-dnr=sx-ds$; donc $rx-sx-dnr=-ds$; donc $rx-sx=dnr-ds$; donc $x=\frac{dnr-ds}{r-s}$; donc $x-d$ (ou l'âge de l'aîné) eſt $\frac{dnr-ds}{r-s}-\frac{d}{1}=\frac{dnr-dr}{r-s}$; & $x-nd$ (ou l'âge du plus jeune) eſt $\frac{dnr-ds}{r-s}-\frac{nd}{1}=\frac{dns-ds}{r-s}$.

DEMONSTRATION.

Suivant ce calcul, l'âge de l'aîné eſt à celui du plus jeune comme $\frac{dnr-dr}{r-s}$ eſt à $\frac{dns-ds}{r-s}$, c'eſt-à-dire, comme $dnr-dr$ eſt à $dns-ds$, c'eſt-à-dire, comme $nr-r$ eſt à $ns-s$, c'eſt-à-dire comme $r\times\overline{n-1}$ eſt à $s\times\overline{n-1}$, c'eſt-à-dire, comme r à s. C. Q. F. D.

PROBLEME 14. (Voyez Art. 68.)

148. *Quel eſt le nombre qui, ajoûté ſéparément au nombre* a, *au nombre* b, *& au nombre* c, *tous nombres donnés, formera trois ſommes en proportion Géométrique continue?* Le Lecteur peut, s'il le veut, conſidérer a comme le plus grand des trois nombres donnés, & c comme le plus petit.

SOLUTION.

Appellez le nombre cherché x, & la proportion ſera,

$x+a$ eſt à $x+b$ comme $x+b$ eſt à $x+c$.

Changeant cette analogie en égalité, nous aurons $xx+ax+cx+ac = xx+2bx+bb$; retranchez xx dans les deux membres, & il reſtera $ax+cx+ac=2bx+bb$; donc $ax-2bx+cx+ac=bb$; donc $ax-2bx+cx=bb-ac$; donc x (ou le nombre cherché) $= \frac{bb-ac}{a-2b+c}$.

DEMONSTRATION.

Premiérement, ſi le nombre cherché $\frac{bb-ac}{a-2b+c}$ eſt ajoûté au premier nombre donné a, la ſomme ſera $\frac{aa-2ab+bb}{a-2b+c} = \frac{\overline{a-b}\times\overline{a-b}}{a-2b+c}$, que j'appellerai pour cette raiſon le premier extrême.

Secondement, ſi $\frac{bb-ac}{a-2b+c}$ eſt ajoûté au ſecond nombre b, la ſomme ſera $\frac{bb-ac+ab-2bb+bc}{a-2b+c} = \frac{ab-bb-ac+bc}{a-2b+c}$; mais pour ſe former une idée plus nette de cette fraction, on peut partager le numérateur en deux parties, ſavoir, $ab-bb$ & $-ac+bc$; il eſt clair que la premiére partie $ab-bb$ eſt le produit de $\overline{a-b}\times b$, & que la ſeconde partie $-ac+bc$ eſt le produit de $\overline{a-b}\times -c$; donc tout le numérateur eſt le produit de $\overline{a-b}\times\overline{b-c}$, & le terme moyen eſt $\frac{\overline{a-b}\times\overline{b-c}}{a-2b+c}$.

En troiſiéme lieu, $\frac{bb-ac}{a-2b+c}$ ajoûté au troiſiéme nombre donné c, fait $\frac{bb-2bc+cc}{a-2b+c} = \frac{\overline{b-c}\times\overline{b-c}}{a-2b+c}$, c'eſt-à-dire, le dernier extrême.

En quatriéme lieu, reſte à examiner ſi ces trois ſommes ſont en proportion Géométrique continue: ſi nous comparons pour cet effet enſemble les deux premiers termes, nous trouverons que la premiére ſomme eſt à la ſeconde comme $\frac{\overline{a-b}\times\overline{a-b}}{a-2b+c}$ eſt à $\frac{\overline{a-b}\times\overline{b-c}}{a-2b+c}$, c'eſt-à-dire, comme $\overline{a-b}\times\overline{a-b}$ eſt à $\overline{a-b}\times\overline{b-c}$, c'eſt-à-dire, comme $\overline{a-b}$ eſt à $\overline{b-c}$.

En cinquiéme lieu, ſi nous comparons enſemble le ſecond terme & le troiſiéme, nous trouverons que la ſeconde ſomme eſt à la troiſiéme comme $\frac{\overline{a-b}\times\overline{b-c}}{a-2b+c}$ eſt à $\frac{\overline{b-c}\times\overline{b-c}}{a-2b+c}$, c'eſt-à-dire, comme $\overline{a-b}\times\overline{b-c}$ eſt à $\overline{b-c}\times\overline{b-c}$, c'eſt-à-dire comme $\overline{a-b}$ eſt à $\overline{b-c}$.

En

En ſixiéme lieu, puiſque la premiére ſomme eſt à la ſeconde comme $\overline{a-b}$ eſt à $\overline{b-c}$, & que pareillement la ſeconde ſomme eſt à la troiſiéme comme $\overline{a-b}$ eſt à $\overline{b-c}$, il s'enſuit que la premiére ſomme eſt à la ſeconde, comme la ſeconde eſt à la troiſiéme, & par conſéquent que les trois ſommes ſont en proportion continue. C. Q. F. D.

Scholie.

Il s'agiſſoit dans le dernier problême de trouver un nombre, qui étant ajoûté ſéparément à trois nombres donnés a, b & c, fît trois ſommes en proportion continue: changeons préſentement l'un pour l'autre les deux nombres a & c: il ſera queſtion alors de trouver un nombre, qui ajoûté ſéparément à trois nombres donnés c, b & a, faſſe trois ſommes en proportion continue: ici il eſt manifeſte, premiérement, que le nombre cherché doit dans cette ſuppoſition être le même que dans l'autre; ſecondement, que la moyenne proportionnelle doit être la même auſſi; & enfin que les extrêmes n'ont fait que changer de place: cela étant, ſi les expreſſions ont été juſtes dans le premier cas, la ſubſtitution de a & de c l'un pour l'autre doit produire dans ces expreſſions le même effet que dans la nature du problême. Voyons ce qui en eſt.

Premiérement donc, le nombre cherché dans le premier cas étoit $\frac{bb-ac}{a-2b+c}$; ſubſtituez a au-lieu de c, & c au-lieu de a, l'expreſſion ſera changée en celle-ci, $\frac{bb-ca}{c-2b+a}$; mais $bb-ca$ eſt la même quantité que $bb-ac$, & $c-2b+a$ eſt la même que $a-2b+c$; donc le nombre cherché dans cette ſuppoſition eſt $\frac{bb-ac}{a-2b+c}$, le même que dans le problême.

Secondement, la moyenne proportionnelle dans le premier cas étoit $\overline{\frac{a-b\times b-c}{a-2b+c}}$; changez a & c l'un pour l'autre, & l'expreſſion ſera alors $\overline{\frac{c-b\times b-a}{c-2b+a}}$; mais $\overline{c-b}\times\overline{b-a}$ eſt la même quantité que $\overline{b-c}\times\overline{a-b}$ ou que $\overline{a-b}\times\overline{b-c}$, le changement de ſignes dans les deux quantités qu'on multiplie l'une par l'autre n'altérant pas davantage le produit que ſi ce changement n'avoit point été fait; d'ailleurs, comme nous l'avons déjà vu, $c-2b+a$ eſt la même choſe que $a-2b+c$; donc la moyenne proportionnelle en ce cas eſt $\overline{\frac{a-b\times b-c}{a-2b+c}}$, c'eſt-à-dire, la même que dans le problême.

En

En troiſiéme lieu, le premier extrême, que la ſolution du problême nous a donné, eſt $\frac{\overline{a-b}\times\overline{a-b}}{a-2b+c}$; changez l'un pour l'autre a & c dans cette fraction, & elle deviendra $\frac{\overline{c-b}\times\overline{c-b}}{c-2b+a}=\frac{\overline{b-c}\times\overline{b-c}}{a-2b+c}$; donc le premier extrême dans cette nouvelle ſuppoſition eſt le même qu'auparavant.

Mais il ne faut pas qu'on s'imagine, que le but de ce *Scholie*, ou de quelque autre du même genre, ſoit de confirmer la ſolution des problêmes auxquels ils ſont annexés, la choſe n'étant nullement néceſſaire; mon deſſein principal en ceci eſt de faire ſentir la beauté du vrai, la liaiſon néceſſaire entre une vérité & une autre, & combien cette liaiſon eſt plus facile à appercevoir en Mathématiques qu'en aucune autre Science; & cependant il ſe pourroit très-bien que la peine que j'ai priſe, ou que je prendrai à cet égard, fût perdue pour bien des Lecteurs.

PROBLEME 15. (Voyez Art. 38.)

149. *On demande deux nombres, dont le plus grand ſoit au plus petit comme* p *à* q, *& dont le produit ſoit à leur ſomme comme* r *à* s.

SOLUTION.

Si l'on appelle le plus petit nombre x, le plus grand ſe trouvera en diſant, comme q eſt à p, ainſi x le plus petit nombre eſt à $\frac{px}{q}$ le plus grand; ainſi leur ſomme ſera $\frac{px}{q}+\frac{x}{1}=\frac{px+qx}{q}$: d'un autre côté, ſi le plus grand nombre $\frac{px}{q}$ eſt multiplié par x, le produit ſera $\frac{pxx}{q}$; donc le produit des deux nombres ſera à leur ſomme comme $\frac{pxx}{q}$ eſt à $\frac{px+qx}{q}$ c'eſt-à-dire, comme px eſt à $p+q$; mais par une des conditions du problême, le produit eſt à la ſomme comme r à s; donc px eſt à $p+q$ comme r à s; ce qui nous donne cette équation $psx=pr+qr$; & x (le plus petit nombre cherché) $=\frac{pr+qr}{ps}$; donc $px=\frac{pr+qr}{s}$; car la diviſion du dénominateur multiplie toute la fraction; donc $\frac{px}{q}$ (ou le plus grand nombre) $=\frac{pr+qr}{qs}$.

DEMONSTRATION.

Premiérement, le plus grand nombre eſt au plus petit comme $\frac{pr+qr}{qs}$ eſt

eſt à $\frac{pr+qr}{ps}$; diviſez la ſomme $pr+qr$ par elle-même, & le quotient ſera 1; ainſi nous pouvons dire, que le plus grand nombre eſt au plus petit comme $\frac{1}{qs}$ eſt à $\frac{1}{ps}$, c'eſt-à-dire, comme $\frac{1}{q}$ eſt à $\frac{1}{p}$, c'eſt-à-dire, comme $\frac{p}{q}$ eſt à 1, c'eſt-à-dire, comme p à q.

Secondement, le plus grand nombre $\frac{pr+qr}{qs}$ & le plus petit $\frac{pr+qr}{ps}$ ajoûtés enſemble font $\frac{pprs+pqrs+pqrs+qqrs}{pqss} = \frac{pprs+2pqrs+qqrs}{pqss}$; mais $pp+2pq+qq = \overline{p+q}^2$; donc la ſomme des deux nombres cherchés eſt $\frac{rs\times\overline{p+q}^2}{pqss}$.

En troiſiéme lieu, le plus grand nombre $\frac{pr+qr}{qs}$ multiplié par le plus petit $\frac{pr+qr}{ps}$, donne pour produit $\frac{rr\times\overline{p+q}^2}{pqss}$.

Donc, en quatriéme lieu, le produit des deux nombres cherchés eſt à leur ſomme comme $\frac{rr\times\overline{p+q}^2}{pqss}$ eſt à $\frac{rs\times\overline{p+q}^2}{pqss}$ c'eſt-à-dire, comme rr eſt à rs, ou comme r à s. *C. Q. F. D.*

PROBLEME 16. (Voyez Art. 63.)

150. *Quelqu'un tire une certaine quantité de vin d'une piéce pleine, qui contenoit le nombre de pintes* a; *ayant rempli enſuite la piéce d'eau, il tire de ce mêlange de vin & d'eau autant qu'il avoit tiré de vin pur la premiére fois: la même choſe ayant été faite juſqu'à quatre fois, de ſorte qu'il ne reſte de vin pur dans la piéce que le nombre de pintes* b, *on demande combien de pintes ont été tirées chaque fois.*

SOLUTION.

Appellez x le nombre de pintes qui reſte dans la piéce après chaque fois qu'on en a tiré une certaine quantité, qui a toujours été la même; cela étant, il eſt manifeſte, qu'après chaque évacuation, la quantité totale de liqueur dans la piéce, ſoit vin pur ou mélange de vin & d'eau, doit être diminuée en raiſon de a à x; donc le vin doit être diminué en cette raiſon, dans la ſuppoſition que la piéce n'ait pas été remplie de nouveau; ce qui nous donne les proportions ſuivantes. 1°. Comme a eſt à x, ainſi x quantité de vin pur qu'il y a eu dans la piéce après la premiére éva-

cuation, à $\frac{xx}{a}$, vin qu'il y a eu dans la piéce après la ſeconde évacuation; 2°. comme a eſt à x, ainſi $\frac{xx}{a}$, vin qu'il y a eu dans la piéce après la ſeconde évacuation, à $\frac{x^3}{a^2}$, vin qui eſt reſté après la troiſiéme évacuation; enfin, comme a eſt à x, ainſi $\frac{x^3}{a^2}$, vin qui eſt reſté après la troiſiéme évacuation, à $\frac{x^4}{a^3}$, vin qui eſt reſté après la quatriéme évacuation; mais ſuivant le Problême, le vin qu'il y a eu après la quatriéme évacuation étoit b; donc $\frac{x^4}{a^3}=b$; donc $x^4=a^3b=a^4\times\frac{b}{a}$; faites $\frac{b}{a}=s^4$, & vous aurez $x^4=a^4s^4$, & x (ou la quantité de liqueur qu'il y a eu dans la piéce après chaque évacuation) $=as$; donc $a-x$, (ou la quantité priſe chaque fois) ſera $a-as=a\times\overline{1-s}$.

Exemple.

Suppoſons que la piéce tienne 81 pintes, & qu'il reſtoit 16 pintes de vin pur après la quatriéme évacuation; cela étant nous aurons $a=81$, $b=16$, $\frac{b}{a}$ ou $s^4=\frac{16}{81}$ $ss=\frac{4}{9}$, $s=\frac{2}{3}$, $1-s=\frac{1}{3}$, $a\times\overline{1-s}=81\times\frac{1}{3}=27$; donc chaque évacuation a été de 27 pintes.

Demonstation.

Puiſque le vin a été diminué dans la piéce à chaque évacuation en raiſon de a à x, c'eſt-à-dire, en raiſon de a à as, ou de 1 à s, il s'enſuit, que comme 1 eſt à s, ainſi x ou as, vin qui eſt reſté après la premiére évacuation, eſt à ass, vin qui eſt reſté après la ſeconde évacuation; & par la même raiſon, comme 1 eſt à s, ainſi as^2 eſt à as^3, vin qui eſt reſté après la troiſiéme évacuation; & enfin, comme 1 à s, ainſi as^3 eſt à as^4, vin qui eſt reſté après la derniére évacuation; mais $as^4=a\times\frac{b}{a}$ par la ſuppoſition, $=b$; donc la quantité de vin pur qui reſtoit dans la piéce après la quatriéme évacuation étoit b. *C. Q. F. D.*

N. B. Comme il n'y a que fort peu de nombres, dont on puiſſe tirer exactement la racine quarrée, il y en a bien moins encore dont on puiſſe extraire les racines d'un genre plus élevé; mais dans la ſuite de cet Ouvrage, je dirai comment il faut s'y prendre pour extraire toutes les racines avec une égale facilité, & généralement parlant avec autant d'exactitude qu'il eſt néceſſaire, ſavoir, par le moyen d'une table complette de Logarithmes.

Pro-

PROBLEME 17.

151. *On demande deux nombres tels, que le produit de leur multiplication ſoit* p, *& le quotient de la diviſion du plus grand par le plus petit* q.

SOLUTION.

Nommez le plus grand nombre x, & par conſéquent le plus petit $\frac{p}{x}$; cela étant le quotient du plus grand diviſé par le plus petit ſera $\frac{xx}{p}$; mais ſuivant le problême, ce quotient doit être q; donc $\frac{xx}{p}=q$, & $xx=pq$, & x, (le plus grand nombre cherché) $=\sqrt{pq}$: de plus, puiſque $xx=pq$, nous avons $\frac{pp}{xx}=\frac{pp}{pq}=\frac{p}{q}$; & $\frac{p}{x}$ (ou le plus petit nombre cherché) $=\sqrt{\frac{p}{q}}$; ſi bien que le plus grand des deux nombres cherchés eſt $\sqrt{pq}$, & le plus petit $\sqrt{\frac{p}{q}}$.

EXEMPLE.

Que le produit des deux nombres cherchés ſoit 144, & le quotient du plus grand diviſé par le plus petit égal à 16; nous aurons $p=144$, $q=16$, $pq=144\times 16$, $\sqrt{pq}=12\times 4=48$; $\frac{p}{q}=\frac{144}{16}$, $\sqrt{\frac{p}{q}}=\frac{12}{4}=3$; donc les nombres ſont $48+3$.

DEMONSTRATION.

1°. pq multiplié par $\frac{p}{q}$ donne $\frac{ppq}{q}=pp$; donc $\sqrt{pq}$ multipliée par $\sqrt{\frac{p}{q}}$ donne p.

2°. pq étant diviſé par $\frac{p}{q}$, donne pour quotient $\frac{pqq}{p}=qq$; donc $\sqrt{pq}$ diviſée par $\sqrt{\frac{p}{q}}$ donne q. C. Q. F. D.

PROBLEME 18.

152. *Soient* x *&* y *deux quantités inconnues*, & a, b, c, d, e, f, *autant de quantités connues: on demande les valeurs de* x *&* y *par le moyen des deux équations ſuivantes, ſavoir*, $ax+by=c$, & $dx+ey=f$.

SOLUTION.

1ére, Equation $ax+by=c$.

2de, Equation $dx+ey=f$. Multipliez la premiére équation par d, & vous aurez $adx+bdy=cd$; multipliez la ſeconde équation par a, & vous aurez $adx+aey=af$; retranchez la premiére de ces deux nouvelles équations de la ſeconde, & vous aurez

3éme, Eq. $\overline{ae-bd}\times y=af-cd$; par conſéquent

4éme, Eq. $y=\frac{af-cd}{ae-bd}$

Donc $by=\frac{abf-bed}{ae-bd}$; ſubſtituez cette valeur à la place de by dans la premiére équation, & vous aurez $ax+\frac{abf-bed}{ae-bd}=c$, multipliez l'un & l'autre membre par $\overline{ae-bd}$, & vous aurez $\overline{aae-abd}\times x+abf-bcd=ace-bcd$; retranchez $-bcd$ des deux membres de l'équation, & il reſtera $\overline{aae-abd}\times x+abf=ace$; diviſez le tout par a, & il viendra $\overline{ae-bd}\times x+bf=ce$; donc $\overline{ae-bd}\times x=ce-bf$; donc $x=\frac{ce-bf}{ae-bd}$; $y=\frac{af-cd}{ae-bd}$.

J'ai ſuivi la méthode ordinaire pour déterminer la valeur de x; mais après avoir déterminé celle de y, j'aurois pu découvrir plus facilement & plus promtement ce que valoit x: ſuppoſons que les deux équations fondamentales ayent été $bx+ay=c$, & $ex+dy=f$; on auroit pu en inférer, que x en ce cas auroit été déterminé préciſément comme y l'a été dans l'autre cas, & y ſera ici comme x étoit-là; ainſi en changeant a en b, & d en e, & réciproquement, on changera y en x; or l'expreſſion de y eſt $\frac{af-cd}{ae-bd}$; changez dans cette expreſſion a en b, & d en e, & réciproquement, & vous aurez $\frac{bf-ce}{bd-ae}=\frac{ce-bf}{ae-bd}=x$.

Il paroît par cet exemple, auquel il nous ſeroit facile d'en ajoûter pluſieurs autres, que de pareilles ſpéculations ſont quelquefois d'autant d'uſage dans le calcul, qu'amuſantes pour ceux qui ont du goût & du génie, quoique peut-être trop ſubtiles pour la plupart des commençans.

Pour mieux concevoir le ſens des expreſſions précédentes, il eſt bon de diſpoſer les quantités dans l'ordre que voici:

a	d
c	f
b	e

Pre-

Premièrement placez a *&* d, *les deux coëfficiens de* x, *l'un après l'autre dans le même ordre où ils ſe trouvent dans les deux équations fondamentales; placez au-deſſous de ces quantités, & dans le même ordre* c *&* f, *les deux termes abſolus; & enfin ſous ces termes placez* b *&* e, *les deux coëfficiens de* y; *cela étant fait, multipliez en croix* a *par* f, *&* d *par* c, *& vous aurez* af−cd *pour numérateur de la valeur de* y; *multipliez enſuite* c *par* e *&* f *par* b *&* ce−bf *ſera le numérateur de la valeur de* x; *enfin multipliez* a *par* e *&* d *par* b, *&* ae−bd *ſera le dénominateur commun des deux numérateurs que nous venons d'indiquer; de ſorte que les coëfficiens de* x *entrent dans le numérateur de* y, *ceux de* y *dans le numérateur de* x, *& tant les uns que les autres dans le dénominateur commun.*

EXEMPLE.

On demande les valeurs de x & de y au moyen des deux équations ſuivantes; $3x-4y=6$, &
$5x-6y=14$.

Les termes étant diſpoſés ſuivant la méthode précédente, ſeront

3	5
6	14
−4	−6

Je commence mon opération en multipliant $3\times14=42$; puis $5\times6=30$; & après avoir ſouſtrait ce dernier produit du premier, il me reſte 12 pour numérateur de y: enſuite je multiplie $6\times-6=-36$, & $14\times-4=-56$; ce dernier produit retranché de l'autre laiſſe $+20$ pour numérateur de x; enfin je multiplie $3\times-6=-18$ & $5\times-4=-20$; & ce dernier produit retranché de l'autre laiſſe $+2$ pour dénominateur commun de x & de y; ſi bien que nous avons $x=\frac{20}{2}$ ou 10, & $y=\frac{12}{2}$ ou 6; & ces nombres ſatisfont aux conditions du problême.

N. B. S'il manquoit quelqu'un des termes ax, by, dx, ey, les coëfficiens doivent être remplacés par des zéros; par exemple, ſi ax manquoit, il faudroit ſuppoſer a égal à o.

LA DEMONSTRATION GENERALE.

1. Puiſque $x=\frac{ce-bf}{ae-bd}$, & $y=\frac{af-cd}{ae-bd}$ nous aurons $ax=\frac{ace-abf}{ae-bd}$, & $by=\frac{abf-bcd}{ae-bd}$; donc $ax+by=\frac{ace-bcd}{ae-bd}=c$.

2. $dx = \frac{cde-bdf}{ae-bd}$, & $ey = \frac{aef-cde}{ae-bd}$; donc $dx+ey = \frac{aef-bdf}{ae-bd} = f$.
C. Q. F. D.

PROBLEME 19.

153. *Deux perſonnes* A & B *parloient de leur argent.* A *dit à* B, *donnez-moi* q *de votre argent, & j'aurai alors* r *fois autant qu'il vous en reſtera.* B *dit à* A, *donnez-moi* q *de votre argent, & j'aurai alors* s *fois autant qu'il vous en reſtera: on demande l'argent que chacun d'eux avoit.*

SOLUTION.

Nommez l'argent de *A* & de *B* x & y reſpectivement, & les équations fondamentales ſeront

$$x+q = ry-qr, \text{ \&}$$
$$y+q = sx-qs.$$

Après avoir réduit ces équations à la formule du dernier problême, nous aurons

$$x-ry = -q-qr, \text{ \&}$$
$$sx-y = +q+qs.$$

Diſpoſez les coëfficiens & les termes abſolus comme dans le dernier problême, & vous aurez

1	s
$-q-qr$	$+q+qs$
$-r$	-1

Faites la premiére multiplication preſcrite, & il viendra $1 \times \overline{q+qs} = \overline{q+qs}$, & $s \times -\overline{q-qr} = -\overline{qs-qrs}$; retranchez le dernier produit du premier, & vous aurez $q+2qs+qrs$ pour numérateur de l'inconnue y; faites la ſeconde multiplication, & vous aurez $-\overline{q-qr} \times -1 = +q+qr$, & $\overline{q+qs} \times -r = -qr-qrs$; retranchez ce dernier produit du premier, & il reſtera $q+2qr+qrs$ pour numérateur de x; enfin faites la derniére multiplication, & il en naîtra $1 \times -1 = -1$, & $s \times -r = -rs$; retranchez ce dernier produit du premier, & vous aurez $rs-1$ pour dénominateur commun; donc x (ou l'argent de A,) étoit $\frac{q+2qr+qrs}{rs-1}$; & y (ou l'argent de B) étoit $\frac{q+2qs+qrs}{rs-1}$.

Si l'on prend q égal à $rs-1$, il détruira le dénominateur, & la ſolution ſe trouvera en nombres entiers, de la maniére ſuivante; l'argent de A ſera $1+2r+rs$, & celui de B ſera $1+2s+rs$; comme par exemple, ſoit $r=3$, & $s=7$; cela étant on aura $rs-1=20$; ſuppoſez $q=20$, &

& le problême pourra être énoncé en ces termes. *A* dit à *B*, donnez-moi vingt ſchellings de votre argent, & j'aurai alors trois fois plus d'argent qu'il ne vous en reſtera. *B* dit à *A*, donnez-moi vingt ſchellings de votre argent, & j'aurai alors ſept fois plus d'argent qu'il ne vous en reſtera: c'eſt ce qui eſt vrai auſſi; car l'argent de *A* eſt $1+2r+rs=28$ ſchellings, & celui de *B*, ou $1+2s+rs=36$ ſchellings.

N. B. Si *A*, après avoir reçu q de l'argent de *B*, avoit une ſomme égale à ce qui reſtoit à *B*, r devroit en ce cas être fait égal à 1.

La Demonstration Generale.

1°. Si à l'argent de *A*, ſavoir, $\frac{q+2qr+qrs}{rs-1}$, on ajoûte q, la ſomme ſera $\frac{2qr+2qrs}{rs-1}$; & ſi de l'argent de *B*, ſavoir, $\frac{q+2qs+qrs}{rs-1}$, on ſouſtrait q, le reſte ſera $\frac{2q+2qs}{rs-1}$: ſomme qu'il ne faut ſimplement que multiplier par r pour la rendre égale à la ſomme de *A* après qu'on y a ajoûté q: ainſi on a ſatisfait à la premiére condition du problême.

2°. Si à l'argent de *B* on ajoûte q, la ſomme ſe trouvera être $\frac{2qs+2qrs}{rs-1}$; & ſi de l'argent de *A* on ſouſtrait q, le reſte ſera $\frac{2q+2qr}{rs-1}$, ſomme qu'il ſuffit de multiplier par s, pour la rendre égale à la ſomme de *B* augmentée de la quantité q; donc on a pareillement ſatisfait à la ſeconde condition du problême. *C. Q. F.* D.

Probleme 20. (Voyez Art. 81.)

154. *On demande deux nombres* x *&* y, *qui ſoient tels, que ſi on les multiplie l'un & l'autre par* r, *le premier produit ſoit un quarré, & le ſecond le côté ou la racine de ce quarré; mais que ſi on multiplie l'un & l'autre par* s, *le premier produit ſoit un cube, & le ſecond la racine de ce cube.*

Solution.

Les nombres x & y étant multipliés ſéparément par r, donneront rx & ry, dont le premier doit être le quarré de l'autre; ce qui nous fournit cette équation $rx=r^2y^2$ & $x=ry^2$: de plus, x & y multipliés ſéparément par s donneront sx & sy, dont le premier doit être le cube de l'autre; d'où nous déduiſons cette équation $sx=s^3y^3$, & $x=s^2y^3$; donc $s^3y^3=ry^2$, chacune de ces grandeurs en particulier étant $=x$; diviſez les deux membres par

y^2;

y^2, & vous aurez $s^2y=r$, & $y=\frac{r}{ss}$; mais si $y=\frac{r}{ss}$, $y^2=\frac{r^2}{s^4}$, & ry^2 ou $x=\frac{r^3}{s^4}$; donc les nombres ſont $x=\frac{r^3}{s^4}$ & $y=\frac{r}{s^2}$.

DEMONSTRATION.

Si les nombres $\frac{r^3}{s^4}$, & $\frac{r}{s^2}$ ſont multipliés l'un & l'autre par r, leurs produits ſeront $\frac{r^4}{s^4}$ & $\frac{r^2}{s^2}$, dont le premier eſt un quarré, & le dernier la racine de ce quarré; & ſi les mêmes nombres $\frac{r^3}{s^4}$ & $\frac{r}{s^2}$ ſont multipliés par s, les produits ſeront $\frac{r^3}{s^3}$ & $\frac{r}{s}$, dont le premier eſt un cube, & le dernier la racine de ce cube. *C. Q. F. D.*

PROBLEME 21. (Voyez Art. 130.)

155. *On demande deux nombres, dont la différence multipliée par la différence de leurs quarrés faſſe* a, *& dont la ſomme multipliée par la ſomme de leurs quarrés faſſe* b.

SOLUTION.

Pour les deux nombres cherchés mettez x & y; cela étant fait, ſuivant la premiére ſuppoſition, $\overline{x-y}\times\overline{x^2-y^2}$, ou $\overline{x-y}\times\overline{x-y}\times\overline{x+y}$, ou $\overline{xx-2xy+y^2}\times\overline{x+y}=a$; donc

1ére Eq. $x^2-2xy+y^2=\frac{a}{x+y}$.

En vertu de la ſeconde ſuppoſition, $\overline{x+y}\times\overline{x^2+y^2}=b$; donc

2de Eq. $x^2+y^2=\frac{b}{x+y}$.

De deux fois la ſeconde équation, retranchez la premiére,

c'eſt-à-dire, de	$2x^2$	$+2y^2=\frac{2b}{x+y}$
retranchez	$x^2-2xy+y^2=$	$\frac{a}{x+y}$
& il reſtera	$x^2+2xy+y^2=$	$\frac{2b-a}{x+y}$

c'eſt-à-dire $\overline{x+y}^2=\frac{2b-a}{x+y}$; donc $\overline{x+y}^3=2b-a$; faites $2b-a=r^3$, c'eſt-à-dire, mettez r pour la racine cubique de $2b-a$, & vous aurez

3éme Eq. $x+y=r$.

Dans la premiére équation nous avions $x^2-2xy+y^2=\frac{a}{x+y}=\frac{a}{r}$, c'eſt-à-dire,

à-dire, $\overline{x-y}^2=\frac{a}{r}$; faites $\frac{a}{r}=ss$, c'eſt-à-dire, mettez s pour la racine quarrée de $\frac{a}{r}$, & vous aurez

4ére. Eq. $x-y=s$.

Ajoûtez la troiſiéme équation & la quatriéme enſemble, & vous aurez $2x=r+s$, & $x=\frac{r+s}{2}$; retranchez la quatriéme équation de la troiſiéme, & vous aurez $2y=r-s$, & $y=\frac{r-s}{2}$; ce qui nous fournit la règle ſuivante:

Faites $2b-a=r^2$, & $\frac{a}{r}=s^2$, *& les nombres cherchés ſeront* $\frac{r+s}{2}$ *&* $\frac{r-s}{2}$.

DEMONSTRATION.

La différence des nombres $\frac{r+s}{2}$ & $\frac{r-s}{2}$ eſt s, & la différence de leurs quarrés eſt rs, comme on peut aiſément s'en convaincre par le calcul; donc la différence des nombres multipliée par la différence de leurs quarrés eſt $rss=\frac{ra}{r}=a$: de plus, la ſomme des nombres $\frac{r+s}{2}$ & $\frac{r-s}{2}$ eſt r, & la ſomme de leurs quarrés eſt $\frac{r^2+s^2}{2}$; donc la ſomme des nombres multipliée par la ſomme de leurs quarrés eſt $\frac{r^3+rss}{2}$; mais par la règle indiquée ci-deſſus $r^2=2b-a$, & par la même règle $rss=a$; donc la ſomme des nombres multipliée par la ſomme de leurs quarrés eſt $\frac{2b-a+a}{2}=b$. *C. Q. F. D.*

PROBLEME 22.

156. *Que d'un jeu ordinaire de cinquante-deux cartes on faſſe pluſieurs monceaux de la manière ſuivante: que ſur la carte la plus baſſe de chaque monceau, on en mette autant d'autres qu'il eſt néceſſaire pour arriver au nombre de douze; comme ſi la valeur de la carte la plus baſſe étoit un quatre, il faudroit mettre par deſſus huit autres cartes; ſi c'étoit un cinq, il faudroit en mettre ſept; ſi c'étoit* a, *douze* $-a$, *&c. On demande, le nombre des monceaux, que nous appellerons* n, *étant donné, comme auſſi le nombre des cartes qui reſtent en main, que nous nommerons* r, *de trouver la ſomme des valeurs de toutes les cartes les plus baſſes.*

SOLUTION.

Que a, b, c, &c. expriment reſpectivement la valeur de chaque carte, qui eſt au-deſſous de toutes les autres dans les différens monceaux;

en ce cas $12-a$ désignera le nombre de toutes les cartes, qui sont au-dessus de la carte la plus basse du premier monceau, c'est-à-dire, le nombre de toutes les cartes du premier monceau, excepté la plus basse, sera $12-a$; donc $13-a$ sera le nombre de toutes les cartes dans le premier monceau; par la même raison, $13-b$ exprimera le nombre de toutes les cartes dans le second monceau, & $13-c$ celles du troisiéme monceau, &c. ainsi le nombre de toutes les cartes dans tous les monceaux sera $13\times n-a-b-c$ &c. faites $a+b+c$ &c. (ou la somme des valeurs de toutes les cartes qui sont les plus basses dans chaque monceau) $=x$, & vous aurez le nombre de toutes les cartes mises en monceaux $=13n-x$; mais ces nombres, avec r, qui marque combien il reste encore de cartes en main, sont égaux à 52; ainsi nous avons cette équation, $13n-x+r=52$; donc $x+52=13n+r$; donc $x=13n-52+r$; mais $52=13\times 4$; donc $13n-52=13\times n-4$; donc $x=13\times n-4+r$; ce qui veut dire en langage ordinaire: *Du nombre des monceaux retranchez quatre, multipliez le reste par treize; & ce produit, ajoûté au nombre des cartes qui restent encore en main, donnera la somme des valeurs de toutes les cartes les plus basses:* par exemple, qu'il y ait trois monceaux, & trente cartes de reste; retranchant 4 de 3, il restera -1; ce nombre multiplie par 13 fait -13, & ce produit ajoûté à 30, nombre des cartes qui restent en main, donne 17 pour somme des valeurs de toutes les cartes les plus basses.

Voici un théorême plus général.

Soit n *le nombre des monceaux*, p *celui des cartes dans un jeu; qu'on mette autant de cartes au-dessus de la plus basse carte de chaque monceau qu'il en faut pour rendre le nombre égal à* q; *& enfin, soit* r *le nombre des cartes qui restent en main; & la somme des valeurs de toutes les cartes les plus basses se trouvera être* $\overline{q+1}\times n+\overline{r-p}$.

PROBLEME 23.

157. *On demande les valeurs des trois quantités inconnues* x, y *&* z *au moyen de trois équations telles que* $px+qy+rz=s$, *où les quantités représentées par* p, q, r, *sont toutes supposées connues.*

N. B. Comme j'ai déjà été assez prolixe dans mon problême 18, j'épargnerai au Lecteur la peine que pourroit lui donner le théorême suivant, & me contenterai de lui en faciliter la solution, s'il juge à propos de l'entreprendre. Donnons-lui d'abord le théorême, qui est:

SOLU-

SOLUTION.

Premiérement placez les trois coëfficiens de x *l'un après l'autre comme ils ſont dans les trois équations, coëfficiens que nous appellerons* a, b, c; *au-deſſous d'eux mettez les trois termes abſolus,* d, e, f; *ſous ces derniers mettez les coëfficiens de* z, *ſavoir,* g, h, k; *& ſous eux les coëfficiens de* y, *ſavoir,* l, m, n: *il faut de ces quatre ſéries en déduire deux autres, ſavoir,* α, β, γ, *&* δ, ι, ζ; *& de ces deux derniéres une troiſiéme, ſavoir,* $\eta, \theta, \varkappa$: *tous ces termes doivent être rangés comme ils le ſont dans la figure ci-jointe* †; *& pour avoir les termes des trois derniéres ſéries, il faut ſe ſervir de la multiplication en croix, dont il a été parlé ci-deſſus, & faire* $ae-bd=\alpha$, $ah-bg=\beta$, $am-bl=\gamma$; *faites auſſi* $bf-ce=\delta$, $bk-ch=\iota$, *&* $bn-cm=\zeta$; *enfin, faites* $\alpha\iota-\delta\beta=\eta$, $\alpha\zeta-\delta\gamma=\theta$, *&* $\beta\zeta-\iota\gamma=\varkappa$, *& cette derniére ſuite* $\eta, \theta, \varkappa$ *réſoudra le problême; car* y *ſera* $\frac{-\eta}{\varkappa}$, *&* z *ſera* $\frac{+\theta}{\varkappa}$: *ainſi il ſera facile d'avoir* x *par quelqu'une des trois équations fondamentales, ſi on ſubſtitue à la place de* y *&* z *leurs valeurs trouvées ici.*

†

a	b	c
d	e	f
g	h	k
l	m	n
	α $\quad$ δ	
	β $\quad$ ι	
	γ $\quad$ ζ	
	η	
	θ	
	$\varkappa$	

Celui qui voudra ſe mettre bien au fait de ce théorême, fera bien de ſuivre la méthode preſcrite dans le 18ème problême; car ſi $px+qy+rz=s$, nous aurons $px+qy=s-rz$; où la quantité $s-rz$ doit être conſidérée comme le terme abſolu: ceci poſé, s'il fait uſage des coëfficiens contenus dans les séries décrites ci-deſſus, & qu'il applique la méthode du 18ème problême aux deux premiéres équations, il trouvera la valeur de y, après qu'elle aura été réduite à l'expreſſion la plus ſimple, $=\frac{\varkappa-\beta z}{\gamma}$; & s'il applique la même méthode à la ſeconde équation & à la troiſiéme, il trouvera $y=\frac{\delta-\iota z}{\zeta}$; ainſi il aura cette nouvelle équation, $\frac{\varkappa-\beta z}{\gamma}=\frac{\delta-\iota z}{\zeta}$; qui lui donnera, quand il l'aura réſolue, $z=\frac{\theta}{\eta}$; & s'il conſidére comment les termes α, β, γ, &c. ont été obtenus, il tombera naturellement dans la méthode décrite ci-deſſus; enfin, quand à l'aide de ce théorême il aura déterminé la valeur de z, il déterminera

auſſi aiſément la valeur de y, ſavoir, en mettant les coëfficiens de y à la place de ceux de z, & réciproquement.

N. B. Dans le deſſein où je ſuis de donner préſentement quelques exemples de la ſolution de divers problêmes généraux qui produiſent des équations du ſecond degré, j'avertirai le Lecteur une fois pour toutes, que quand j'aurai à exprimer la racine quarrée d'une quantité qui n'eſt point un quarré, pour éviter les racines ſourdes, je me ſervirai la plupart du tems de la lettre s, mettant s^2 pour le nombre dont la racine quarrée eſt ſignifiée par s: par exemple, ſi je devois exprimer la racine quarrée de $\frac{aa-1b}{4}$, comme le dénominateur 4 eſt un nombre quarré, je ne le comprends point dans la valeur de s^2, & ſubſtitue ſimplement s^2 à la place de $aa-4b$; ainſi $\frac{aa-4b}{4}=\frac{s^2}{4}$, & la racine quarrée de cette fraction ſera $\frac{s}{2}$; ſi je devois exprimer la racine quarrée de $\frac{4b-a^2}{12a}$, comme ni le numérateur ni le dénominateur ne ſont des nombres quarrés, je pourrois déſigner la fraction entiére par ss; mais conſidérant que $\frac{4b-a^2}{12a}$ eſt le produit de $\frac{1}{3}$ multiplié par $\frac{4b-a^2}{3a}$, & que la premiére de ces fractions eſt un quarré, ce que l'autre n'eſt pas, j'aime mieux mettre ss pour le multiplicateur $\frac{4b-a^2}{3a}$, & rendre ainſi $\frac{4b-a^2}{12a}=\frac{ss}{4}$.

J'avertis de plus, que je réſoudrai toutes les équations ſuivantes à la façon ordinaire, ſans avoir recours au théorême général de l'Art. 103.

PROBLEME 24. (Voyez Art. 111.)

158. *On demande deux nombres tels, que leur ſomme ſoit* a, *& le produit de leur multiplication* b.

SOLUTION.

Les deux nombres cherchés x & $a-x$.

Le produit de leur multiplication, $ax-xx=b$; en changeant tous les ſignes, $xx-ax=-b$, & rendant le quarré complet, $xx-ax+\frac{aa}{4}=\frac{aa}{4}-b=\frac{aa-4b}{4}=\frac{ss}{4}$; tirez la racine quarrée des deux membres, c'eſt-à-dire, de $x^2-ax+\frac{aa}{4}$ d'un côté, & de $\frac{ss}{4}$ de l'autre, & vous aurez $x-\frac{a}{2}=\pm\frac{s}{2}$, & $x=\frac{a\pm s}{2}$; d'où l'on peut déduire la règle ſuivante:

Faites

Faites $aa-4b=ss$, *& le plus grand nombre ſera* $\frac{a+s}{2}$, *& le plus petit* $\frac{a-s}{2}$.

LA DEMONSTRATION SYNTHETIQUE.

1°. $\frac{a+s}{2}$ ajoûté à $\frac{a-s}{2}$ donne $\frac{2a}{2}$ ou a.

2°. $\frac{a+s}{2}$ multiplié par $\frac{a-s}{2}$ donne $\frac{aa-ss}{4}$ = (par la ſubſtitution de $-aa+4b$ au lieu de $-ss$) $\frac{aa-aa+4b}{4}=\frac{4b}{4}=b$. *C. Q. F. D.*

Exemple pour la règle précédente.

On demande deux nombres tels, que leur ſomme ſoit 25 & le produit de leur multiplication 144. Ici $a=25$, $b=144$, $aa-4b$ ou $ss=49$, $s=7$, $\frac{a+s}{2}=16$, $\frac{a-s}{2}=9$; ainſi les nombres ſont 9 & 16.

PROBLEME 25. (Voyez Art. 113.)

159. *On demande deux nombres, dont la ſomme ſoit* a, *& la ſomme de leurs quarrés* b.

SOLUTION.

Les deux nombres cherchés x & $a-x$.
Le quarré du premier xx.
Le quarré du dernier, $aa-2ax+xx$.
La ſomme de leurs quarrés $aa-2ax+2xx=b$; donc $2xx-2ax=b-aa$, & $xx-ax=\frac{b-aa}{2}$ & $xx-ax+\frac{aa}{4}=\frac{aa}{4}+\frac{b-aa}{2}=\frac{2b-aa}{4}=\frac{ss}{4}$; tirez la racine quarrée de l'un & l'autre membre, c'eſt-à-dire de $xx-ax+\frac{aa}{4}$ d'un côté & de $\frac{ss}{4}$ de l'autre, & vous aurez $x-\frac{a}{2}=\pm\frac{s}{2}$, & $x=\frac{a\pm s}{2}$, d'où l'on peut déduire la règle ſuivante:

Faites $2b-aa=ss$, *& vous aurez* $\frac{a+s}{2}$ *pour le plus grand nombre, &* $\frac{a-s}{2}$ *pour le plus petit.*

DEMONSTRATION.

1°. $\frac{a+s}{2}$ ajoûté à $\frac{a-s}{2}$ donne a.

2°. Le quarré de $\frac{a+s}{2}$ eſt $\frac{aa+2as+ss}{4}$ le quarré de $\frac{a-s}{2}$ eſt $\frac{aa-2as+ss}{4}$

$\frac{aa-2as+ss}{4}$; & par conſéquent la ſomme de leurs quarrés eſt $\frac{2aa+2ss}{4}=\frac{aa+ss}{2}$ = (par la règle) $\frac{aa+2b-aa}{2}=b$. *C. Q. F. D.*

Exemple pour la règle précédente.

On demande deux nombres dont la ſomme faſſe 28, & la ſomme de leurs quarrés 400. Ici $a=28$, $b=400$, $2b-aa$ ou $ss=16$, $s=4$, $\frac{a+s}{2}=16$, $\frac{a-s}{2}=12$; ainſi les nombres ſont 12 & 16.

PROBLEME 26. (Voyez Art. 114.)

160. *On demande deux nombres, dont la ſomme ſoit* a, *& la ſomme de leurs cubes* b.

SOLUTION.

Les deux nombres cherchés, x & $a-x$.
Le cube du premier, x^3.
Le cube du dernier, $a^3-3a^2x+3ax^2-x^3$.
La ſomme de leurs cubes $a^3-3a^2x+3ax^2=b$; donc $3ax^2-3a^2x=b-a^3$; diviſez toute l'équation par $3a$, & vous aurez $xx-ax=\frac{b-a^3}{3a}$, & $xx-ax+\frac{aa}{4}=\frac{aa}{4}+\frac{b-a^3}{3a}=\frac{4b-a^3}{12a}=\frac{1}{4}\times\frac{4b-a^3}{3a}=\frac{ss}{4}$; tirez la racine quarrée des deux membres, c'eſt-à-dire, de $xx-ax+\frac{aa}{4}$ d'un côté, & $\frac{ss}{4}$ de l'autre, & vous aurez $x-\frac{a}{2}=\pm\frac{s}{2}$ & $x=\frac{a\pm s}{2}$; ce qui nous donne la règle ſuivante:

Faites $\frac{4b-a^3}{3a}=ss$, *& vous aurez* $\frac{a+s}{2}$ *pour le plus grand nombre & &* $\frac{a-s}{2}$ *pour le plus petit.*

DEMONSTRATION.

1°. $\frac{a+s}{2}$ ajoûté à $\frac{a-s}{2}$ fait a.

2°. Le cube de $\frac{a+s}{2}$ eſt $\frac{a^3+3a^2s+3as^2+s^3}{8}$, & le cube de $\frac{a-s}{2}$ eſt $\frac{a^3-3a^2s+3as^2-s^3}{8}$; donc la ſomme des cubes eſt $\frac{2a^3+6as^2}{8}=\frac{a^3+3ass}{4}=\frac{a^3+4b-a^3}{4}$ par la règle, $=b$. *C. Q. F. D.*

Exem-

Exemple pour la règle précédente.

On demande deux nombres, dont la ſomme ſoit 7, & la ſomme de leurs cubes 133. Ici $a=7, b=133, \frac{4b-a^3}{3a}$ ou $ss=9$, $s=3$, $\frac{a+s}{2}=5$, $\frac{a-s}{2}=2$; ainſi les nombres ſont 5 & 2.

PROBLEME 27.

161. *On demande deux nombres, qui ayent pour différence* d, *& qui, s'ils diviſent l'un & l'autre le nombre donné* a, *produiſent deux quotiens dont la différence ſoit* b.

SOLUTION.

Les deux nombres cherchés, x & $x+d$.

Les deux quotiens $\frac{a}{x}$ & $\frac{a}{x+d}$.

La différence de ces quotiens $\frac{a}{x}-\frac{a}{x+d}=\frac{ad}{xx+dx}=b$; donc $bxx+bdx=ad$; & $xx+dx=\frac{ad}{b}$; donc $xx+dx+\frac{dd}{4}=\frac{ad}{b}+\frac{dd}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{4ad}{b}+dd=\frac{ss}{4}$; tirez la racine quarrée de $xx+dx+\frac{dd}{4}$ d'un côté, & de $\frac{ss}{4}$ de l'autre, & vous aurez $x+\frac{d}{2}=\pm\frac{s}{2}$; donc $x=\frac{s-d}{2}$ ou $\frac{-s-d}{2}$; rejettez la racine négative, & il vous reſtera x (le plus petit diviſeur) $=\frac{s-d}{2}$, & $x+d$ (le plus grand diviſeur) $=\frac{s-d}{2}+\frac{d}{1}=\frac{s+d}{2}$; ce qui nous donne la règle ſuivante:

Faites $\frac{4ad}{b}+dd=ss$, *& vous aurez* $\frac{s+d}{2}$ *pour le plus grand diviſeur, &* $\frac{s-d}{2}$ *pour le plus petit.*

N. B. Il paroît manifeſtement que $\frac{s-d}{2}$ eſt une grandeur affirmative, puiſque $ss=\frac{4ad}{b}+dd$; donc ss eſt plus grand que dd, & s plus grand que d; donc $\frac{s-d}{2}$ eſt une quantité affirmative.

Démonſtration de la règle.

1°. Si l'on ſouſtrait le plus petit diviſeur $\frac{s-d}{2}$ du plus grand $\frac{s+d}{2}$, le reſte ſera d; donc la différence des diviſeurs eſt d.

2°. Si

2°. Si le devidende a eſt diviſé ſéparément par les deux diviſeurs $\frac{s-d}{2}$ & $\frac{s+d}{2}$, les deux quotiens ſeront $\frac{2a}{s-d}$ & $\frac{2a}{s+d}$ reſpectivement, dont le premier ſera le plus grand comme ayant un plus petit dénominateur; ainſi la différence des quotiens eſt $\frac{2a}{s-d}-\frac{2a}{s+d}=\frac{2as+2ad-2as+2ad}{ss-dd}$ $=\frac{4ad}{ss-dd}=\frac{4ad}{\frac{4ad}{b}}$ par la règle, $=b$. *C. Q. F. D.*

Exemple pour la règle précédente.

On demande deux diviſeurs dont la différence ſoit 1, & qui diviſant ſéparément un nombre donné tel que 144, produiſent deux quotiens dont la différence ſoit 2. Ici $a=144$, $b=2$, $d=1$, $\frac{4ad}{b}+dd$ ou $ss=289$, $s=17$, $\frac{s+d}{2}=9$, $\frac{s-d}{2}=8$; donc les diviſeurs ſont 8 & 9, & les quotiens 18 & 16.

SCHOLIE.

Si dans le dernier problême nous avions mis x pour la plus grande quantité, & $x-d$ pour la plus petite, l'équation auroit été $\frac{a}{x-d}-\frac{a}{x}=b$, ou $\frac{ad}{xx-dx}=b$, qui eſt différente de l'autre, & par conſéquent dans cette équation les deux racines ne ſeroient pas les nombres cherchés, mais les deux valeurs différentes de x, le plus petit de ces nombres.

PROBLEME 28. (Voyez Art. 118.)

162. *On demande un nombre, qui étant ajoûté à ſa racine quarrée faſſe* a.

SOLUTION.

Nommez le nombre cherché xx, & vous aurez cette équation, $xx+1x=a$; donc $xx+1x+\frac{1}{4}=a+\frac{1}{4}=\frac{4a+1}{4}=\frac{ss}{4}$ donc $x+\frac{1}{2}=\pm\frac{s}{2}$; & $x=\frac{s-1}{2}$ ou $\frac{-s-1}{2}$: En ſuppoſant $x=\frac{s-1}{2}$, on a $xx=\frac{ss-2s+1}{4}$; mais ſi la grandeur x étoit ſuppoſée égale à $\frac{-s-1}{2}$, on auroit $xx=\frac{ss+2s+1}{4}$; d'où ſe déduit la règle ſuivante.

Faites $4a+1=ss$, *& le nombre cherché ſera* $\frac{ss-2s+1}{4}$, *ou* $\frac{ss+2s+1}{4}$, *ſuivant que la racine quarrée ajoûtée ſera priſe affirmativement ou négativement.*

DE-

DEMONSTRATION.

1r. *Cas*, ſi au nombre $\frac{ss-2s+1}{4}$ on ajoûte la racine quarrée affirmative $\frac{s-1}{2}$, ou $\frac{2s-2}{4}$, la ſomme ſera $\frac{ss-1}{4}=a$, par la règle.

2d. *Cas*, ſi au nombre $\frac{ss+2s+1}{4}$ on ajoûte la racine quarrée négative $\frac{-s-1}{2}$ ou $\frac{-2s-2}{4}$, la ſomme ſera $\frac{ss-1}{4}=a$, comme il a été dit. C. Q. F. D.

PROBLEME 29. (Voyez Art. 129.)

163. *On demande trois nombres en proportion continue, dont la ſomme ſoit* a, *& la ſomme de leurs quarrés* ab.

Donc b (ou $\frac{ab}{a}$) eſt le quotient de la ſomme des quarrés diviſée par la ſomme des nombres: expreſſion dont il ſera bon de ſe ſouvenir, parce qu'elle facilite le calcul ſuivant.

SOLUTION.

Nommez les trois nombres cherchés x, y & z; comme ces nombres ſont en proportion continue, c'eſt-à-dire, que x eſt à y, comme y eſt à z, nous aurons $yy=xz$; de plus, puiſque par la ſuppoſition $x+y+z=a$, il faut que $a-y$ ſoit $=x+z$; & ſi on éléve les deux membres à la ſeconde puiſſance $a^2-2ay+yy=xx+2yz+zz$; retranchez y^2 d'un côté, & la quantité qui lui eſt égale xz de l'autre, & vous aurez $aa-2ay=xx+xz+zz=xx+yy+zz=ab$; puis donc que $aa-2ay=ab$, diviſez les deux membres de cette équation par a, & vous aurez $a-2y=b$, & y (le terme moyen) $=\frac{a-b}{2}$; retranchez cette grandeur de a, ſomme des trois nombres cherchés, & vous aurez $\frac{a+b}{2}$ pour la ſomme des extrêmes; nommez cette ſomme $2l$, & déſignons $\frac{a-b}{2}$, ou le terme moyen, par la lettre m; cela étant, comme x eſt un des extrêmes, $2l-x$ ſera l'autre, & le produit des extrêmes ſe trouvera être $2lx-xx=m^2$; par conſéquent $xx-2lx=-m^2$, & $xx-2lx+l^2=l^2-m^2=n^2$, & $x-l=\pm n$, & $x=l\pm n$; d'où l'on peut déduire la règle ſuivante.

Faites $\frac{a+b}{2}=2l$, $\frac{a-b}{2}=$ m, *&* l^2-m^2 n^2, *& les trois nombres cherchés ſeront* $l\pm n$, m *&* $l\mp n$.

DEMONSTRATION.

1°. Puiſque par la ſuppoſition $n^2 = l^2 - m^2$, nous avons $m^2 = l^2 - n^2 = \overline{l+n} \times \overline{l-n}$; donc les trois nombres $\overline{l+n}$, m, & $\overline{l-n}$ ſont en proportion continue, le quarré du terme moyen étant égal au rectangle des extrêmes; ce qui ſatisfait à la premiére condition du problême.

2°. Si l'on ajoûte enſemble les trois nombres $\overline{l+n}$, m, & $\overline{l-n}$, leur ſomme ſera $2l + m = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ par la règle $= a$; ce qui ſatisfait à la ſeconde condition: pareillement, ſi m ou $\frac{a-b}{2}$ eſt retranché de $2l$ ou de $\frac{a+b}{2}$, il reſtera $2l - m = b$.

3°. Le quarré de $\overline{l+n}$ eſt $l^2 + 2ln + n^2$, le quarré de m eſt m^2, & le quarré de $\overline{l-n}$ eſt $l^2 - 2ln + n^2$; ajoûtez enſemble ces trois quarrés, & leur ſomme ſera $2l^2 + m^2 + 2n^2 = 2l^2 + m^2 + 2l^2 - 2m^2$ par la règle, $= 4l^2 - m^2 = \overline{2l+m} \times \overline{2l-m} = ab$: donc toutes les conditions du problême ſe trouvent remplies. C. Q. F. D.

Exemple pour la règle précédente.

Que la ſomme des trois nombres ſoit 19, & celle de leurs quarrés 133; donc nous avons $a = 19$, $b = \frac{133}{19} = 7$, $\frac{a+b}{2}$ ou $2l = 13$, $l = \frac{13}{2}$, $\frac{a-b}{2}$, ou $m = 6$, $l^2 - m^2$ ou $n^2 = \frac{25}{4}$, $n = \frac{5}{2}$, $l + n = 9$, $l - n = 4$; donc les nombres cherchés ſont 9, 6 & 4, ou 4, 6 & 9.

PROBLEME 30.

164. *On demande quatre nombres en proportion continue, & tels que la ſomme des extrêmes ſoit* a, *& celle des termes moyens* b.

N. B. Nous avons expliqué ci-deſſus Art. 128. ce qu'il falloit entendre par quatre quantités en proportion continue

SOLUTION.

Pour les deux termes du milieu mettez x & y; en ce cas l'un des extrêmes ſe trouvera en diſant, comme y eſt à x ainſi x eſt à $\frac{xx}{y}$, & l'autre en diſant, comme x eſt à y ainſi y eſt à $\frac{yy}{x}$; les extrêmes ſont donc $\frac{xx}{y}$ & $\frac{yy}{x}$, & leur ſomme $\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{x} = \frac{x^3 + y^3}{xy}$; ainſi les équations fondamen-

damentales ſont, 1°. $x+y=b$, ou $x=b-y$; & 2°. $\frac{x^3+y^3}{xy}=a$, ou $x^3+y^3=axy$; au-lieu de x dans cette derniére équation mettez $b-y$, qui eſt ſa valeur dans la premiére équation, & vous aurez $x^3=b^3-3bby+3byy-y^3$, & $x^3+y^3=b^3-3bby+3byy$; vous aurez auſſi axy, ou $ay\times\overline{b-y}=aby-ayy$; ainſi les équations ſeront préſentement $3byy-3bby+b^3=aby-ayy$; tranſpoſez b^3, comme auſſi $aby-ayy$, & l'équation ſe trouvera être $\overline{ayy+3byy}-\overline{aby-3bby}=-b^3$, ou ainſi, $\overline{yy-by}\times\overline{a+3b}=-b^3$; par conſéquent $yy-by=\frac{-b^3}{a+3b}$, & $yy-by+\frac{bb}{4}=\frac{bb}{4}-\frac{b^3}{a+3b}=\frac{abb-b^3}{4a+12b}=\frac{bb}{4}\times\frac{a-b}{a+3b}=\frac{bb}{4}\times ss=\frac{bbss}{4}$; tirez la racine quarrée de $yy-by+\frac{bb}{4}$ d'un côté, & de $\frac{bbss}{4}$ de l'autre, & vous aurez $y-\frac{b}{2}=\pm\frac{bs}{2}$, & $y=\frac{b}{2}\pm\frac{bs}{2}=\frac{b}{2}\times\overline{1\pm s}$; & comme l'équation ſera la même, quel des deux termes moyens ſoit repréſenté par y, le plus grand ou le plus petit, nous avons la règle ſuivante:

Faites $\frac{a-b}{a+3b}=ss$, *& vous aurez* $\frac{b}{2}\times\overline{1+s}$ *pour le plus grand des deux termes moyens, &* $\frac{b}{2}\times\overline{1-s}$ *pour le plus petit.*

Les termes moyens étant ainſi trouvés à l'aide de la règle précédente, les extrêmes ſe déduiront aiſément de la nature de la proportion continue comme ci-deſſus, en diſant, *comme* $\frac{b}{2}\times\overline{1-s}$ *eſt à* $\frac{b}{2}\times\overline{1+s}$, *ou comme* $1-s$ *eſt à* $1+s$, *ainſi* $\frac{b}{2}\times\overline{1+s}$ *à* $\frac{b}{2}\times\overline{\frac{1+s}{1-s}}^2$; *donc* $\frac{b}{2}\times\overline{\frac{1+s}{1-s}}^2$ *eſt le plus grand extrême: & comme* $\frac{b}{2}\times\overline{1+s}$ *eſt à* $\frac{b}{2}\times\overline{1-s}$, *ou comme* $1+s$ *eſt à* $1-s$, *ainſi* $\frac{b}{2}\times\overline{1-s}$ *eſt à* $\frac{b}{2}+\overline{\frac{1-s}{1+s}}^2$; *donc* $\frac{b}{2}\times\overline{\frac{1-s}{1+s}}^2$ *eſt le plus petit des deux extrêmes; & les quatre nombres, en mettant le plus grand extrême le premier, ſeront rangés dans l'ordre ſuivant;* $\frac{b}{2}\times\overline{\frac{1+s}{1-s}}^2$, $\frac{b}{2}\times\overline{1+s}$, $\frac{b}{2}\times\overline{1-s}$ & $\frac{b}{2}\times\overline{\frac{1-s}{1+s}}^2$.

DEMONSTRATION.

Il eſt bien clair que ces quatre nombres doivent être en proportion continue: car c'eſt en conſéquence de cette ſuppoſition que les extrêmes

mes ont été trouvés; & il n'eſt pas moins clair que les deux termes moyens ajoûtés enſemble ſont égaux à b; car $\frac{b}{2} \times \overline{1+s} + \frac{b}{2} \times \overline{1-s} = \frac{b}{2} \times 2 = b$; donc il nous reſte ſimplement à prouver, que la ſomme des extrêmes eſt a: voyons pour cet effet ſi $\frac{b}{2} \times \frac{\overline{1+s}^2}{1-s} + \frac{b}{2} \times \frac{\overline{1-s}^2}{1+s} = a$, ou bien, diviſant l'équation par $\frac{b}{2}$, nous aurons $\frac{\overline{1+s}^2}{1-s} + \frac{\overline{1-s}^2}{1+s} = \frac{2a}{b}$: or $\frac{\overline{1+s}^2}{1-s}$ & $\frac{\overline{1-s}^2}{1+s}$ ajoûtés enſemble font $\frac{\overline{1+s}^3 + \overline{1-s}^3}{1-ss}$; mais $\overline{1+s}^3 = 1 + 3s + 3ss + s^3$, & $\overline{1-s}^3 = 1 - 3s + 3ss - s^3$; donc $\frac{\overline{1+s}^3 + \overline{1-s}^3}{1-ss} = \frac{2+6ss}{1-ss} = \frac{2a}{b}$: pour achever de réſoudre le problême, il faut examiner ſéparément le numérateur $2+6ss$, & le dénominateur $1-ss$. Suivant la règle indiquée ci-deſſus $ss = \frac{a-b}{a+3b}$; donc $6ss = \frac{6a-6b}{a+3b}$; donc $2+6ss$ ou le numérateur $= \frac{2}{1} + \frac{6a-6b}{a+3b} = \frac{8a}{a+3b}$: de plus $ss = \frac{a-b}{a+3b}$; par conſéquent $-ss = \frac{-a+b}{a+3b}$; & $1-ss$, ou le dénominateur eſt égal à $\frac{1}{1} \frac{-a+b}{a+3b} = \frac{4b}{a+3b}$; ainſi $\frac{2+6ss}{1-ss} =$ à une fraction dont le numérateur eſt $\frac{8a}{a+3b}$, & dont le dénominateur eſt $\frac{4b}{a+3b}$; mais une pareille fraction eſt égale à $\frac{8a}{4b}$ ou $\frac{2a}{b}$; donc $\frac{2+6ss}{1-ss}$, ou la ſomme des extrêmes après avoir été diviſée par $\frac{b}{2} = \frac{2a}{b}$; donc avant que cette diviſion fût faite, la ſomme des extrêmes étoit a. C. Q F. D.

Exemple pour la règle précédente.

Que la ſomme des extrêmes ſoit 27 & celle des termes moyens 18, & vous aurez $a = 27\ b = 18\ \frac{a-b}{a+3b}$ ou $ss = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$, $s = \frac{1}{3}$, $1+s = \frac{4}{3}$, $1-s = \frac{2}{3}$, $\frac{b}{2} \times \overline{1+s} = 12$, $\frac{b}{2} \times \overline{1-s} = 6$, ce qui donne pour les termes moyens 12 & 6; d'où il ſuit que les extrêmes ſont 24 & 3, & que les quatre nombres doivent être 24, 12, 6, 3, ou 3, 6, 12 & 24.

PRO-

PROBLEME 31.

165. *On demande deux nombres, dont la ſomme ajoûtée à la ſomme de leurs quarrés ſoit* a, *& dont la différence ajoûtée à la différence de leurs quarrés ſoit* b.

SOLUTION.

Mettez x & y pour les deux nombres cherchés, & l'équation fondamentale ſera 1°, $x+y+x^2+y^2=a$; 2°, $x-y+x^2-y^2=b$: ces équations, diſpoſées dans l'ordre où elles doivent l'être, ſeront,

Eq. 1. $xx+x+yy+y=a$.

Eq. 2. $xx+x-yy-y=b$.

Ajoûtez enſemble ces deux équations, & vous aurez $2xx+2x=a+b$; ainſi $xx+1x=\frac{a+b}{2}$, & $xx+1x+\frac{1}{4}=\frac{a+b}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2a+2b+1}{4}=\frac{rr}{4}$; tirez la racine quarrée de $xx+1x+\frac{1}{4}$ d'un côté, & de $\frac{rr}{4}$ de l'autre, & vous aurez $x+\frac{1}{2}=\frac{r}{2}$, & $x=\frac{r-1}{2}$: de plus, retranchez la ſeconde équation de la premiére, & vous aurez $2y^2+2y=a-b$; & $y^2+y=\frac{a-b}{2}$ & $y^2+1y+\frac{1}{4}=\frac{2a-2b+1}{4}=\frac{ss}{4}$; donc $y+\frac{1}{2}=\frac{s}{2}$, & $y=\frac{s-1}{2}$; ce qui nous fournit la règle ſuivante.

Faites $2a+2b+1=rr$, *&* $2a-2b+1=ss$, *& vous aurez le plus grand nombre égal à* $\frac{r-1}{2}$, *& le plus petit à* $\frac{s-1}{2}$.

DEMONSTRATION.

La ſomme de $\frac{r-1}{2}$ & de $\frac{s-1}{2}$ eſt $\frac{r+s-2}{2}$ ou $\frac{2r+2s-4}{4}$.

Le quarré de $\frac{r-1}{2}$ eſt $\frac{r^2-2r+1}{4}$.

Le quarré de $\frac{s-1}{2}$ eſt $\frac{s^2-2s+1}{4}$.

Donc la ſomme de leurs quarrés eſt $\frac{r^2+s^2-2r-2s+2}{4}$; ajoûtez à cette ſomme celle des nombres trouvés ci-deſſus, ſavoir $\frac{2r+2s-4}{4}$; & vous aurez la ſomme des nombres ajoûtée à celle de leurs quarrés égale à $\frac{r^2+ss-2}{4}$; mais $r^2+s^2=4a+2$ par la règle; par conſéquent $rr+ss-2=4a$, & $\frac{r^2+s^2-2}{4}$, ou la ſomme des nombres ajoûtée à la ſomme

de leurs quarrés $=a$: de plus, la différence de $\frac{r-1}{2}$ & de $\frac{s-1}{2}$ eſt $\frac{r-s}{2}$ ou $\frac{2r-2s}{4}$; & la différence de leurs quarrés eſt $\frac{r^2-s^2+2s-2r}{4}$; donc la différence des nombres ajoûtée à la différence de leurs quarrés eſt $\frac{r^2-s^2}{4}=\frac{4b}{4}$ en vertu de la règle, $=b$. *C. Q. F. D.*

Exemple pour la règle précédente.

Que la ſomme des nombres ajoûtée à la ſomme de leurs quarrés ſoit 26, & leur différence ajoûtée à la différence de leurs quarrés 14, & nous aurons $a=26$, $b=14$, $2a+2b+1$ ou $rr=81$, $r=9$, $\frac{r-1}{2}=4$, $2a-2b+1$, ou $ss=25$, $s=5$, $\frac{s-1}{2}=2$, & par conſéquent les nombres cherchés ſeront 4 & 2.

PROBLEME 32.

166. *On demande deux nombres, dont la ſomme des quarrés ſoit* a, *& qui donnent pour produit de leur multiplication* b.

SOLUTION.

Pour les deux nombres cherchés mettez x & $\frac{b}{x}$, & la ſomme de leurs quarrés ſera $x^2+\frac{b^2}{x^2}=a$; donc $x^4+b^2=ax^2$; donc $x^4-ax^2=-bb$; & $x^4-axx+\frac{aa}{4}=\frac{aa}{4}-bb=\frac{aa-4bb}{4}=\frac{ss}{4}$; tirez la racine quarrée de $x^4=ax^2+\frac{aa}{4}$ d'un côté, & de $\frac{ss}{4}$ de l'autre, & vous aurez $x^2-\frac{a}{2}=\pm\frac{s}{2}$ & $x^2=\frac{a\pm s}{2}$; & puiſque cette équation reſte la même, quelle des quantités inconnues que x puiſſe repréſenter, nous avons la règle ſuivante.

Faites aa − 4bb = ss, *& le quarré du plus grand nombre ſera égal à* $\frac{a+s}{2}$, & *le quarré du plus petit égal à* $\frac{a-s}{2}$.

DEMONSTRATION.

Si le quarré du plus grand nombre qui eſt $\frac{a+s}{2}$, eſt ajoûté au quarré du

du plus petit nombre qui eſt $\frac{a-s}{2}$, la ſomme de leurs quarrés ſera $\frac{2a}{2}$ ou a: de plus, ſi le quarré du plus grand nombre qui eſt $\frac{a+s}{2}$, eſt multiplié par le quarré du plus petit nombre qui eſt $\frac{a-s}{2}$, le produit de ces deux quarrés ſera $\frac{aa-ss}{4}=\frac{aa-aa+4bb}{4}$ par la règle, $=\frac{4bb}{4}=bb$; mais ſi le quarré du plus grand nombre multiplié par le quarré du plus petit donne bb, le plus grand nombre multiplié par le plus petit donnera b. *C. Q. F. D.*

Exemple pour la règle précédente.

Que la ſomme des deux nombres cherchés ſoit 400, & le produit de leur multiplication 192; nous aurons en ce cas $a=400$, $b=192$, a^2-4b^2 ou $s^2=12544$, $s=112$, $\frac{b+s}{2}$ ou le quarré du plus grand nombre $=256$, $\frac{a-s}{2}$ ou le quarré du plus petit nombre $=144$; donc le plus grand nombre eſt 16, & le plus petit 12.

PROBLEME 33.

167. *Une pierre tombe dans un puits vuide d'eau, & quelque tems après on entend la pierre donner contre le fond: on demande, le tems que la pierre met à tomber étant donné, quelle eſt la profondeur du puits.*

SOLUTION.

La ſolution de ce problême eſt fondée ſur trois principes, que nous ſuppoſerons accordés. Le premier eſt, que les eſpaces qu'un corps qu'on laiſſe tomber parcourt, ſont comme les quarrés des tems que dure ſa chûte: ainſi l'eſpace décrit en deux ſecondes, eſt à l'eſpace décrit en trois ſecondes, non comme 2 à 3, mais comme 4 à 9. Le ſecond principe eſt, qu'en faiſant abſtraction de la réſiſtance de l'air, qui n'entre point en ligne de compte ici, tous les corps, grands & petits, peſans & légers, ſont également accélérés, & parcourent le même eſpace dans le même tems. La troiſiéme ſuppoſition porte, que tous les ſons, au-moins ceux qui ſont aſſez forts pour affecter nos ſens, traverſent l'air avec la même viteſſe, & par cela même décrivent des eſpaces qui ſont entre eux comme les tems de leur mouvement. Le premier de ces principes a été démontré il y a long-tems par *Galilée*, qui en eſt l'inventeur, & les deux autres l'ont été par *Newton*. Ces principes étant admis, ſuppoſons que x déſigne la profondeur

deur du puits, a l'eſpace qu'un corps, qui commence à ſe mouvoir, parcourt durant une ſeconde, b l'eſpace qu'un ſon traverſe dans le même tems, & c le tems donné en ſecondes depuis que la pierre a été lâchée juſqu'à l'inſtant qu'on a ouï le ſon: pour ſavoir préſentement quel tems la pierre met à deſcendre juſqu'au fond du puits, dites, comme l'eſpace a eſt à l'eſpace x, ſavoir la profondeur du puits, ainſi 1, quarré du tems durant lequel le premier eſpace eſt décrit, ſavoir le quarré d'une ſeconde, eſt à $\frac{x}{a}$, quarré du tems durant lequel eſt décrit le dernier eſpace; ainſi $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$ repréſentera le tems que la pierre met à parcourir toute la profondeur du puits: de plus, pour trouver le tems que le ſon a mis à venir du fond du puits, dites, comme l'eſpace b eſt à l'eſpace x, ainſi une ſeconde, tems durant lequel le premier de ces eſpaces eſt décrit, eſt à $\frac{x}{b}$, tems durant lequel eſt décrit le dernier eſpace: mais ces tems ajoûtés enſemble, c'eſt-à-dire, le tems que la pierre met à deſcendre, & celui que le ſon met à monter, font tout le tems c; donc nous avons cette équation, $\frac{x}{b}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}=c$; par conſéquent $x+\frac{b\sqrt{x}}{\sqrt{a}}=bc$. C'eſt-là une eſpéce d'équation du ſecond degré, x étant le quarré de $\sqrt{x}$; ou du-moins cette équation doit ſe réſoudre comme ſi elle étoit du ſecond degré, parce qu'elle en a la forme. Ici le coëfficient du ſecond terme eſt $\frac{b}{\sqrt{a}}$, dont la moitié eſt $\frac{b}{2\sqrt{a}}$; le quarré de cette grandeur eſt $\frac{bb}{4a}$, lequel étant ajoûté aux deux membres de l'équation, donne $x+\frac{b\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+\frac{bb}{4a}=\frac{bb}{4a}+bc$ $=\frac{bb+4abc}{4a}$: faites $bb+4abc=ss$, & vous aurez $x+\frac{b\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+\frac{bb}{4a}=\frac{ss}{4a}$; en tirant la racine quarrée des deux membres, nous aurons $\sqrt{x}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ $=\pm\frac{s}{2\sqrt{a}}$; donc $\sqrt{x}=\frac{-b\pm s}{2\sqrt{a}}$, c'eſt-à-dire, $\sqrt{x}=\frac{-b-s}{2\sqrt{a}}$, ou $\frac{-b+s}{2\sqrt{a}}$: la premiére de ces racines eſt négative, & la derniére affirmative; mais la nature du problême ne permet point de ſuppoſer que $\sqrt{x}$ ſoit négative; car il faut être d'accord avec ſoi-même; & ſi l'on ſuppoſe $\sqrt{x}$ négative dans une partie de la ſolution, il faut la ſuppoſer telle auſſi dans tout le reſte; d'où il s'enſuivroit que $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$, tems que la pierre met à arriver au fond du puits, eſt pareillement une quantité négative, ce qui eſt abſurde; c'eſt pour cela que je rejette la racine négative $\frac{-s-b}{2\sqrt{a}}$, & que je

retiens

retiens la racine affirmative $\frac{s-b}{2\sqrt{a}}$, faiſant $\sqrt{x}=\frac{s-b}{2\sqrt{a}}$, & par conſéquent x, profondeur du puits $=\frac{\overline{s-b}^2}{4a}$.

Si l'on demande comment j'ai ſçu que la racine $\frac{s-b}{2\sqrt{a}}$ étoit affirmative, je réponds que ç'a été en obſervant, que ss étant égal à $bb+4abc$, doit être plus grand que bb; donc s eſt plus grand que b, & par conſéquent $s-b$ eſt une quantité affirmative, de-même que $\frac{s-b}{2\sqrt{a}}$: on auroit pu trouver la même choſe en faiſant paſſer tous les termes de l'équation dans un des membres, c'eſt-à-dire en faiſant $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+\frac{x}{b}-c=0$; (Voyez Art. 109.); mais continuons: puiſque $x=\frac{\overline{s-b}^2}{4a}$, nous aurons $\sqrt{x}=\frac{s-b}{2\sqrt{a}}$, & $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$, ou le tems que la pierre met à deſcendre juſqu'au fond du puits, égal à $\frac{s-b}{2a}$; nous aurons auſſi $\frac{x}{b}$, c'eſt-à-dire, le tems qu'il a fallu au ſon pour parcourir le même eſpace, égal à $\frac{\overline{s-b}^2}{4ab}$; d'où l'on peut déduire la règle ſuivante:

Faites bb+4abc *égal à* ss, *& vous aurez la profondeur du puits égale à* $\frac{\overline{s-b}^2}{4a}$, *le tems que la pierre met à tomber égal à* $\frac{s-b}{2a}$, *& celui qu'il faut au ſon pour arriver au haut du puits égal à* $\frac{\overline{s-b}^2}{4ab}$.

DEMONSTRATION.

Si la profondeur du puits eſt bien aſſignée, le tems que la pierre met à deſcendre, & celui qu'il faut au ſon pour monter, ajoûtés enſemble ſont tout le tems c, c'eſt-à-dire tout le tems qui s'eſt écoulé depuis l'inſtant que la pierre a été lâchée juſqu'à celui où le ſon a été ouï: or le tems que la pierre a mis à tomber étoit $\frac{s-b}{2a}$ ou $\frac{2bs-2bb}{4ab}$, en multipliant le numérateur & le dénominateur par $2b$; & le tems qu'il a fallu au ſon pour monter étoit $\frac{\overline{s-b}^2}{4ab}$ ou $\frac{s^2-2bs+bb}{4ab}$; ajoûtez enſemble ces deux tems, ſavoir $\frac{s^2-2bs+bb}{4ab}$, & $\frac{2bs-2bb}{4ab}$, & la ſomme ſera $\frac{s^2-b^2}{4ab}=\frac{4abc}{4ab}$ par la règle, $=c$. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

Mr. *Huygens*, fameux par un grand nombre de découvertes également curieuſes & utiles, ayant obſervé que la longueur d'un Pendule qui bat des ſecondes, eſt de 3 pieds 8 lignes & demie meſure de *Paris*, & ayant trouvé de plus avec une ſagacité étonnante ce beau théorême, que le tems de la chûte verticale d'un corps par la demie-longueur d'un pendule eſt au tems d'une vibration de ce même pendule, comme le diamétre du cercle à la circonférence; a démontré à l'aide de ces deux découvertes, & du théorême de *Galilée* dont nous avons eu occaſion de parler, que l'eſpace qu'un corps parcourt pendant la premiére ſeconde qu'il a commencé à tomber, eſt de $15\frac{1}{12}$ pieds meſure de *Paris*, ou plus exactement 15 .0957 pieds de cette meſure, c'eſt-à-dire, 16 .1222 pieds d'*Angleterre*, 1000 pieds meſure de *Paris* faiſant 1068 pieds d'*Angleterre*. Que ſi nous avons l'obligation de cette vérité à *Huygens*, nous ne ſommes guéres moins redevables à notre ſavant compatriote Mr. *Derham*, qui par ſes expériences & ſes obſervations ſur le mouvement des ſons partis d'une diſtance bien plus conſidérable que celle dont on avoit fait uſage avant lui pour déterminer la viteſſe de ce mouvement, a trouvé que le ſon parcourt à peu près 1142 pieds en une ſeconde: donc 16.1222 pieds marquent l'eſpace que dans la ſolution du dernier problême nous avons appellé a, & 1142 pieds déſignent celui que nous avons appellé b; donc $4a=64.4888$, & $4ab=73646$, & $bb=1304164$. Ayant donc par le calcul la valeur de b^2 & de $4ab$, qui dans tous les cas ſera toujours la même, la ſolution du problême précédent deviendra beaucoup plus facile: comme par exemple, ſuppoſons que le tems, qui s'eſt écoulé depuis le commencement de la chûte juſqu'à l'ouïe du ſon, étoit de de 10 ſecondes, nous aurons $c=10$, $4abc=736460$, $bb+4abc$, ou $ss=2040624$, $s=1428.5$. $s-b=286.5$, $\overline{s-b}^2=82082.25$; ce dernier nombre diviſé par $4a$ ou 64 .49, donne 1273 pieds pour la profondeur du puits: de plus le tems que la pierre a mis à deſcendre étoit $\frac{s-b}{2a}$ par la règle; mais la quantité $s-b$ a déjà été trouvée égale à 286.5, & ce nombre diviſé par $2a$ ou 32 .24, donne 8 .89 ſecondes pour le tems que la pierre a mis à deſcendre: enfin, le tems qu'il a fallu au ſon pour monter étoit, ſuivant la règle, $\frac{\overline{s-b}^2}{4ab}$, trouvé $=1273$; diviſez cette grandeur par b ou 1142, & vous aurez $\frac{\overline{s-b}^2}{4ab}$, ou le tems qu'il a fallu au

au ſon pour monter, égal à 1 .11 d'une ſeconde: ajoûtez ce tems à l'autre, ſavoir, 8 .89 ſecondes, & tout le tems ſera de 10 ſecondes, comme cela ſe devoit.

Si quelqu'un ſouhaite de voir comment l'eſpace qu'un corps parcourt pendant la premiére ſeconde qu'il commence à tomber, ſe déduit du théorême de *Huygens* indiqué ci-deſſus, il n'a qu'à ſuivre le fil de la démonſtration ſuivante: ſoit l la longueur d'un pendule qui bat des ſecondes: cela étant, en vertu du théorême, le tems pendant lequel un corps, qui commence à tomber, parcourt un eſpace égal à $\frac{1}{2}l$, ſera au tems d'une oſcillation du pendule dont la longueur eſt l, comme le diamétre d'un cercle eſt à la circonférence; mais le tems d'une oſcillation du pendule l eſt une ſeconde par l'hypothéſe; ou ſi nous déſignons par s l'eſpace inconnu qu'un corps parcourt pendant la premiére ſeconde qu'il commence à tomber, le tems d'une oſcillation du pendule l ſera le même que celui que le corps mettra à parcourir l'eſpace s, & on aura l'analogie ſuivante: le tems de la deſcente par $\frac{1}{2}l$ ſera au tems de la deſcente par s, comme le diamétre d'un cercle eſt à la circonférence; & par cela même le quarré du premier de ces tems eſt au quarré du ſecond, comme le quarré du diamétre eſt au quarré de la circonférence; de plus le quarré du tems de la deſcente par $\frac{1}{2}l$ eſt au quarré du tems de la deſcente par s, comme $\frac{1}{2}l$ eſt à s; donc $\frac{1}{2}l$ eſt à s, comme le quarré du diamétre d'un cercle eſt au quarré de la circonference; mais le diamétre d'un cercle eſt à la circonférence comme 113 à 355 (Voyez Schol. 1. de l'Art. 179;) & le quarré de la premiére de ces quantités eſt au quarré de la ſeconde comme 12769 eſt à 126025; de plus l, longueur du pendule qui bat des ſecondes, eſt de 3 pieds $8\frac{1}{2}$ lignes, meſure de *Paris*, c'eſt-à-dire, (Introd. Art. 23.) 3 .059028 pieds; ainſi $\frac{1}{2}l = 1$ .529514 d'un pied; dites donc, comme 12769 à 126025, ainſi 1 .529514 à 15 .0957; & vous aurez $s = 15$ .0957 pieds meſure de *Paris*, ou 16. 1222 pieds meſure d'*Angleterre*.

On peut déduire de-là par voye de corollaire, que comme le quarré du diamétre d'un cercle eſt au quarré de la circonférence, ainſi la moitié de la longueur d'un pendule eſt à l'eſpace qu'un corps, qui commence à ſe mouvoir, parcourt durant le tems d'une oſcillation de ce pendule.

SOLUTION DE DEUX PROBLEMES

Par Mr. Abraham de Moivre.

Mr. de Moivre, qui eſt inconteſtablement un des principaux Mathématiciens de notre ſiécle, m'a communiqué les ſolutions élégantes des deux problêmes ſuivans au ſujet des quantités proportionnelles, en me permettant d'en faire part au Public. Je donne le tout ici préciſément tel qu'il me l'a envoyé.

Probleme I.

La ſomme de quatre quantités en proportion continue étant donnée, comme auſſi la ſomme de leurs quarrés, trouver les proportionnelles.

Solution.

Que les quatre quantités proportionnelles ſoient x^3, xxy, xyy, y^3: que leur ſomme ſoit $=a$, & la ſomme de leurs quarrés $=b$: cela étant, nous aurons les deux équations ſuivantes;

$$x^3+xxy+xyy+y^3=a, \text{ \&}$$
$$x^6+x^4yy+xxy^4+y^6=b.$$

La premiére équation eſt réduite à

$$\overline{x+y}\times\overline{xx+yy}=a: \text{ la ſeconde à}$$
$$\overline{xx+yy}\times\overline{x^4+y^4}=b.$$

La premiére équation réduite me détermine à ſuppoſer

$$x+y=z,$$
$$xx+yy=v:$$

Ainſi la premiére équation eſt changée en

$$zv=a.$$

Par rapport à la ſeconde, je dis, puiſque $x+y=z$, ſi j'éléve les deux membres au quarré, j'aurai,

$$xx+2xy+yy=zz;$$

mais $xx+yy$ a été ſuppoſé $=v$;

donc $2xy+v=zz$,

& $2xy=zz-v$,

& $4xxyy=z^4-2vzz+vv$:

De plus $xx+yy=v$,

donc $x^4+2xxyy+y^4=vv$:

Mais la ſeconde équation réduite eſt

$$\overline{xx+yy}\times\overline{x^4+y^4}=b, \text{ ou}$$
$$v\times\overline{x^4+y^4}=b;$$

donc $x^4+y^4=\frac{b}{v}$;

de-

de-ſorte qu'à l'équation que nous avons eue, ſavoir $x^4+2xxyy+y^4=vv$, nous pouvons ſubſtituer

$$\frac{b}{v}+2xxyy=vv, \text{ ou}$$

$$2xxyy=vv-\frac{b}{v}, \text{ ou}$$

$$4xxyy=2vv-\frac{2b}{v}: \text{ mais ci-deſſus}$$

$$4xxyy=z^4-2vzz+vv;$$

donc $$2vv-\frac{2b}{v}=z^4-2vzz+vv, \text{ ou}$$

$$vv-\frac{2b}{v}=z^4-2vzz:$$

Par la transformation de la premiére équation nous avons eu $zv=a$;

donc $$v=\frac{a}{z};$$

& cette valeur de v étant ſubſtituée, nous aurons

$$\frac{aa}{zz}-\frac{2bz}{a}=z^4-2az, \text{ ou}$$

$$z^6+\frac{2b}{a}z^3-2aaz^3=aa, \text{ ce qui eſt une eſpéce d'équation du ſecond degré.}$$

L'inconnue z étant déterminée dans cette équation, v le ſera auſſi; après quoi l'on trouvera ſans peine les valeurs de x & de y; car

$$x=\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}\sqrt{2v-zz}, \text{ \&}$$

$$y=\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2}\sqrt{2v-zz}; \text{ comme on ne ſauroit en douter}$$

ſi l'on conſidére que par la ſuppoſition $x+y=z$, &

$$xx+yy=v:$$

Elevez la premiére de ces équations au quarré, & vous aurez

$xx+2xy+yy=zz$; mais la ſeconde équation eſt

$xx+yy=v$; & leur différence,

$2xy=zz-v$; nous avons donc

$$xx-2xy+yy=v-zz+v=2v-zz;$$

par conſéquent $x-y=\sqrt{2v-zz}$;

mais $x+y=z$;

donc $2x=z+\sqrt{2v-zz}$,

& $x=\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}\sqrt{2v-zz}$,

Il eſt manifeſte outre cela que $2y=z-\sqrt{2v-zz}$;

par conſéquent $y=\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2}\sqrt{2v-zz}$.

Ainſi les quatre proportionnelles ſont connues.

Problème 2.

La ſomme de cinq nombres en proportion Géométrique, & la ſomme de leurs quarrés, étant données, on demande les nombres mêmes.

Solution.

Soit la ſomme des proportionnelles a; & celle de leurs quarrés b; cela étant, nous aurons ces deux équations;

$$x^4+x^3y+xxyy+xy^3+y^4=a, \text{ \&}$$
$$x^8+x^6yy+x^4y^4+xxy^6+y^8=b.$$

La premiére* peut ſe réduire à $\frac{x^5-y^5}{x-y}=a$;

La ſeconde à $\frac{x^{10}-y^{10}}{xx-yy}=b.$

Diviſez la ſeconde de ces équations par la premiére, & vous aurez $\frac{x^5+y^5}{x+y}=\frac{b}{a}$; on en amplifiant cette équation

$$x^4-x^3y+xxyy-xy^3+y^4=\frac{b}{a}.$$

Placez au-deſſous de cette équation la premiére équation originale, qui eſt

$$x^4+x^3y+xxyy+xy^3+y^4=a.$$

Ajoûtez enſemble ces deux équations, & il en réſultera

$$2x^4+2xxyy+2y^4=a+\frac{b}{a}, \text{ ou}$$
$$x^4+xxyy+y^4=\tfrac{1}{2}a+\frac{\frac{1}{2}b}{a}=s,$$

(en faiſant, pour rendre le calcul plus ſimple, $\frac{1}{2}a+\frac{\frac{1}{2}b}{a}=s.$)

Mais ſi, au-lieu d'ajoûter ces équations, on retranche préſentement l'équation ſupérieure de celle qui eſt au-deſſous, on aura

$$2x^3y+2xy^3=a-\frac{b}{a}, \text{ ou}$$
$$x^3y+xy^3=\tfrac{1}{2}a-\frac{\frac{1}{2}b}{a}, \text{ ou}$$
$$xy\times\overline{xx+yy}=\tfrac{1}{2}a-\frac{\frac{1}{2}b}{a}.$$

Pour abréger, nous nommerons ces quantités connues d, ce qui nous donnera l'équation

$$xy\times\overline{xx+yy}=d.$$

Suppoſons $xy=z$, & $xx+yy=v$;

Ainſi $zv=d.$

H

* Peut ſe réduire à $\frac{x^5-y^5}{x-y}$) ſavoir, en multipliant & en diviſant après cela le produit par cette même grandeur l'équation par $x-y$.

Il eſt queſtion préſentement d'exprimer l'autre équation $x^4+xxyy+y^4=s$ par le moyen de z & de v: mais puisque $xx+yy=v$, en élevant les deux membres au quarré, nous aurons

$x^4+2xxyy+y^4=vv$. En retranchant de cette équation celle-ci $x^4+xxyy+y^4=s$, que nous avions déjà, il reſtéra

$xxyy=vv-s$:

mais $xy=z$; donc $xxyy=zz$, &

$zz=vv-s$. Mais nous avions déjà $zv=d$

L'inconnue z * étant exterminée, nous aurons

$\frac{dd}{vv}=vv-s$, ou $dd=v^4-svv$.

Il eſt facile de déterminer la valeur de v dans cette équation; v étant connue, z le ſera auſſi; après quoi z & y le ſeront pareillement; car

$x=\frac{1}{2}\sqrt{v+2z}+\frac{1}{2}\sqrt{v-2z}$

$y=\frac{1}{2}\sqrt{v+2z}-\frac{1}{2}\sqrt{v-2z}$, comme on ne ſauroit en douter ſi l'on conſidére que par la ſuppoſition $xy=z$, &

$xx+yy=v$:

Car doublant la premiére de ces deux équations, nous aurons $2xy=2z$; en ajoûtant cette nouvelle équation à la ſeconde, il viendra $xx+2xy+yy=v+2z$; donc $x+y=\sqrt{v+2z}$.

De plus, ſi nous retranchons l'équation $2xy=2z$ de l'autre équation $xx+yy=v$, nous aurons $xx-2xy+yy=v-2z$; donc $x-y=\sqrt{v-2z}$. Or ces deux équations,

$x+y=\sqrt{v+2z}$

& $x-y=\sqrt{v-2z}$, donnent

$x=\frac{1}{2}\sqrt{v+2z}+\frac{1}{2}\sqrt{v-2z}$

& $y=\frac{1}{2}\sqrt{v+2z}-\frac{1}{2}\sqrt{v-2z}$.

N. B. Le jeune Algébriſte ſera peut-être bien aiſe de trouver ici un exemple pour chacune des ſolutions précédentes.

Exemple pour la ſolution du premier Problême.

Puiſque $z^6=\frac{2aa-2b}{a}z^3+aa$, ſi à la place de $\frac{aa-b}{a}$ nous mettons d, nous aurons $z^6=2dz^3+aa$, & $z^3=d+\sqrt{dd+aa}$: ſoit $a=30$, $b=340$; cela étant $aa=900$, $aa-b=560$, $\frac{aa-b}{a}$ ou $d=\frac{56}{3}$, $aa+dd=$

* *L'inconnue z étant exterminée.*) Il ne faut pour cela qu'élever au quarré les deux membres de l'équation $zv=d$, puis diviſer la nouvelle équation par vv.

$=900+\frac{3136}{9}=\frac{11236}{9}$, $\sqrt{aa+dd}=\frac{106}{3}$, $d+\sqrt{aa+dd}$ ou $z^3=54=27\times 2=27c^3$ (en désignant par c la racine cubique de 2,) $z=3c$, $\frac{a}{z}$ ou $v=\frac{30}{3c}=\frac{10}{c}=\frac{10cc}{c^3}=5cc$, $2v-zz=cc$, $\sqrt{2v-zz}=c$, $\frac{z+\sqrt{2v-zz}}{2}$ ou $x=2c$, $\frac{z-\sqrt{2v-zz}}{2}$ ou $y=c$;

Donc les proportionnelles x^3, xxy, xyy, y^3,
ſont $8c^3$, $4c^3$, $2c^3$, $1c^3$,
ou 16, 8, 4, 2.

Exemple pour la ſolution du ſecond Problême.

Soit $a=62$, $b=1364$; en ce cas $aa=3844$, $\frac{aa+b}{2a}$ ou $s=42$, $\frac{aa-b}{2a}$ ou $d=20$, $v^4=42vv+400$, $vv=21+\sqrt{841}=50=25\times 2=25cc$ (en mettant c pour la racine quarrée de 2,) $v=5c$, $\frac{d}{v}$ ou $z=\frac{20}{5c}=\frac{4}{c}=\frac{4c}{cc}=2c$, $\sqrt{v+2z}=\sqrt{9c}=3\sqrt{c}$, $\sqrt{v-2z}=\sqrt{c}$, $\frac{1}{2}\sqrt{v+2z}+\frac{1}{2}\sqrt{v-2z}$ ou $x=2\sqrt{c}$, $\frac{1}{2}\sqrt{v+2z}-\frac{1}{2}\sqrt{v-2z}$ ou $y=\sqrt{c}$, $xx=4c$, $xy=2c$, $yy=c$.

Donc les proportionnelles x^4, x^3y, $xxyy$, xy^3, y^4,
ſont $16cc$, $8cc$, $4cc$, $2cc$, $1cc$,
ou 32, 16, 8, 4, 2.

ELE-

ELEMENS D'ALGEBRE.

LIVRE V.

En quels cas un Problême eſt ſuſceptible de pluſieurs réponſes.

ART. 168. NOus avons déjà eu occaſion d'obſerver ci-deſſus, que ſi dans quelque Problême le nombre des conditions indépendantes eſt égal à celui des quantités inconnues, un pareil problême n'admettra qu'une ſeule ſolution; ou s'il en admet davantage, ces ſolutions ne laiſſeront pas d'être tellement déterminées, qu'il ne reſtera aucun lieu à des ſuppoſitions arbitraires: mais ſi les conditions étoient en plus petit nombre que les quantités inconnues, celles qui manquent pourroient être déterminées à diſcrétion par l'Analyſte même; & comme rien ne limite ſon choix, il n'eſt pas ſurprenant que dans des cas de cette nature un problême ſoit ſuſceptible d'une infinité de réponſes, principalement quand les fractions peuvent être admiſes dans la ſolution: que s'il ne falloit que des nombres entiers pour réſoudre le problême, en ce cas le nombre des réponſes ſeroit quelquefois fini & quelquefois infini ſuivant la nature du problême. Ce que nous venons de dire ſera ſuffiſamment éclairci par les deux exemples ſuivans.

EXEMPLE I.

On demande deux nombres dont la ſomme ſoit égale à dix fois leur différence.

Il eſt manifeſte qu'en appellant les deux nombres inconnus x & y, nous n'avons qu'une ſeule condition, & par cela même qu'une ſeule équation, ſavoir, $x+y=10x-10y$, laquelle donnera $x=\frac{11y}{9}$; & c'eſt-là tout ce que le problême exige. Ainſi l'Analyſte eſt entiérement libre de ſubſtituer un nombre entier, avec une fraction adhérente, ou bien une ſimple fraction à la place de y, pourvu ſeulement qu'il faſſe $x=\frac{11y}{9}$; & les deux quantités x & y réſoudront le problême. Comme, par exemple, ſoit $y=\frac{1}{2}$; en ce cas x ou $\frac{11y}{9}$ ſera $\frac{11}{18}$, & ces deux fractions $\frac{11}{18}$, & $\frac{1}{2}$ ou $\frac{9}{18}$, ſatisferont aux conditions du problême; car leur différence eſt $\frac{1}{9}$, & leur ſomme $\frac{10}{9}$. Mais ſi l'on avoit demandé que x & y

fuſſent des nombres entiers, il auroit néceſſairement fallu ſubſtituer à la place de y un nombre diviſible par 9 ſans reſte; or de pareils nombres peuvent ſe trouver à l'infini, tels que 9, 18, 27, 36 &c. Donc cette queſtion eſt ſuſceptible d'une infinité de réponſes, tant en nombres entiers qu'en fractions.

EXEMPLE 2.

On demande deux nombres x *&* y, *dont la multiplication faſſe un produit égal à dix fois leur différence.*

Cette équation ſera $yx = 10x - 10y$, c'eſt-à-dire $x = \frac{10y}{10-y}$. Il faut néceſſairement que la grandeur y ſoit ici plus petite que 10; car ſi y étoit $= 10$, la fraction $\frac{10y}{10-y}$ ſeroit infiniment grande, comme nous le ferons voir dans un autre endroit; & ſi la quantité y étoit plus grande que 10, alors $10-y$, & par conſéquent $\frac{10y}{10-y}$ formeroient une quantité négative, au-lieu que le problême n'eſt ſuppoſé avoir rapport qu'à des quantités affirmatives ſeulement: cependant comme il y a une infinité de fractions entre 0 & 10, & qu'on peut ſubſtituer celle de ces fractions qu'on voudra à la place de y, le problême ſera ſuſceptible d'une infinité de ſolutions, ſi des fractions ſont admiſes; mais ſi l'on requiert que x & y ſoient des nombres entiers on n'a le choix que de neuf nombres à la place d'y, & peut-être pas même de tous les neuf, comme nous le ferons voir dans la ſuite. Pour trouver maintenant quel nombre entier ſubſtitué à la place de y, donnera auſſi un nombre entier pour x, je réduis la quantité $\frac{10y}{10-y}$ à une autre plus ſimple, en diviſant $10y$ par $10-y$, ou plutôt par $-y+10$, commençant mon opération ainſi: $10y$ diviſés par $-y$ donnent -10, que je mets au quotient; puis multipliant le diviſeur $-y+10$ par le quotient -10, j'ai pour produit $+10y-100$, leſquels étant ſouſtraits du dividende $10y$, laiſſent 100 de reſte; mais n'ayant pas deſſein de pouſſer la diviſion plus loin, je repréſente le reſte du quotient par la fraction $\frac{100}{10-y}$; ainſi $x = \frac{100}{10-y} - 10$; ainſi pour que x puiſſe être un nombre entier, il eſt néceſſaire que $\frac{100}{10-y}$ ſoit un pareil nombre; mais c'eſt ce qui ſe trouvera impoſſible, à moins que $10-y$ ne ſoit quelqu'un des diviſeurs de 100, c'eſt-à-dire, qui diviſe ce nombre ſans reſte: j'examine donc enſuite combien de pareils diviſeurs le nombre de 100 admet entre les nombres qui ſont au-deſſous de 10, & je trouve quatre pareils diviſeurs, ſavoir 1, 2, 4 & 5; donc ſi l'on ſuppoſe

poſe 10−y égal à quelqu'un de ces nombres, x ou $\frac{100}{10-y}-10$ ſera néceſſairement un nombre entier, & outre cela affirmatif; car auſſi longtems que 10−y ſera plus grand que rien & plus petit que 10, $\frac{100}{10-y}$ ſera plus grand que $\frac{100}{10}$, c'eſt-à-dire que 10, & par conſéquent $\frac{100}{10-y}-10$ où x ne pourra qu'être affirmatif. Suppoſons donc premiérement, 10−y=1, & nous aurons y=9, & $\frac{100}{10-y}$, ou x=90. 2°, ſi 10−y=2, nous aurons y=8, & x=40. 3°. Si 10−y=4, nous aurons y=6, & x=15: Enfin, ſi 10−y=5, nous aurons y=5 & x=10: ainſi cette queſtion admet quatre ſolutions en nombres entiers, ſavoir, 90 & 9, 40 & 8, 15 & 6, & 10 & 5: ſolutions, qui ſatisfont toutes également à la condition du problême.

Après avoir donné au Lecteur un échantillon de ce qui appartient à ce chef, je ferai préſentement quelques remarques préliminaires pour lui faciliter la ſolution des problêmes qui y ſont rélatifs.

DEFINITIONS.

169. *Si quelque quantité eſt meſurée ou diviſée par une autre ſans reſte; la première s'appelle un multiple de la dernière;* ainſi 12 eſt un multiple de 4, & 6 un multiple de 6; car en ce ſens chaque quantité eſt un multiple d'elle-même; *mais ſi une quantité peut être meſurée ou diviſée ſans reſte par deux ou plus de deux autres, on l'appelle alors un multiple commun de ces autres quantités*; ainſi 60 eſt un multiple commun de 2, 3, 4, 5, 6.

COROLLAIRE.

Il ſuit de-là, que ſi deux quantités inégales a & b *ſont l'une & l'autre multiples d'une troiſiéme, leur ſomme* a+b, *& leur différence* a−b *ou* b−a, *ſeront auſſi multiples de la même; & ſi* a & b *ſont des multiples communs d'un certain nombre de quantités, leur ſomme & leur différence ſeront auſſi les multiples communs des mêmes*; car les quantités, qui meſureront tant *a* que *b* meſureront pareillement leur ſomme & leur différence, (Voyez Art. 20. ax. 2.) c'eſt pourquoi, par la raiſon des contraires, une quantité quelconque ou plus d'une quantité, dont *a* & *b* ſont multiples ou multiples communs, aura pour multiple ſimplement ou pour multiple commun, tant la ſomme que la différence des quantités *a* & *b*.

N. B. Les lemmes ſuivans contiennent quelques propriétés curieuſes, premiérement des nombres entiers, & puis des fractions: & nous croyons d'autant plus obliger le Lecteur en les lui communiquant, qu'elles ſont,

non ſeulement belles en elles-mêmes, mais auſſi d'uſage pour la ſolution de quelques-uns des problêmes ſuivans.

LEMME I.
THEOREME.

170. *Soient* a *&* b *deux quantités quelconques dont le plus petit multiple commun eſt* c: *je dis que ce plus petit multiple commun* c *meſurera tout autre multiple commun* d *des mêmes quantités.*

Si on le nie, on ne ſauroit pourtant diſconvenir qu'après que *c* a meſuré *d* autant de fois qu'il eſt poſſible, il ne doive reſter une quantité comme *e* plus petite que *c*; cela étant, *c* meſurera *d*—*e*. Puis donc que *a* & *b* meſurent l'un & l'autre *c*, & que *c* meſure *d*—*e*; *a* & *b* meſureront l'un & l'autre *d*—*e*; ainſi *d*—*e* eſt un multiple commun de *a* & *b*; mais *d* eſt un multiple commun des mêmes par la ſuppoſition; donc tant *d* que *d*—*e* ſont des multiples communs de *a* & de *b*; par conſéquent leur différence *e* eſt un multiple commun des mêmes par l'Art. 169; mais *e* eſt plus petit que *c* par la ſuppoſition; donc ſi *c* ne meſure pas *d* ſans reſte, il ſera poſſible que deux quantités *a* & *b* ayent un multiple commun moindre que leur plus petit multiple commun; ce qui impoſſible. Donc *c* meſure *d* ſans reſte. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

Si l'on applique à trois ou à plus de trois quantités la démonſtration que nous venons de donner, elle prouvera également, que leur plus petit multiple commun meſurera tout autre multiple commun des mêmes quantités.

SCHOLIE.

Cette façon d'établir la vérité d'une propoſition, en faiſant voir que la propoſition contraire méne à l'abſurde, ou à une impoſſibilité, ou bien à quelque choſe de contradictoire à une vérité déjà démontrée, a été employée avec beaucoup de ſubtilité par les Anciens, toutes les fois qu'une preuve directe n'étoit pas ſi facile à trouver; & c'eſt à cauſe de cela que ces démonſtrations ſont quelquefois moins embarraſſées que celles du genre direct, où moins de ſubtilité eſt requiſe: & ſurement elles ſont auſſi bonnes qu'aucune autre quelconque, puiſqu'elles ſont fondées ſur les mêmes axiômes; & s'il leur manque de n'être pas tout à-fait auſſi convaincantes, cela vient de ce que le jeune Mathématicien ne s'eſt pas encore aſſez familiariſé avec les différentes maniéres de penſer & de raiſonner ſur la grandeur en général: ainſi toutes les fois que je pourrai d'une

d'une propoſition douteuſe, par un raiſonnement juſte déduire une autre propoſition manifeſtement fauſſe, j'aurai une marque certaine que la premiére propoſition eſt fauſſe auſſi: car la vérité ne peut mener qu'à quelque choſe de vrai.

LEMME 2.

PROBLEME.

171. *Deux nombres inégaux* a & b *étant donnés, on demande leur plus petit multiple commun.*

SOLUTION.

Comme ab, produit de a & de b multipliés l'un par l'autre, eſt un multiple commun des deux nombres, ce produit peut être diviſé ſans reſte par leur plus petit multiple commun, en vertu de l'Art. 170: ſuppoſons le donc diviſé ainſi, & que le quotient ſoit c; donc par la raiſon des contraires, ſi le produit ab eſt diviſé par c, le quotient $\frac{ab}{c}$ ſera le plus petit multiple commun de a & de b; d'où j'infére, que $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$ ſeront des nombres entiers; car ſi cela n'étoit pas, comment $\frac{ab}{c}$ pourroit-il être un multiple commun de a & de b, bien moins encore leur plus petit multiple commun? Mais ſi $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$ ſont des nombres entiers, il faut que c ſoit une meſure commune de a & de b. J'ajoûte de plus, que c eſt leur plus grande meſure commune; car ſi un plus grand nombre que c, par exemple d, les meſuroit l'un & l'autre; puiſque $\frac{a}{d}$ & $\frac{b}{d}$ ſeroient des nombres entiers, $\frac{ab}{d}$ ſeroit un multiple commun de a & de b plus petit que $\frac{ab}{c}$, à cauſe que d eſt plus grand que c, & par cela même a & b auroient un multiple commun moindre que le plus petit de tous, ce qui eſt abſurde: donc, *Si* a & b, *qui ſont les deux nombres propoſés, ſont multipliés l'un par l'autre, & que leur produit ſoit diviſé par leur plus grande meſure commune, le quotient ſera leur plus petit multiple commun.* C. Q. F. D.

Par ex. ſi les nombres propoſés étoient 12 & 15, dont la plus grande meſure commune eſt 3; le produit de leur multiplication ſera 180, & ce nombre diviſé par 3 donnera 60, pour leur plus petit multiple commun.

COROLLAIRE 1.

Si les nombres donnés ſont premiers l'un à l'égard de l'autre, c'eſt-à-dire, n'ont d'autre meſure commune que l'unité, le produit de leur multiplication ſera leur plus petit multiple commun: car en ce cas $\frac{ab}{c}=\frac{ab}{1}=ab$.

COROLLAIRE 2.

Si la fraction $\frac{a}{b}$ *eſt réduite à ſes derniers termes* $\frac{d}{e}$; *je dis que* ae *ou* bd (*car ces grandeurs ſont égales*) *ſera le plus petit multiple commun de* a *&* *de* b: car en ce cas, ſi *c* eſt la plus grande meſure commune de *a* & de *b*, nous aurons $d=\frac{a}{c}$, & $e=\frac{b}{c}$, & par conſéquent *ae* ou *bd* ſera $\frac{ab}{c}$.

LEMME 3.

PROBLEME.

172. *On demande le plus petit multiple commun de trois ou de plus de trois nombres donnés.*

Que les nombres donnés ſoient *a*, *b*, *c* & *d*, & le problême pourra ſe réſoudre de la maniére ſuivante: *Premiérement, trouvez par l'Article précédent le plus petit multiple commun de* a *&* *de* b, *& appellez-le* e; *puis trouvez le plus petit multiple commun de* e *&* *de* c, *& appellez-le* f; *enfin trouvez le plus petit multiple commun de* f *&* *de* d, *& appellez-le* g: *je dis que ce dernier nombre* g *ſera le plus petit multiple commun des nombres* a, b, c *&* d. Car premiérement, il faut que *g* ſoit un multiple commun de ces nombres, ce que je démontre ainſi: *a* & *b* doivent meſurer *e* leur plus petit multiple commun; & *e* meſurera *f*, le plus petit multiple commun de *e* & de *c*; & *f* meſurera *g*, le plus petit multiple commun de *f* & de *d*; donc *a* & *b* meſureront *g*: de plus, *c* meſurera *f*, le plus petit multiple commun de *e* & de *c*; & *f* meſurera *g*, comme il a été dit; donc *c* meſurera *g*; mais *d* meſure *g* par l'hypothéſe; donc tous les nombres donnés *a*, *b*, *c* & *d* meſurent *g*, & ce nombre eſt leur multiple commun. Je dis en ſecond lieu que *g* eſt leur plus petit multiple commun: car s'il eſt poſſible que *h* ſoit un pareil multiple, & plus petit que l'autre, c'eſt-à-dire, que tous les nombres *a*, *b*, *c* & *d* meſurent un nombre *h* plus petit que *g*: puiſque *h* eſt un multiple commun de *a* & de *b* par l'hypothéſe, & que *e* eſt leur plus petit multiple commun, *e* meſurera *h* par l'Art. 170; mais *c* meſure *h* par l'hypothéſe; donc puiſque *e* & *c* meſurent *h*, leur plus petit multiple commun *f* doit auſſi meſurer *h*; mais *d* meſure *h* par l'hypothéſe; donc puiſque tant *f* que *d* meſurent *h*, leur plus petit multiple commun *g* doit auſſi meſurer *h*, c'eſt-à-dire, une quantité plus grande en meſurera une plus petite, ce qui eſt abſurde; donc *g* eſt le plus petit multiple commun des nombres donnés. *C. Q. F. D.*

Pour éclaircir cette ſolution, nous ajoûterons l'exemple ſuivant. On demande le plus petit multiple commun des nombres 8, 10, 12, & 14; or ſuivant le dernier Article le plus petit multiple commun de 8 & de 10 eſt 40; & le plus petit multiple commun de 40 & de 12 eſt 120; & le

le plus petit multiple commun de 120 eſt de 14 & 840; donc 840 eſt le plus petit multiple commun des nombres 8, 10, 12 & 14.

LEMME 4.

PROBLEME.

173. *Les deux quantités inégales* a *&* b, *dont* c *&* d *ſont reſpectivement les multiples, étant données, on demande de trouver autant de multiples qu'on voudra des mêmes quantités avec la même différence, c'eſt-à-dire, que le multiple de* a *ſurpaſſe toujours celui de* b *de la quantité* $\overline{c-d}$, *en cas que* c *ſoit plus grand que* d; *ou bien que le multiple de* b *ſurpaſſe toujours celui de* a *de la quantité* $\overline{d-c}$, *en cas que* d *ſoit plus grand que* c.

SOLUTION.

Que $c+e$ & $d+e$ repréſentent deux pareils multiples, c'eſt-à-dire, deux multiples, dont la différence ſoit $c-d$ ou $d-c$; cela étant, puiſque tant c que $c+e$ ſont multiples de a, e ſera auſſi multiple de a, par l'Art. 169; de-même puiſque tant d, que $d+e$, ſont multiples de b, e ſera un multiple de b; donc *ſi* e *eſt quelque multiple commun de* a *&* b, c+e *&* d+e *ſeront multiples des mêmes grandeurs, & tels qu'on les demande, & pas autrement. Soit préſentement* e *le plus petit multiple commun de* a *&* b; *en ce cas il eſt manifeſte que* c+e *&* d+e *ſeront les premiers dans leur claſſe plus grands que* c *&* d, *&* c+2e, *&* d+2e *ſeront enſuite immédiatement au-deſſus de* c+e *&* d+e, *& ainſi à l'infini: d'un autre côté* c−e *&* d−e *ſeront les premiers dans leur claſſe plus petits que* c *&* d, *&* c−2e *&* d−2e *ſeront enſuite immédiatement au-deſſus de* c−e *&* d−e, *& ainſi de ſuite auſſi longtems que la ſouſtraction pourra être continuée.*

Il ſuit de-là, que *ſi* e *eſt le plus petit multiple commun de* a *&* b, *& que ſi* c *ou* d, *ou l'un & l'autre, ſont moindres que* e, *ces multiples* c *&* d *ſeront les plus petits de leur claſſe:* par exemple, ſoit $a=4$, & $b=6$; en ce cas 8 & 18 ſeront deux multiples de a & de b, dont la différence eſt 10; & ils ſeront les plus petits dans leur claſſe, à cauſe que le plus petit multiple commun de a & de b eſt 12, & que le nombre 8 eſt moindre que 12: que ſi l'on demande d'autres multiples qui ayent la même différence, il ſera facile de les trouver par une addition continuelle du plus petit multiple commun 12; comme 20 & 30, dont on fait par ce moyen 32 & 42, 44 & 54, &c. à l'infini.

LEMME 5.

THEOREME.

174. *Soient* a *&* b *deux quantités dont la plus grande meſure commune eſt* c: *je dis que ſi deux multiples inégaux de* a *&* b *ſont pris & comparés enſemble,*

ble, leur différence ne ſauroit jamais être plus petite que la plus grande meſure commune c.

Car puiſque, par la ſuppoſition, c meſure tant a que b, il faut qu'il meſure non ſeulement tous leurs multiples, mais auſſi les différences de ces multiples; & par conſéquent il ne ſauroit y avoir de différence plus petite que c. C. Q. F. D.

LEMME 6.

PROBLEME.

175. *Deux nombres, comme* a *&* b, *dont* a *eſt ſuppoſé le plus grand, étant donnés, on demande deux multiples inégaux de ces nombres, dont la différence ſoit la plus petite poſſible, c'eſt-à-dire, par le dernier article, dont la différence ſoit la plus grande meſure commune de* a *&* b.

SOLUTION.

Soit le plus grand nombre 270 & le plus petit 112, dont la plus grande meſure commune trouvée par l'Art. 21, eſt 2: il s'agit de trouver un multiple de 270 & un autre de 112, dont la différence ſoit 2, & cela, de quel des deux multiples qu'on veuille faire le plus grand. Ici $a=270$, & $b=112$. Je place ces deux équations l'une ſous l'autre dans la forme ſuivante:

$$\begin{aligned} &1^{\text{ére}}, \quad 1a-0b=+270,\\ &2^{\text{de}}, \quad 0a-1b=-112. \end{aligned}$$

Où $0a$ & $-0b$ ſont mis ſimplement pour donner à ces équations la même forme qu'ont celles que j'en dérive de la maniére que voici: d'abord je diviſe 270 le terme abſolu de la premiére équation par 112 terme abſolu de la ſeconde, ſans avoir égard au ſigne qui la précéde, & le plus proche quotient trop petit eſt 2; ainſi je multiplie la ſeconde équation par 2, & le produit eſt $0a-2b=-224$; j'ajoûte à cette nouvelle équation la premiére, $1a-0b=+270$, & la ſomme eſt $a-2b=+46$, que je mets au-deſſous des deux autres pour avoir une troiſiéme équation, comme on peut le voir dans la table ci-jointe: enſuite, je diviſe 112 terme abſolu de la ſeconde équation, ſans avoir égard au ſigne qui le précéde, par 46 terme abſolu de la troiſiéme équation, & le plus proche quotient trop petit eſt 2; ainſi je multiplie la troiſiéme équation par 2, & le produit eſt $2a-4b=92$; j'ajoûte à cette équation celle qui eſt immédiatement au-deſſous, ſavoir $0a-1b=-112$, & la ſomme fait une quatriéme équation, ſavoir $2a-5b=-20$, que je mets à ſa place dans

dans la table : puis je diviſe 46 terme abſolu de la troiſiéme équation par 20 terme abſolu de la quatriéme, & je trouve encore que le plus proche quotient trop petit eſt 2 ; c'eſt pourquoi à 2 fois la quatriéme équation j'ajoûte la troiſiéme, ce qui me donne pour cinquiéme équation $5a - 12b = +6$: cette équation étant écrite où il faut, je diviſe 20 terme abſolu de la quatrieme équation par 6 terme abſolu de la cinquiéme, & le plus proche quotient trop petit eſt 3 ; j'ajoûte donc trois fois la cinquiéme équation à la quatriéme, & forme par-là une ſixiéme équation, ſavoir, $17a - 41b = -2$: enfin, je diviſe 6 terme abſolu de la cinquiéme équation par 2 terme abſolu de la ſixiéme, & le quotient exact eſt 3, mais le plus proche trop petit eſt 2 : ſi préſentement à trois fois la ſixiéme équation j'ajoûtois la cinquiéme, j'aurois $56a - 135b = 0$; mais parce que je n'ai pas beſoin d'une équation dont le terme abſolu eſt zéro, mais ſeulement d'une équation dont le terme abſolu eſt le plus petit poſſible, au-lieu de me ſervir du vrai quotient 3 je prends 2 le plus proche quotient trop petit, comme j'avois toujours fait juſque-là, & ajoûtant ainſi la cinquiéme équation à deux fois la ſixiéme, j'en forme une ſeptiéme, ſavoir, $39a - 94b = +2$.

Ayant ainſi achevé ma ſérie d'équations, je vois manifeſtement que les deux derniéres équations réſolvent le problême ; car ſi le multiple de a doit être plus grand que celui de b, $39a$ & $94b$ ſeront les multiples requis, puiſque $39a - 94b = +2$; mais ſi le multiple de b devoit être plus grand que celui de a, alors $17a$ & $41b$ ſeroient les multiples cherchés, à cauſe que $17a - 41b = -2$, & par conſéquent $41b - 17a = +2$: c'eſt de quoi l'on peut aiſément s'aſſurer par le calcul ; car ſi a eſt 270, & b 112, nous aurons $39a = 10530$, $94b = 10528$, $17a = 4590$, $41b = 4592$.

Eq. 1, $1a - 0b = +270$.
2, $0a - 1b = -112$.
3, $a - 2b = +46$.
4, $2a - 5b = -20$.
5, $5a - 12b = +6$.
6, $17a - 41b = -2$.
7, $39a - 94b = +2$.

Enfin, on ne ſauroit douter que cette ſérie de termes abſolus dans les équations dont il s'agit, ne ſe termine toujours par la plus grande meſure commune de a & de b, ſi l'on conſidére avec attention la méthode qu'il faut ſuivre pour trouver la plus grande meſure commune : méthode que nous avons preſcrite dans l'Art. 21, & qui eſt préciſément la même que celle qui nous a ſervi à trouver les termes abſolus ; car pour

trouver la plus grande mesure commune des nombres 270 & 112, 270 doivent être divisés par 112, 112 par 46, 46 par 20, 20 par 6, & 6 par 2, & la suite 270, 112, 46, 20, 6, 2, est terminée par la plus grande mesure commune: mais cette série est la même que celle des termes absolus trouvés ci-dessus, excepté que dans cette derniére la plus grande mesure commune est répétée, ce qui vient de ce que le vrai quotient n'a pas été pris, mais seulement le plus proche quotient trop petit; c'est pourquoi une des deux dernières équations pourra toujours résoudre le problême. C. Q. F. D.

Corollaire 1.

Puisque la fraction $\frac{a}{b}$ ou $\frac{270}{112}$, réduite à ses moindres termes, est $\frac{135}{56}$, il paroît clairement par l'Art. 171, que $56a = 135b$ est le dernier multiple commun de a & de b, & par conséquent $56a - 135b = 0$ est la plus simple équation qui puisse avoir 0 pour son terme absolu. Que cette équation soit ajoûtée continuellement à l'une des deux derniéres équations qui résolvent le problême, & l'on aura un nombre infini de solutions du même problême, c'est-à-dire, qu'on aura un nombre infini d'équations dont les termes absolus seront $+2$ ou -2: par exemple, si à la derniére équation $39a - 94b = 2$ on ajoûte l'équation $56a - 135b = 0$, on aura $95a - 229b = 2$; & si la même équation est ajoûtée encore une fois, il viendra $151a - 364b = 2$; & ainsi de suite: d'un autre côté, si à la pénultiéme équation, savoir, $17a - 41b = -2$ on ajoûte l'équation $56a - 135b = 0$, on aura $73a - 176b = -2$; & si la même équation est encore une fois ajoûtée, il viendra $129a - 311b = -2$, & de même à l'infini.

Corollaire 2.

Les termes absolus des équations marquées ci-dessus seront toujours affirmatifs & négatifs alternativement, & le terme absolu de la derniére équation se trouvera négatif ou affirmatif suivant que le nombre des équations est pair ou impair: ainsi dans la table précédente les termes absolus sont $+270, -112, +46, -20, +6, -2, +2$, & le dernier, qui occupe un lieu impair, est $+2$.

Scholie.

Voici quel seroit le problême précédent exprimé Algébraïquement. *Deux nombres* a & b, *dont la plus grande mesure commune est* c, *étant donnés, on demande deux autres nombres* x & y, *qui soient tels, qu'étant multipliés par les nombres* a & b *respectivement, la différence des produits* $ax - by$ *se trouve égale à* $+$ *ou* $-$ c.

Nous

Nous n'avons ici qu'une ſeule équation pour trouver les valeurs de deux inconnues; & c'eſt à cauſe de cela même que le problême admet une infinité de ſolutions, ſavoir, par une addition continuelle de l'équation $56a - 135b = 0$, comme dans le Corollaire 1: mais quoique cette équation puiſſe continuellement être ajoûtée à quelqu'une des équations de la table précédente, & cela à l'infini, il ne ſuit point delà qu'on puiſſe la ſouſtraire de quelqu'une d'elles; ce qui prouve manifeſtement que ces équations ſont les plus ſimples de leur eſpéce; c'eſt-à-dire, les plus ſimples de toutes les autres qui ont les mêmes termes abſolus. (Voyez Art. 173.) C'eſt ce que nous démontrerons d'une maniére plus générale dans l'Art. 177. En attendant, comme il importe de former des concluſions générales concernant la nature de ces équations, il ſera bon dans toutes les équations, excepté les deux premiéres, de déſigner les coëfficiens de a & de b au moins, par des caractéres indéterminés: par exemple, dans la troiſiéme équation nous avons $1a - 2b = +46$; faites $p = 1$ & $P = 2$, & vous aurez $pa - Pb = +46$: pareillement dans la quatriéme équation, ſi q eſt fait égal à 2 & Q égal à 5, vous aurez $qa - Qb = -20$; & ainſi de ſuite. Voyez les équations exprimées de cette façon:

Eq. 1, $1a - 0b = +270.$
2, $0a - 1b = -112.$
3, $pa - Pb = +46.$
4, $qa - Qb = -20.$
5, $ra - Rb = +6.$
6, $sa - Sb = -2.$
7, $ta - Tb = +2.$

LEMME 7.

THEOREME.

176. *Si dans quelqu'une des équations de l'Article précédent, les coëfficiens de* a *&* b *ſont multipliés en croix par les coëfficiens de* a *&* b *dans l'équation la plus proche, ſoit au-deſſus ou au-deſſous, le coëfficient de* b *étant conſidéré comme affirmatif, je dis que la différence des deux produits, qui naîtront de cette multiplication, ſera toujours égale à l'unité.*

Comme par exemple, qu'on prenne les deux derniéres équations, & que t coëfficient de a dans la derniére équation ſoit multiplié par S coëfficient de b dans la pénultiéme; pareillement que T coëfficient de b dans la derniére équation ſoit multiplié par s coëfficient de a dans la pénultiéme: je dis, que la différence entre les produits tS & Ts ſera égale à

l'unité; & que la même choſe aura lieu dans toute l'étendue de la ſérie, pourvu que les équations, dont on fera uſage, ſoient voiſines.

Pour démontrer ceci, ſoit le terme abſolu de l'avant-pénultiéme équation diviſé par le terme abſolu de la pénultiéme, & que le plus proche quotient trop petit ſoit n; il eſt clair en ce cas par la nature de ces équations, que $ns a + ra$ ſera égal à ta, & que $-nSb - Rb$ ſera égal à $-Tb$; donc $ns + r = t$, & $nS + R = T$. Subſtituez maintenant au lieu de t & T leurs valeurs ainſi trouvées, & vous aurez $tS = nSs + Sr$, & $Ts = nSs + sR$; donc la différence entre tS & Ts ſera la même que la différence entre sR & Sr; & par la même raiſon, la différence entre sR & Sr eſt la même que la différence entre rQ & Rq; & cette derniére la même que la différence entre qP & Qp, &c. Donc ſi cette différence dans deux équations voiſines quelconques eſt connue, elle le ſera par-tout, comme étant par-tout la même; mais 1 coëfficient de a dans la premiére équation étant multiplié par 1 coëfficient affirmatif de b dans la ſeconde, donne pour produit 1; & de plus 0 coëfficient de b dans la premiére équation étant multiplié par 0 coëfficient de a dans la ſeconde, donne 0 pour produit, & la différence entre les produits 1 & 0 eſt 1; donc la différence des produits ſera par-tout 1. C. Q. F. D.

LEMME 8.

THEOREME.

177. *Suppoſant tout comme dans les deux derniers articles, ſi les coëfficiens de* a *& de* b *dans les différentes équations du ſcholie ajoûté à l'Art.* 175, *ſont tournés en fractions, en faiſant des coëfficiens de* b *les numérateurs, & de ceux de* a *les dénominateurs; je dis cela étant, que les fractions* $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{P}{p}, \frac{Q}{q}, \frac{R}{r}, \frac{S}{s}, \frac{T}{t}$ *ſeront toutes réduites à leurs moindres termes.*

Car ſi la fraction $\frac{T}{t}$ par exemple, peut être exprimée plus ſimplement encore, les nombres T & t doivent admettre quelque meſure commune plus grande que l'unité, ſoit cette meſure commune appellée m; puis donc que le nombre m meſure les nombres T & t, il doit meſurer auſſi les produits Ts & tS, & par conſéquent leur différence; mais la différence de ces deux produits eſt l'unité, par le dernier article; donc m nombre plus grand que l'unité doit meſurer l'unité, ce qui eſt abſurde; par conſéquent la fraction $\frac{T}{t}$ eſt réduite aux plus ſimples termes: & la même remarque eſt applicable à toutes les autres. C. Q. F. D.

Co-

COROLLAIRE.

Si le terme abſolu de la pénultiéme équation, qui eſt la plus grande meſure commune de a & de b, eſt diviſé par le terme abſolu de la derniére, qui eſt pareillement la même meſure commune, le quotient ſera 1: donc ſi la derniére équation eſt multipliée par 1, & qu'au produit on ajoûte la pénultiéme équation, ou ce qui revient au même, ſi l'on ajoûte enſemble les deux derniéres équations, il en naîtra une équation de cette forme $va - Vb = 0$, les deux termes abſolus ſe détruiſant l'un l'autre; donc $\frac{V}{v} = \frac{a}{b}$; mais la fraction $\frac{V}{v}$ eſt réduite aux plus ſimples termes par le préſent théorême, comme ayant été produite préciſément de-même que toutes les autres; par conſéquent $av - bV$ eſt le plus petit multiple commun de a & de b, & l'équation $av - bV = 0$ eſt la plus ſimple de celles qui peuvent avoir 0 pour terme abſolu: mais av & bV ſont de plus grands multiples de a & de b qu'aucun autre de ceux que donne l'Art. 175, comme il paroît manifeſtement par la génération de ces équations; donc l'équation $av - bV = 0$ ne ſauroit être retranchée de quelqu'une de ces équations, au-moins ſans détruire le coëfficient a; donc ces équations ſont les plus ſimples de leur eſpéce.

LEMME 9.

THEOREME.

178. *Suppoſant tout comme dans le dernier Article, je dis que les fractions* $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{P}{p}, \frac{Q}{q}, \frac{R}{r}, \frac{S}{s}, \frac{T}{t}$ *ſont de nature à ſe trouver alternativement plus grandes & plus petites que la fraction* $\frac{a}{b}$, *vers laquelle néanmoins elles ſont conſtamment convergentes.*

Ainſi la fraction $\frac{0}{1}$ eſt infiniment plus petite que la fraction $\frac{a}{b}$, & la fraction $\frac{1}{0}$ eſt infiniment plus grande; car plus le dénominateur d'une fraction, toutes choſes d'ailleurs égales, eſt petit, plus la fraction même eſt grande; par conſéquent ſi le dénominateur eſt zéro ou infiniment petit, la valeur d'une pareille fraction doit être infiniment grande: de-même encore la fraction $\frac{P}{p}$ eſt plus petite que $\frac{a}{b}$, & la fraction $\frac{Q}{q}$ plus grande, & ainſi alternativement. Je dis de plus, que la frac-

tion $\frac{Q}{q}$ approche davantage de $\frac{a}{b}$ que ne fait la fraction $\frac{P}{p}$, & la fraction $\frac{R}{r}$ plus que $\frac{Q}{q}$, & ainſi de ſuite.

Pour le démontrer, ſoit l'équation $ca - Cb = \pm d$ une expreſſion générale de toutes les équations de l'Art. 175: diviſant les deux membres par bc, nous aurons $\frac{a}{b} - \frac{C}{c} = \pm \frac{d}{bc}$; d'où j'infére, 1°. que la fraction $\frac{a}{b}$ ſera plus grande ou plus petite que la fraction $\frac{C}{c}$, ſuivant que le terme abſolu d eſt affirmatif ou négatif: 2°. que plus le terme abſolu d eſt petit, où le dénominateur c grand, plus la fraction $\frac{C}{c}$ approchera de la fraction $\frac{a}{b}$: mais dans toute l'étendue de la ſérie des équations de l'Art. 175, les termes abſolus ſont alternativement affirmatifs & négatifs; donc la ſérie des fractions déduites de ces équations ſera de telle nature, que les fractions ſe trouveront alternativement plus petites & plus grandes que la fraction $\frac{a}{b}$: il eſt manifeſte auſſi par la nature des équations dont il s'agit, que la ſérie des termes repréſentés par d ira conſtamment en diminuant, au-lieu que celle des termes repréſentés par c ira en croiſſant; & par ces deux raiſons, les fractions repréſentées par $\frac{C}{c}$ doivent être convergentes de part & d'autre vers la fraction $\frac{a}{b}$.

Corollaire.

Donc ſi l'on prend deux fractions voiſines, comme $\frac{T}{t}$ & $\frac{S}{s}$, la fraction $\frac{a}{b}$ doit ſe trouver entre elles, mais de façon à être plus près de la fraction $\frac{T}{t}$ que de la fraction $\frac{S}{s}$, ſans quoi la ſérie ne ſeroit pas convergente.

Lemme 10.

Theoreme.

179. *Suppoſant tout comme dans les Articles précédens, je dis que les fractions* $\frac{P}{p}, \frac{Q}{q}, \frac{R}{r}, \frac{S}{s}, \frac{T}{t}$, *expriment la fraction* $\frac{a}{b}$ *plus exactement, que ne pourroit faire aucune autre fraction quelconque dont le dénominateur ſeroit plus petit; & particuliérement, que la fraction* $\frac{T}{t}$ *approche davantage de la fraction* $\frac{a}{b}$ *que ne*

peut

peut faire aucune autre fraction dont le dénominateur eſt plus petit que t.

Si on le nie, ſoit $\frac{C}{c}$ une fraction dont le dénominateur c eſt plus petit que t; je dis donc que $\frac{C}{c}$ ne ſauroit être égal à $\frac{T}{t}$; car la fraction $\frac{T}{t}$ eſt déjà réduite aux plus ſimples termes, par l'Art. 177; donc ſi la fraction $\frac{C}{c}$ étoit égale à la fraction $\frac{T}{t}$, le dénominateur c devroit être égal au dénominateur t, ou quelque multiple de ce dénominateur, au-lieu que c eſt plus petit que t par l'hypothéſe: or comme la fraction $\frac{a}{b}$ ſe trouve entre les deux fractions $\frac{T}{t}$ & $\frac{S}{s}$, mais plus près de $\frac{T}{t}$ par le dernier Article, il s'enſuit que ſi la fraction $\frac{C}{c}$ approche plus de $\frac{a}{b}$ que ne fait la fraction $\frac{T}{t}$, elle doit auſſi ſe trouver entre $\frac{T}{t}$ & $\frac{S}{s}$; mais la différence entre $\frac{T}{t}$ & $\frac{S}{s}$ eſt $\frac{1}{ts}$, par l'Art. 176; & la différence entre $\frac{C}{c}$ & $\frac{S}{s}$ eſt $\frac{Cs-cS}{cs}$, ou $\frac{cS-Cs}{cs}$; & cette différence ne ſauroit être plus petite que $\frac{1}{cs}$: puis donc que $\frac{1}{cs}$ eſt plus grand que $\frac{1}{ts}$ à cauſe que c eſt plus petit que t, il s'enſuit que la différence entre $\frac{S}{s}$ & $\frac{C}{c}$ eſt plus grande que la différence entre $\frac{S}{s}$ & $\frac{T}{t}$; donc la fraction $\frac{C}{c}$ ne ſauroit ſe trouver entre les deux fractions $\frac{S}{s}$ & $\frac{T}{t}$, & par cela même ne ſauroit approcher autant de la fraction $\frac{a}{b}$ que fait la fraction $\frac{T}{t}$. *C. Q. F. D.*

Scholie 1.

En calculant les équations de l'Art. 175, nous avons trouvé pour quotiens, 2, 2, 2, 3, 2, le dernier quotient 3 ayant été diminué d'une unité, afin de donner au problême une ſolution telle qu'il falloit pour répondre au but qu'on s'y propoſoit; mais ſi le vrai quotient 3 avoit été pris, la derniére équation auroit été $56a-135b=0$, & la fraction dérivée de cette équation ſe ſeroit trouvée être $\frac{135}{56}$, qui n'eſt autre choſe que la fraction $\frac{a}{b}$ réduite à ſes plus ſimples termes; donc ſi le dernier quotient eſt pris tel qu'il faut, les fractions dérivées de ces équations, ſavoir, $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{41}{17}$, $\frac{135}{56}$ ſeront non ſeulement convergentes des deux

côtés

côtés vers la fraction intermédiaire $\frac{a}{b}$, mais à la fin s'y termineront actuellement.

Pour ce qui eſt de la maniére de calculer ces fractions, il n'eſt pas néceſſaire d'introduire les termes a & b dans la ſérie, & moins encore de faire le calcul des équations pour en déduire les fractions; car comme les termes de ces fractions ne ſont autre choſe que les coëfficiens de a & de b, on peut les avoir plus aiſément en s'y prenant de la maniére que nous allons dire. Soit propoſée la fraction $\frac{270}{112}$, dont le numérateur & le dénominateur ſont les termes a & b, comme dans l'Art. 175, & qu'on demande de trouver d'autres fractions de moindres dénominations qui, quoique pas égales à la fraction propoſée, ne laiſſent pas d'en approcher autant que la néceſſité préſente l'exige, & plus que ne pourroit faire une autre fraction quelconque de plus petite dénomination que celle-ci: ici le plus grand nombre 270 diviſé par le moindre 112 donne pour quotient 2, & il reſte 46; 112 diviſés par 46 donnent pour quotient 2, & il reſte 20; 46 diviſés par 20 donnent 2, & il reſte 6; 20 diviſés par 6 donnent 3, & il reſte 2; & enfin 6 diviſés par 2 donnent 3, & il reſte 0; ainſi les quotiens nés de cette diviſion continuelle ſont 2, 2, 2, 3, 3. Ces quotiens étant ainſi trouvés, je prends deux fractions $\frac{0}{1}$ & $\frac{1}{0}$ pour commencer, & multiplant 1 & 0, termes de la derniére fraction, par le premier quotient 2, les produits ſont 2 & 0, auxquels j'ajoûte 0 & 1, termes de la premiére fraction, & trouve par-là 2 & 1 pour termes de ma premiére fraction finie; ainſi ma premiére fraction finie eſt $\frac{2}{1}$; je multiplie ces termes 2 & 1 par mon ſecond quotient 2, & les produits ſont 4 & 2, auxquels ajoûtant 1 & 0, termes de la fraction immédiatement précédente, j'ai pour nouvelle fraction $\frac{5}{2}$; ces termes 5 & 2 doivent être multipliés par mon troiſiéme quotient 2, & les produits ſeront 10 & 4, leſquels par l'addition de 2 & de 1, termes de la fraction immédiatement précédente, forment une fraction égale à $\frac{12}{5}$; je multiplie ces termes 12 & 5 par mon quatriéme quotient 3, & les produits ſont 36 & 15, qui augmentés de 5 & de 2, termes de la fraction immédiatement précédente, donnent $\frac{41}{17}$ pour termes d'une quatriéme fraction; enfin je multiplie 41 & 17 par mon dernier quotient 3, & les produits ſont 123 & 51, qui avec 12 & 5, termes de la fraction précédente, me donnent $\frac{135}{56}$ pour ma derniére fraction; donc les fractions ainſi trouvées ſont $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{41}{17}$, $\frac{135}{56}$. Obſervons ici, que ſi j'avois

j'avois placé la fraction $\frac{1}{0}$ avant la fraction $\frac{0}{1}$, & que j'euſſe enſuite dérivé les autres fractions de celles-ci comme auparavant, ces fractions auroient paru ſous cette forme, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{17}{41}$, $\frac{56}{135}$, & auroient différé de celles que nous avons trouvées ci-deſſus, en ce que les numérateurs des unes ſervent de dénominateurs aux autres, & réciproquement : ces derniéres fractions auroient auſſi été convergentes, & ſe ſeroient à la fin confondues avec la fraction intermédiaire $\frac{b}{a}$, avec cette différence néanmoins, que dans le cas préſent la premiére fraction $\frac{1}{2}$ auroit été plus grande que $\frac{b}{a}$, la fraction $\frac{2}{5}$ plus petite, & ainſi alternativement.

Pour faire appercevoir plus diſtinctement l'approximation de ces fractions, je les réduirai toutes à d'autres fractions dont le numérateur commun ſera 270, de la maniére ſuivante : comme 2 le numérateur de la premiére fraction eſt à 1 le dénominateur, ainſi 270 le nouveau numérateur de la même fraction à 135 le nouveau dénominateur ; donc $\frac{2}{1} = \frac{270}{135}$: fraction qui ne différe pas davantage de $\frac{270}{112}$ qu'on ne devoit s'y attendre, eu égard à la ſimplicité de la fraction $\frac{2}{1}$: 2°, comme 5 le numérateur de la fraction ſuivante eſt à 2 le dénominateur, ainſi 270 à 108 ; donc $\frac{5}{2} = \frac{270}{108}$, fraction qui différe beaucoup moins de $\frac{270}{112}$ que n'en différoit la premiére fraction $\frac{2}{1}$: 3°, comme 12 le numérateur de la fraction ſuivante eſt à 5 le dénominateur, ainſi 270 à $112\frac{1}{2}$; donc $\frac{12}{5} = \frac{270}{112\frac{1}{2}}$, ce qui approche de bien près de $\frac{270}{112}$: 4°, comme 41 le numérateur de la fraction ſuivante eſt à 17 le dénominateur, ainſi 270 à $111\frac{15}{17}$ ou $112 - \frac{1}{17}$ à peu près ; par conſéquent $\frac{41}{17} = \frac{270}{112 - \frac{1}{17}}$: enfin, comme 135 le numérateur de la derniére fraction eſt à 56 le dénominateur, ainſi 270 à 112 ; donc $\frac{135}{56} = \frac{270}{112}$.

Un autre exemple de cette ſorte d'approximation pourra nous être fourni par la raiſon de la circonférence d'un cercle à ſon diamétre, laquelle, ſuivant les nombres de *van Ceulen*, eſt la même que celle de 314159265359, à 100000000000. Ici faiſant $a = 314159265359$, & $b = 100000000000$, qu'il ſoit queſtion de trouver une fraction en termes plus ſimples, qui exprime à peu près la fraction $\frac{a}{b}$, c'eſt-à-dire, qui en approche davantage qu'aucune autre qui ait un plus petit dénomina-

minateur. Voici comment il faudra s'y prendre: 1°, a diviſé par b donne pour quotient 3, & il reſte $c=14159265359$: 2°, b diviſé par c donne pour quotient 7, & il reſte $d=885142487$: 3°, c diviſé par d donne pour quotient 15, & il reſte $e=882128054$: 4°, d diviſé par e donne pour quotient 1, & il reſte $f=3014433$: 5°, e diviſé par f donne pour quotient 292, & il reſte $g=1913618$. Ce dernier quotient 292 étant ſi grand, j'en infére que les quatre premiers quotiens 3, 7, 15 & 1 donneront la derniére fraction aſſez exactement, les termes devant en être multipliés par 292 pour avoir une autre fraction plus exacte. Ainſi faiſant uſage des quatre premiers quotiens 3, 7, 15 & 1, je continue mon opération, comme dans l'exemple précédent, & trouve par-là quatre fractions $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ & $\frac{355}{113}$: cette derniére ſera ſuffiſante pour la pratique; car puiſque la circonférence d'un cercle eſt au diamétre comme a eſt à b, & que la fraction $\frac{a}{b}$ approche de fort près de $\frac{355}{113}$, il s'enſuit que la circonférence eſt au diamétre comme 355 à 113 à peu près, ou comme $\frac{355}{113}$ à 1, ou (réduiſant la fraction en parties décimales) comme 3.1415929 à 1, ou enfin comme 31415929 à 10000000: l'antécédent de cette derniére proportion eſt exactement vrai juſqu'à 7 & preſque juſqu'à 8 caractéres; car les termes auroient dû être comme 31415927 à 10000000.

Ceux qui voudroient ſe ſouvenir, ſans le moindre effort de mémoire, de la proportion que nous avons aſſignée ici entre le diamétre & la circonférence du cercle, peuvent faire uſage de la méthode ſuivante: il faut écrire les trois premiers nombres impairs 1, 3 & 5, puis les écrire encore une fois, de façon que chaque nombre ſoit ſuivi de celui qui lui eſt égal, ce qui donne 113355: ce nombre étant diviſé en deux parties, chacune de trois caractéres, les trois premiers, ſavoir 113, déſigneront le diamétre, & les trois derniers la circonférence.

Scholie 2.

Les fractions dont il a été parlé dans le dernier ſcholie peuvent s'appeller fractions principales, étant toutes convergentes vers la fraction intermédiaire $\frac{a}{b}$, avec laquelle elles ſe confondent à la fin; mais ſi l'on vouloit que la ſuite fût complette, il faudroit, toutes les fois que le quotient ſe trouveroit plus grand que l'unité, inférer des fractions ſecondaires entre les fractions principales, en changeant la multiplication preſcrite dans le dernier article en addition continuelle: pour cet effet, il faut faire deux

deux rangs de fractions, le rang ſupérieur pour les fractions plus grandes que $\frac{a}{b}$, & le rang inférieur pour celles qui ſont plus petites que $\frac{a}{b}$, deſorte que $\frac{1}{0}$ ſoit la premiére fraction du rang ſupérieur, & $\frac{0}{1}$ la premiére du rang inférieur. Cela étant, ſi vous faites uſage de l'exemple du ſcholie précédent, où les quotiens étoient 2, 2, 2, 3, 3, à cauſe que les équations de l'Art. 175. étoient particuliérement adaptées à ce cas, ajoûtez les termes de la fraction $\frac{1}{0}$ deux fois aux termes de la fractions $\frac{0}{1}$, parce que le premier quotient a été 2, & vous aurez deux fractions, qui naîtront de cette addition continuelle, ſavoir, $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{1}$, qu'il faudra placer dans le rang inférieur : ajoûtez les termes de cette derniére fraction $\frac{2}{1}$ deux fois aux termes de la fraction, $\frac{1}{0}$, parce que le ſecond quotient a été deux, & vous aurez deux fractions $\frac{3}{1}$ & $\frac{5}{2}$, qu'il faudra placer dans le rang ſupérieur.; ajoûtez les termes de cette derniére fraction $\frac{5}{2}$ deux fois aux termes de la derniére fraction $\frac{2}{1}$ dans le rang inférieur, parce que le troiſiéme quotient a été 2, & vous aurez les fractions $\frac{7}{3}$ & $\frac{12}{5}$ pour être placées dans le rang inférieur; ajoûtez les termes de cette derniére fraction $\frac{12}{5}$ trois fois aux termes de la derniére fraction $\frac{5}{2}$ dans le rang ſupérieur, parce que le quatriéme quotient étoit 3, & vous aurez $\frac{17}{7}$ $\frac{29}{12}$ & $\frac{41}{17}$ à mettre dans le rang ſupérieur : ajoûtez les termes de cette derniére fraction $\frac{41}{17}$ trois fois à la derniére fraction $\frac{12}{5}$ dans le rang inférieur, parce que le dernier quotient étoit 3, & vous aurez $\frac{53}{22}$, $\frac{94}{39}$ & $\frac{135}{56}$ à mettre dans le rang inférieur : & vous aurez ainſi achevé la ſérie entiére, ou plutôt les deux ſéries de fractions, la ſérie ſupérieure étant compoſée des fractions qui ſont plus grandes que $\frac{a}{b}$, & la ſérie inférieure de celles qui ſont moindres que cette fraction, comme on peut le voir par la table ſuivante.

Fractions plus grandes qu'il ne faut, $\frac{1}{0}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{17}{7}$ $\frac{29}{12}$ $\frac{41}{17}$.

Fractions plus petites qu'il ne faut, $\frac{0}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{7}{3}$ $\frac{12}{5}$ $\frac{53}{22}$ $\frac{94}{39}$ $\frac{135}{56}$.

La derniére fraction dans le rang inférieur, ſavoir $\frac{135}{56}$, eſt égale à $\frac{a}{b}$, & par conſéquent, à proprement parler, n'appartient à aucun des deux rangs: chaque fraction dans le rang ſupérieur approche davantage de $\frac{a}{b}$ que ne peut faire aucune autre fraction exprimée en termes plus ſimples, & qui eſt plus grande que $\frac{a}{b}$, & chaque fraction dans le rang inférieur approche pareillement davantage de $\frac{a}{b}$ que ne peut faire aucune autre fraction exprimée en termes plus ſimples, & qui eſt plus petite que $\frac{a}{b}$; mais il arrive quelquefois qu'une fraction d'un côté n'en approche pas ſi près qu'une autre de l'autre, quoique conçue en termes moins ſimples: c'eſt ainſi que la fraction $\frac{17}{7}$ dans le rang ſupérieur différe davantage de $\frac{270}{112}$ ou $\frac{a}{b}$ d'un côté, que la fraction $\frac{12}{5}$ ne fait de l'autre; car l'excès de $\frac{17}{7}$ par-deſſus $\frac{270}{112}$ eſt $\frac{1}{56}$ ou $\frac{10}{560}$, au-lieu que l'excès de $\frac{270}{112}$ par-deſſus $\frac{12}{5}$ eſt $\frac{6}{560}$; mais cela n'arrive jamais, quand la fraction qui a le plus grand dénominateur eſt une fraction principale.

Tout ce qui vient d'être dit dans ce ſcholie ſe comprendra plus aiſément, ſi l'on traite les équations de l'Art. 175. préciſément comme les fractions ont été traitées ici, c'eſt-à-dire, ſi l'on change la multiplication pratiquée dans cet article en addition continuelle; mais pour mieux diſtinguer ces équations, faites deux colomnes & placez toutes les équations dont les termes abſolus ſont négatifs dans la colomne qui eſt à gauche, & toutes celles dont les termes abſolus ſont affirmatifs à la droite, de-ſorte que la premiére équation à la gauche ſoit $0a-1b=-112$, & la premiére à la droite $1a-0b=+270$: cela étant fait, voici comment il faut continuer l'opération: premiérement, ajoûtez l'équation $0a-1b=-112$ deux fois à l'équation $1a-0b=+270$, & vous aurez deux équations à mettre dans la colomne à droite, ſavoir, $1a-1b=+158$, & $1a-2b=+46$: ſecondement, ajoûtez cette derniére équation $1a-2b=+46$ deux fois à l'équation $0a-1b=-112$, & vous aurez deux équations à mettre dans la colomne à gauche, ſavoir, $1a-3b=-66$, & $2a-5b=-20$: en troiſiéme lieu, ajoûtez cette derniére équation deux fois à l'équation $1a-2b=+46$, & vous aurez deux équations à mettre dans la colomne à droite, ſavoir $3a-7b=+26$, & $5a-12b=+6$: en quatriéme lieu, ajoûtez cette derniére équation trois fois à l'équa-

l'équation $2a-5b=-20$, & vous aurez trois équations à mettre à la gauche, ſavoir, $7a-17b=-14$, $12a-29b=-8$, & $17a-41b=-2$: enfin, ajoûtez cette derniére équation à trois fois l'équation $5a-12b=+6$, & vous aurez trois équations à mettre dans la colomne à droite, ſavoir $22a-53b=+4$, $39a-94b=+2$, & $56a-135b=0$. Vous aurez achevé alors vos ſéries d'équations, dont les deux ſéries de fractions rapportées ci-deſſus ont été derivées.

$$\begin{aligned} 0a-1b&=-112.\\ 1a-3b&=-66.\\ 2a-5b&=-20.\\ 7a-17b&=-14.\\ 12a-29b&=-8.\\ 17a-41b&=-2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1a-0b&=+270.\\ 1a-1b&=+158.\\ 1a-2b&=+46.\\ 3a-7b&=+26.\\ 5a-12b&=+6.\\ 22a-53b&=+4.\\ 39a-94b&=+2.\\ 56a-135b&=0. \end{aligned}$$

Je pourrois m'étendre davantage ſur cette matiére, ſi je ne craignois pas d'avoir été trop prolixe, ſur-tout pour ceux, qui étant moins accoutumés à opérer ſur des nombres, ne ſentent pas ſi bien l'utilité de cette doctrine.

Cette méthode d'approximation eſt dûe à la ſagacité de feu Mr. *Cotes*, Profeſſeur en Aſtronomie & en Philoſophie Expérimentale dans cette Univerſité: génie heureux, qui concevoit & traitoit les ſujets les plus difficiles qui avoient rapport aux Mathématiques, avec une admirable ſimplicité; & dont les Ouvrages poſthumes publiés depuis peu par ſon digne ſucceſſeur le Dr. *Smith*, ſeront eſtimés auſſi longtems qu'il y aura parmi les hommes quelque reſte de jugement & de bon goût.

Mrs. *Wallis* & *Huygens* ont auſſi écrit ſur la matiére en queſtion; mais je penſe, que tout homme, qui voudra faire la comparaiſon, conviendra aiſément avec moi, que la méthode de Mr. *Cotes* eſt bien plus ſimple & plus facile qu'aucune des leurs.

LEMME II.

THEOREME.

180. *Qu'il y ait deux fractions* $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$ *telles, que ſi l'on diviſe* a *par* b, *&* c *par* d, *& que l'opération étant continuée ſuivant la méthode preſcrite pour trouver la plus grande meſure commune, les quotiens nés de ces diviſions ſoient trouvés les mêmes en grandeur, en ordre & en nombre: je dis, que les fractions* $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$ *ſeront égales l'une à l'autre.*

Pour le démontrer, ſuppoſons que les quotiens dans les deux cas ſoient 1, 2 & 3, & qu'à l'aide de ces quotiens on faſſe le calcul d'une ſérie convergente de fractions principales, comme dans le premier ſcholie du dernier Article, ſavoir $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$ $\frac{10}{7}$; cela étant il paroît manifeſtement que cette ſérie a un rapport égal aux deux fractions, ſera également convergente vers l'une & l'autre, & ſe confondra à la fin avec toutes les deux; donc les deux fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ doivent être égales, étant égales l'une & l'autre à la derniére fraction de la ſérie, ſavoir $\frac{7}{10}$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

Puiſque les deux fractions mentionnées dans le dernier Article, ſavoir, $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ſeront égales entre elles, ſoit que le nombre des diviſions & des quotiens ſe trouve petit ou grand, il eſt clair que la nature de cette égalité ne dépend pas de la ſuppoſition d'une derniére diviſion, quoique la démonſtration même en dépende; & par conſéquent cet Article ſera vrai, quand même le nombre des quotiens ſeroit infini.

SCHOLIE.

Si a, b, c & d, au-lieu de repréſenter des nombres, repréſentent d'autres quantités quelconques, & que les quotiens de la diviſion de a par b ſoient conſtamment les mêmes que les quotiens de la diviſion de c par d, le ſens du lemme précédent ſera, que a aura la même raiſon à b que c à d; & cela, ſoit que les quantités a, b, c, d ſoient commenſurables ou non: donc en cas, ſi nous poſons comme une définition de la proportionalité, que *Quatre quantités s'appellent proportionelles, quand les quotiens nés d'une diviſion continuelle des deux premiéres, ſont à tous égards les mêmes que les quotiens nés d'une diviſion continuelle des deux derniéres*; cette définition comprendra les incommenſurables, & nous permettra d'appliquer le mot de proportion à de pareilles quantités: car toute la différence entre la proportion des quantités commenſurables, & de celles qui ſont incommenſurables, ſe réduira à ceci, qu'au-lieu que dans le cas des quantités commenſurables la ſuite des quotiens a une fin, dans le cas des quantités incommenſurables cette ſuite continue à l'infini; mais les quotiens de la diviſion des deux premiers termes ſeront à tous égards les mêmes que ceux de la diviſion des deux derniers, ce qui prouve ſuffiſamment qu'ils ſont proportionels, & forme, ſuivant moi, la définition la plus

dif-

distincte qu'on puisse donner de la proportionalité, quoique d'un usage plus borné que n'est la cinquiéme définition du cinquiéme Livre des Elémens d'Euclide, à cause que les autres propriétés des grandeurs proportionelles ne sauroient pas s'en déduire aussi aisément.

DES INCOMMENSURABLES.

Apologie de la liberté que nous prenons d'introduire ici la doctrine des Incommensurables.

181. Si quelqu'un me taxe d'avoir péché contre les règles de la bonne méthode en introduisant ici la doctrine des incommensurables, je le prierai de considérer que mon premier problême ne doit nullement être rejetté, soit qu'on fasse attention à l'élégance du problême même, ou à l'étroite liaison qu'il a avec quelques-uns des Articles précédens, qu'il aide à éclaircir; & comme ce problême est purement rélatif aux incommensurables, & suppose même leur existence, j'ai cru devoir leur assigner une place en cet endroit. Quoi qu'il en soit, la doctrine des incommensurables nous fournit un exemple curieux & frappant de la subtilité de l'esprit humain, & par conséquent, pourvu qu'elle soit proposée d'une maniére concise & claire, tout Lecteur qui préfére le plaisir d'apprendre à celui de blâmer, saura gré à celui qui se donnera cette peine en sa faveur, quand même l'endroit auroit pu être mieux choisi. En voilà assez pour ma justification.

Je n'inférerai ici qu'une très-petite partie de ce qui se trouve plus au long dans Euclide sur ce sujet; & je commencerai d'abord par démontrer quelques propriétés qui découlent naturellement de l'idée d'incommensurabilité, & l'une de l'autre, après quoi je m'attacherai à découvrir un sujet dans lequel ces propriétés résident, ou, ce qui revient au même, je prouverai qu'il y a actuellement dans la Nature des quantités incommensurables.

N. B. Si quelque Lecteur souhaite d'être convaincu de l'existence des incommensurables, sans se donner la peine de parcourir tout ce qui nous reste à dire sur ce sujet, il pourra commencer par lire le cent quatre-vingt-deuxiéme Article, & puis passer à la dixiéme proposition & à celles qui suivent, ces propositions n'ayant presque aucune liaison avec le reste.

DEFINITIONS ET AXIÔMES.

182. Déf. 1ére. *Une quantité est dite en mesurer une autre, quand étant retranchée de cette autre autant de fois qu'il est possible, il ne reste rien.*

2de,

2de. *Quand une quantité en mesure deux autres, elle est appellée leur commune mesure.*

3éme. *Et les grandeurs sont appellées commensurables ou incommensurables, suivant qu'elles admettent ou n'admettent pas une commune mesure.*

4éme. *On appelle des nombres entiers premiers entre eux, quand ils n'admettent aucune autre mesure commune que l'unité.*

5éme. *Un nombre quarré, dans le sens où nous allons prendre ce terme ici, est un nombre entier; qui a pour sa racine quarrée ou lui-même, ou quelque autre nombre entier, à l'exclusion de toute fraction, tant à l'égard du quarré, que de sa racine.*

6éme. *Toutes les fois qu'un nombre entier plus petit en mesure un plus grand, le plus petit s'appelle une partie aliquote du plus grand, & le plus grand un multiple du plus petit.*

Scholie.

Les anciens Géométres, particuliérement ceux d'entre eux qui ont vécu avant *Archiméde*, me paroissent n'avoir presque fait aucun usage des fractions; mais la plupart des choses que nous faisons à l'aide des fractions, ils en venoient à bout par le moyen de la proportion en nombres entiers; de-sorte que par nombres, dans leurs écrits, il faut entendre des nombres entiers, & par parties aliquotes, des nombres entiers qui en mesurent d'autres plus grands: ainsi les parties aliquotes du nombre 6. étoient 1, 2 & 3; mais le nombre mixte $1\frac{1}{2}$, ou la fraction $\frac{3}{2}$, quoique compris dans 6 exactement quatre fois, n'entroit pas cependant dans la classe de ses parties aliquotes: & véritablement, si une pareille exclusion n'avoit point lieu, chaque nombre auroit autant de parties aliquotes qu'on voudroit, & la distinction entre des nombre premiers entre eux, & d'autres qui ne sont point premiers entre eux, se trouveroit entiérement abolie; notre idée de proportionalité en nombres deviendroit obscure & confuse; & cet excellent Traité des Nombres, qu'Euclide nous a donné dans le septiéme, huitiéme & neuviéme Livres de ses Elémens, ne seroit presque d'aucun usage. Ce n'est pas que je prétende ici nier la prodigieuse utilité des fractions dans toutes les opérations arithmétiques: car bien loin de la révoquer en doute, j'ai moi-même fréquemment employé les fractions dans des cas où d'autres font usage de la proportion, uniquement parce que je regardois les fractions comme plus traitables: mais tout ce que j'ai voulu dire se réduit proprement à ceci, que soit qu'on admette les fractions dans les opérations arithmétiques ou non, la doctrine des nombres entiers étant antérieure à celle des fractions, & distincte d'elle,

le, les Anciens ont eu raiſon de la traiter à part, ſans aucun égard aux fractions.

Corollaires deduits des Definitions.

1er. *Tous les nombres entiers ſont commenſurables*; car l'unité eſt la meſure commune d'eux tous.

2d. *Toutes les fractions ſont commenſurables:* car ſi les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ſont réduites à un même dénominateur, elles deviendront $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$; & $\frac{1}{bd}$ les meſurera l'une & l'autre.

3éme. *Tous les nombres entiers & les nombres mixtes comparés enſemble, tous les nombres mixtes comparés l'un avec l'autre, tous les nombres entiers & les fractions, tous les nombres mixtes & les fractions ſont commenſurables*: car tous les nombres mixtes peuvent être réduits en fractions, & tous les nombres entiers peuvent être conſidérés comme des fractions dont les dénominateurs ſont autant d'unités.

Axiôme 1er. *Si une quantité en meſure une ſeconde, & celle-ci une troiſiéme, la premiére quantité meſurera la troiſiéme.*

2de. *Une quantité quelconque, qui en meſure deux autres, meſurera auſſi leur ſomme & leur différence.*

3éme. *Deux quantités homogénes finies ne ſauroient jamais différer tellement l'une de l'autre, que la plus petite ne puiſſe être multipliée juſqu'à ce qu'elle ſurpaſſe la plus grande.*

4éme. *Des fractions égales peuvent être converties en raiſons égales exprimables par des nombres entiers, en faiſant des numérateurs les antecédens & des dénominateurs les conſéquens; & réciproquement, des raiſons égales exprimées par des nombres entiers, peuvent être changées en fractions égales.*

Proposition 1.

183. *Toutes les quantités commenſurables ſont l'une à l'autre comme nombre à nombre; & réciproquement, toutes les quantités qui ſont l'une à l'autre comme nombre à nombre, ſont commenſurables.*

Car premiéremenr, ſoient a & b deux quantités commenſurables; je dis qu'en ce cas la raiſon de a à b, quelle qu'elle ſoit, peut s'exprimer en nombres entiers: car comme a & b ſont des quantités commenſurables, que c ſoit leur meſure commune: ſuppoſons, par exemple, que c meſure exactement a trois fois, & b quatre fois, cela étant $3c=a$, & $4c=b$, & a ſera à b comme 3 à 4. *C. Q. F. D.*

Enſuite, que *a* & *b* ſoient deux quantités telles que la raiſon de *a* à *b* puiſſe être exprimée en nombres entiers; comme par exemple, que *a* ſoit à *b*, comme 3 à 4, & que *c* ſoit un tiers de *a*; cela étant, nous aurons $3c=a$ & $4c=b$, & la quantité *c* meſurera ainſi *a* & *b*; donc les quantités *a* & *b* ſeront commenſurables. *C. Q. F. D.*

Proposition. 2.

184. *Des quantités incommenſurables ne ſont pas l'une à l'autre comme nombre à nombre; & réciproquement, des quantités, qui ne ſont pas l'une à l'autre comme nombre à nombre, ſont incommenſurables.*

Premiérement, que *a* & *b* ſoient deux quantités incommenſurables; je dis que la raiſon de *a* à *b* ne ſaura être exprimée en nombres entiers: car ſi cela étoit poſſible, ces quantités *a* & *b* ſeroient commenſurables, par la derniére partie de la propoſition précédente, ce qui eſt contre l'hypothéſe. Enſuite, que les quantités *a* & *b* ſoient telles, que la raiſon de *a* à *b* ne puiſſe pas être exprimée en nombres entiers, je dis qu'en ce cas les quantités *a* & *b* ſeront incommenſurables; car ſi elles étoient commenſurables, la choſe ſeroit poſſible, par la premiére partie de la propoſition précédente. *C. Q. F. D.*

Corollaire.

Si la raiſon qu'ont entre elles des quantités incommenſurables ne ſauroit être exprimée en nombres entiers, elle ne ſauroit non plus l'être par des fractions: car toutes les fractions ſont commenſurables, par le ſecond corollaire des Définitions, & comme telles ſont l'une à l'autre comme nombre à nombre, par la premiére propoſition.

Proposition 3.

185. *Si quatre quantités* a, b, c & d *ſont proportionnelles, de-ſorte que* a *ſoit à* b *comme* c *eſt à* d, *je dis, qu'en cas que les deux premiéres* a & b *ſoient commenſurables, les deux derniéres* c & d *le ſeront auſſi; mais qu'en cas que les deux premiéres* a & b *ſoient incommenſurables, les deux derniéres* c & d *ſeront auſſi incommenſurables.*

Car premiérement, ſoit *a* & *b* commenſurables; cela étant, *a* ſera à *b* comme nombre à nombre, par la premiére propoſition; mais comme *a* eſt à *b*, ainſi *c* eſt à *d*; donc *c* ſera à *d* comme nombre à nombre; donc *c* & *d* ſeront commenſurables par la premiére propoſition. *C. Q. F. D.*

Enſuite, ſoient *a* & *b* incommenſurables; cela étant, je dis que *c*

&

& *d* ſeront auſſi incommenſurables : car ſi *c* & *d* étoient commenſurables, *a* & *b* ſeroient auſſi commenſurables par la premiére partie de cette propoſition, à cauſe que *c* eſt à *d* comme *a* eſt à *b*; mais *a* & *b* ne ſont point commenſurables par la ſuppoſition; donc *c* & *d* ſont incommenſurables auſſi. *C. Q. F. D.*

Corollaire.

On peut inférer de cette propoſition, que *ſi l'on peut prouver que l'incommenſurabilité appartient à une ſorte de quantité continue quelconque, elle appartiendra également à toutes;* car dans cette démonſtration *a* & *b* peuvent être une ſorte de quantité, & *c* & *d* une autre ſorte. Les différentes ſortes de quantité connue, comme des lignes, des ſuperficies, des ſolides, le tems, la viteſſe, &c. peuvent par un effet de leur continuïté être toujours proportionnelles : mais ſi l'antécédent & le conſéquent d'une proportion ſont des quantités continues, & ſi l'autre antécédent & l'autre conſéquent ſont des quantités diſcrétes, c'eſt-à-dire des nombres, ces derniéres quantités pourront fort bien n'être pas toujours proportionnelles aux premiéres, comme il paroît par la ſeconde propoſition; quoique d'un autre côté les premiéres pourront toujours être proportionnelles aux autres.

Scholie.

On peut voir par-là combien *Euclide* a eu raiſon de traiter la proportion des grandeurs continues, qui n'ont point de derniére partie finie, tout autrement qu'il n'a fait les nombres proportionnels, dont la plus petite partie finie eſt l'unité.

Proposition 4.

186. *Si deux quantités ſont commenſurables à une troiſiéme, elles ſeront commenſurables entre elles.*

Soient deux quantités *a* & *b* commenſurables à une troiſiéme, que nous nommerons *c*; je dis, que les quantités *a* & *b* ſeront commenſurables l'une à l'autre : car premiérement, puiſque les grandeurs *a* & *c* ſont commenſurables, il faut qu'elles ſoient l'une à l'autre comme nombre à nombre, par la premiére propoſition; ſoit donc *a* à *c* comme le nombre *d* au nombre *e*. De plus comme les grandeurs *b* & *c* ſont ſuppoſées commenſurables, ſoit *c* à *b* comme le nombre *f* au nombre *g*; puis donc que *a* eſt à *c* comme *d* à *e*, ou comme *df* à *ef*; & de plus, puiſque *c* eſt à *b* comme *f* à *g*, ou comme *ef* à *eg*, il s'enſuit par égalité de raiſons, que

a eſt à b comme le nombre df au nombre eg, & par conſéquent que a & b ſont commenſurables par la premiére propoſition. *C. Q. F. D.*

Corollaire 1.

Il paroît par-là que deux quantités incommenſurables ne ſauroient être commenſurables à une troiſiéme: car on vient de prouver qu'il n'y a que des quantités commenſurables qui ayent cette propriété.

Corollaire 2.

S'il y a trois quantités homogénes a, b & c, *dont* a *eſt incommenſurable à* b, & b *commenſurable à* c; *je dis que* a *eſt incommenſurable à* c: car ſi cela n'étoit pas, nous aurions deux quantités incommenſurables entre elles, & cependant commenſurables à une troiſiéme, ce qui par le corollaire précédent, eſt impoſſible.

Proposition 5.

187. *Comme des quantités incommenſurables ne ſauroient être égales l'une à l'autre, de-même aucun multiple, ni aucune partie ou parties de l'une ne peuvent être = à quelque multiple, partie ou parties de l'autre.*

Il eſt bien clair que deux quantités incommenſurables, par exemple, a & b, ne peuvent être égales; car en ce cas chacune d'elles ſeroit la meſure de toutes deux, & par cela même elles ne ſeroient plus incommenſurables: outre cela, aucun multiple, ni aucune partie ou parties de l'une ne ſauroient être = à quelque multiple, partie ou parties de l'autre; ce que je démontre ainſi. Que c ſoit quelque multiple, partie ou parties de a, & d de b; cela étant, ſi c eſt un multiple de a, il faut que a meſure c; d'un autre côté, ſi c eſt une partie de a, c meſurera a; & enfin, ſi c contient pluſieurs parties de a, comme $\frac{1}{3}$ de a, il eſt manifeſte que $\frac{1}{3}$ de a meſurera les deux quantités; de-ſorte que dans tous les cas a ſera commenſurable à c, & b commenſurable à d par la même raiſon; donc les quantités c & d ne ſauroient être commenſurables; car ſi elles l'étoient (a étant commenſurable à c & c à d) a & d ſeroient commenſurables par la derniére propoſition; mais ſi a eſt commenſurable à d, & d à b, a & b ſeront commenſurables, par la même propoſition; or a & b ne ſont point commenſurables; donc c & d ne le ſeront pas non plus. Ainſi il s'en faut tant que c & d ſoient des grandeurs égales, qu'elles ne ſont pas même commenſurables l'une à l'autre; donc de deux grandeurs incommenſurables aucun multiple, ni aucune partie ou parties ne peuvent être = à quelque multiple, partie ou parties de l'autre. *C. Q. F. D.*

La

La même choſe ſe démontre plus directement ainſi: *a* eſt incommenſurable à *b*, & *b* eſt commenſurable à *d*; donc *d* eſt incommenſurable à *a*, par le ſecond corollaire de la propoſition précédente: mais ſi *d* eſt incommenſurable à *a*, & que *a* ſoit commenſurable à *c*, *d* ſera incommenſurable à *c*, par le même corollaire; donc &c. *C. Q. F. D.*

LEMME.

188. *Soient deux quantités homogénes finies* a *&* q, *& qu'on retranche de la plus grande* a *plus de ſa moitié, & enſuite plus de la moitié du reſte, & du dernier reſte plus de la moitié, &c. je dis, que cette ſouſtraction pourra être continuée juſqu'à ce qu'il y ait un reſte plus petit que* q.

Car premiérement, puiſque par la ſuppoſition *a* & *q* ſont des quantités homogénes & finies, la quantité *q* ne ſauroit être ſi petite, qu'à force de la multiplier elle ne ſurpaſſe *a*, par le troiſiéme axiôme: ſoit donc la grandeur $6q$ un multiple de *q* qui ſurpaſſe *a*; en ce cas $\frac{a}{6}$ ſera plus petit que *q*: qu'on retranche préſentement la moitié de *a*, & il reſtera $\frac{1}{2}a$; ôtez la moitié de ce reſte, & vous aurez $\frac{1}{4}a$, & puis, en répétant la même opération, $\frac{1}{8}a$; mais $\frac{1}{8}a$ eſt plus petit que $\frac{1}{4}a$, & $\frac{1}{4}a$ plus petit que *q*; donc $\frac{1}{4}a$ eſt plus petit que *q*; par conſéquent ſi l'on retranche la moitié de *a*, puis la moitié du reſte, & ainſi de ſuite, la ſouſtraction pourra être continuée juſqu'à ce qu'on parvienne à un reſte plus petit que *q*; donc à plus forte raiſon, ſi l'on retranche plus de la moitié de *a*, & plus de la moitié du reſte, la ſouſtraction pourra être continuée juſqu'à ce qu'on ait un reſte plus petit que *q*. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION 6.

189. *Soient* a *&* b *deux quantités homogénes, à l'égard deſquelles doive être pratiquée la diviſion ſuivante: diviſez*

a *par* b, *& que le reſte ſoit* c; *puis diviſez* a. b. c. d. e. f. g. h.

b *par* c, *& que le reſte ſoit* d; *puis diviſez* 41. 24. 17. 7. 3. 1. 0. 0.

c *par* d *& que le reſte ſoit* e, *&c. Je dis*

que la ſérie a, b, c, d, e, *&c. pourra être continuée juſqu'à ce qu'on arrive à des termes plus petits qu'aucune quantité aſſignable, telle que* q.

Car dans la premiére diviſion, où *a* a été diviſé par *b*, c'eſt-à-dire, où *b* a été retranché de *a* auſſi ſouvent qu'il étoit poſſible, le reſte *c* doit être plus petit que *b*; car ſi cela n'étoit pas, *b* pourroit avoir été pris encore une fois ou davantage, contre l'hypothéſe: puis donc que la quantité retranchée étoit ſinon $2b, 3b, 4b$, &c. du-moins *b*, il s'enſuit que

la quantité retranchée doit être plus grande que ce qui reſte; donc dans la premiére diviſion, où a a été diviſé par b, on a retranché plus de la moitié de a, & il eſt reſté c: pareillement dans la troiſiéme diviſion où c a été diviſé par d, on a retranché plus de la moitié de c, & il eſt reſté e: de-même dans la cinquiéme diviſion, on a ſouſtrait plus de la moitié de e, & le reſte a été g, &c.; donc les termes a, c, e, g, &c. peuvent être continués jusqu'à ce qu'ils deviennent plus petits que q, par le lemme précédent: nous en diſons autant des termes b, d, f, b, qu'on peut continuer jusqu'à ce qu'ils deviennent plus petits que q; d'où il s'enſuit que les termes a, b, c, d, e, f, g, b, peuvent être continués jusqu'à ce qu'ils deviennent plus petits que q. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION 7.

190. *Suppoſant tout comme dans la dernière propoſition; je dis, qu'une quantité quelconque, qui meſurera deux termes voiſins de la ſérie précédente, meſurera tous les autres termes ſans exception.*

Soit q une meſure des deux quantités contigues d & e; cela étant je dis en premier lieu, que q meſurera tous les termes qui viennent après e; car après que d a été diviſé par e, il eſt reſté le terme ſuivant f; donc e meſure $d-f$: puis donc que q meſure e par l'hypothéſe, & que e meſure $d-f$, q doit meſurer $d-f$ par le premier axiôme; mais q meſure auſſi d par l'hypothéſe; donc q meſure également les quantités d & $d-f$, dont la différence eſt f; par conſéquent q meſure f par le ſecond axiôme: on prouvera de-même que puisque q meſure d & e, il s'enſuit néceſſairement qu'il doit meſurer f; ainſi comme q meſure de e & f, il meſurera néceſſairement g, & ainſi de ſuite. Je dis en ſecond lieu, que ſi q meſure d & e, il meſurera tous les termes qui précédent d: car quand c a été diviſé par d il eſt reſté e; donc d meſure $c-e$: puis donc que q meſure d par l'hypothéſe, & que d meſure $c-e$, q meſure $c-e$; mais q meſure auſſi e par l'hypothéſe; donc q meſure également e & $c-e$, dont la ſomme eſt c; ainſi q meſure c: puis donc que de la ſuppoſition que q meſure tant e que d, il ſuit qu'il doit néceſſairement meſurer c, on peut inférer de-même de ce que q meſure d & c, qu'il doit néceſſairement meſurer b, & ainſi de ſuite. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION 8.

191. *Suppoſant tout comme dans les deux propoſitions précédentes, je dis que ſi les premiers termes* a *&* b *ſont commenſurables, la ſérie* a, b, c, d, e &c. *ne pourra point être continuée à l'infini; mais qu'elle ſera terminée de ſorte que le*

le dernier terme de la ſérie ſe trouvera être la plus grande meſure commune de a *&* b; *& réciproquement, ſi les termes* a, b, c, d, e &c. *ne ſont point continués à l'infini, je dis que les premiers termes* a *&* b *ſont commenſurables.*

Premiérement, ſuppoſons *a* & *b* commenſurables; cela étant, je dis que la ſérie ne pourra point être continuée à l'infini: car ſi la grandeur *q* eſt une meſure commune de *a* & de *b*, cette grandeur meſurera tous les termes ſuivans par la derniére propoſition; mais ſi les termes ſont continués à l'infini, ils ſe trouveront enfin plus petits que *q* par la ſixiéme propoſition, & par conſéquent *q* ne ſauroit les meſurer tous; ainſi la ſérie n'eſt pas continuée à l'infini: ſuppoſons donc que le dernier terme ſoit *e*, & je prouverai que *e* ſera la plus grande meſure commune de *a* & de *b*: car comme *e* eſt le dernier terme de la ſérie par l'hypothéſe, il meſurera ſans reſte le pénultiéme terme *d*; car s'il y avoit eu un reſte comme *f*, la quantité *f* auroit été le terme après *e*, & par cela même *e* ne ſeroit pas le dernier terme de la ſérie, contre l'hypothéſe: puis donc que *e* meſure tant *d* que lui même, il doit auſſi meſurer *a* & *b* par la derniére propoſition; & je dis de plus, qu'il ſera la plus grande quantité qui puiſſe les meſurer tous deux: car ſi *a* & *b* admettoient une plus grande meſure commune que *e*, par exemple *q*, cette derniére grandeur meſureroit tous les termes ſuivans, & entr'autres *e*, par la derniére propoſition, c'eſt-à-dire, qu'une plus grande quantité en meſureroit une plus petite, ce qui eſt abſurde; donc ſi *e* eſt le dernier terme de la ſérie, il ſera la plus grande meſure commune dont *a* & *b* ſont ſuſceptibles. *C. Q. F. D.*

Enfin, il me reſte à prouver, que ſi la ſérie *a*, *b*, *c*, *d*, *e &c.* ne ſauroit être continuée à l'infini, les premiéres quantités *a* & *b* ſont commenſurables; car puiſque par l'hypothéſe la ſérie ne va pas à l'infini, que le dernier terme en ſoit *e*: or il a été prouvé ci-deſſus que *e* doit également meſurer *d* & *e*; donc il meſurera auſſi *a* & *b* par la derniére propoſition, & par cela même *a* & *b* ſeront commenſurables.

COROLLAIRE I.

Si les nombres ou autres quantités homogénes a *&* b *ſont commenſurables, il ſera facile de trouver leur plus grande meſure commune, ſavoir, en déterminant le dernier terme de la ſérie* a, b, c, d, e: ainſi la plus grande meſure commune des nombres 42 & 30 eſt 6, à cauſe que 6 eſt le dernier terme de la ſérie 42, 30, 12, 6.

COROLLAIRE. 2.

Si les premiéres quantités a *&* b *ſont incommenſurables, la ſérie* a, b, c, d, e

d, e &c. *pourra être continuée à l'infini :* car ſi cela ne ſe pouvoit pas, *a* & *b* ſeroient commenſurables par la derniére partie de cette propoſition.

Corollaire 3.

Et réciproquement, ſi la ſérie a, b, c, d, e &c. *peut ſe continuer à l'infini, les premiéres quantités* a & b *ſeront incommenſurables* : car ſi elles étoient commenſurables, la ſérie n'iroit pas à l'infini par la premiére partie de cette propoſition.

Corollaire 4.

Toute quantité, comme q, *qui meſure deux autres quantités* a & b, *meſurera auſſi leur plus grande meſure commune* c.

Proposition 9.

Probleme.

192. *On demande, trois quantités commenſurables* a, b & c *étant données, de trouver leur plus grande meſure commune.*

Solution.

Trouvez d'abord la plus grande meſure commune de deux de ces quantités, par ex. a & b, *& nommez-la* d ; *puis trouvez la plus grande meſure commune de* d *& de* c, *& appellez-la* e ; *alors* e *ſera la plus grande meſure commune des trois quantités propoſées* a, b & c. Car premiérement, puisque *e* meſure *d*, & que *d* meſure tant *a* que *b*, *e* meſurera auſſi *a* & *b* ; mais *e* meſure *c* par l'hypothéſe, étant ſuppoſé la plus grande meſure commune de *d* & de *c* ; donc *e* meſurera toutes les trois quantités *a*, *b* & *c*. Je dis, en ſecond lieu, que *e* eſt la plus grande quantité qui puiſſe les meſurer toutes : car s'il eſt poſſible que *f*, quantité plus grande que *e*, meſure toutes les trois quantités *a*, *b* & *c* ; cela étant, puisque *f* meſure tant *a* que *b*, il meſurera auſſi leur plus grande meſure commune *d*, par le quatriéme corollaire de la derniére propoſition ; mais *f* meſure *c* par l'hypothéſe ; donc *f* meſurera *e*, la plus grande meſure commune de *d* & de *c*, c'eſt-à-dire, une plus grande quantité en meſurera une plus petite, ce qui eſt abſurde ; donc *e* eſt la plus grande meſure commune de *a*, *b* & *c*. C. Q. F. D.

Pour éclaircir la règle, nous donnerons l'exemple ſuivant en nombres : on demande la plus grande meſure commune des nombres 42, 30 & 15. La plus grande meſure commune de 42 & de 30 eſt 6, par le premier

corol-

corollaire de la huitiéme propoſition ; & la plus grande meſure commune de 6 & de 15 eſt 3 ; & ſi les nombres 42 , 30 & 15 ſont tous diviſés par 3 , ils ſeront réduits à 14 , 10 & 5 , trois autres nombres qui forment entre eux la même proportion que leurs dividendes reſpectifs.

Corollaire.

Toute quantité, comme f, *qui meſure trois quantités* a, b *&* c, *meſurera auſſi leur plus grande meſure commune* e.

N. B. Les propoſitions ſuivantes ſont deſtinées à prouver l'exiſtence des incommenſurables, & quelques-unes de leurs propriétés, qui méritent d'être connues.

Proposition 10.

193. *Toutes les fractions égales, réduites à leurs derniers termes, deviennent une ſeule & même fraction.*

Avant que de m'engager dans la démonſtration de cette propoſition, je ferai une remarque qui ſera une eſpéce de lemme, ſavoir, que *Si deux nombres, comme* 7 *&* 11, *dont la plus grande meſure commune eſt l'unité, ſont multipliés par une troiſiéme quantité, comme* d, *de quelque ſorte qu'elle ſoit, cette quantité* d *ſera la plus grande meſure commune des quantités* 7d *&* 11d; *& réciproquement, ſi* d *eſt la plus grande meſure commune des quantités* 7d *&* 11d, *l'unité ſera la plus grande meſure commune des nombres* 7 *&* 11. Car ſi en trouvant la plus grande meſure commune de 7 & de 11, les diviſeurs ſont 7, 4, 3, 1, comme ils ſont réellement, auſſi en trouvant la plus grande meſure commune de $7d$ & $11d$, les diviſeurs ſeront $7d$, $4d$, $3d$, $1d$; c'eſt-à-dire, ſi 1 eſt le dernier diviſeur, & par conſéquent la plus grande meſure commune dans le premier cas, d ſera le dernier diviſeur, & par conſéquent la plus grande meſure commune dans le dernier cas, & réciproquement.

Ceci étant poſé, qu'il y ait préſentement deux fractions égales, qui étant réduites à leurs derniers termes, ſoient $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$: je vais démontrer que les nombres c & d ſont réellement les mêmes que les nombres a & b reſpectivement.

Car premiérement il eſt clair que les nombres a & b ne ſauroient avoir d'autre commune meſure que l'unité, non plus que les nombres c & d; car s'ils en avoient une autre, les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ne ſeroient pas réduites à leurs derniers termes, mais pourroient être diviſées encore, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

2°. Les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ doivent être égales l'une à l'autre; car quelles que ſoient les méthodes dont on ait fait uſage pour réduire ces fractions à leurs derniers termes, il eſt certain que les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ doivent être égales aux fractions premiérement propoſées, ſans quoi elles ne repréſenteroient point ces fractions dans leurs derniers termes, mais d'autres fractions: puis donc que les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ſont égales aux fractions premiérement propoſées, & que ces fractions ſont égales l'une à l'autre par la ſuppoſition, il s'enſuit que les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ſont égales auſſi.

3°. Que les fractions égales $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ſoient préſentement réduites au même dénominateur, je dis que les fractions qui en naîtront, ſavoir, $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$ ſeront encore égales; à cauſe que cette réduction ne peut affecter en rien leur valeur, par le huitiéme Article de l'Introduction: puis donc que les fractions $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$ ſont égales, & ont le même dénominateur, il faut auſſi qu'elles ayent le même numérateur, c'eſt-à-dire, que le nombre bc doit être le même que le nombre ad; donc les nombres bc & bd doivent être les mêmes que les nombres ad & bd reſpectivement; par conſéquent la plus grande meſure commune de la premiére paire ſera la même que la plus grande meſure commune de la derniére; mais la plus grande meſure commune des nombres bc & bd eſt b, par le lémme, à cauſe qu'il a été prouvé que la plus grande meſure commune des nombres c & d eſt l'unité; & par la même raiſon, la plus grande meſure commune des nombres ad & bd eſt d; ainſi les nombres b & d ſont les mêmes: puis donc que les deux fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ſont égales, & ont le même dénominateur, il faut qu'elles ayent pareillement le même numérateur, c'eſt-à-dire, qu'il faut que le nombre c ſoit le même que le nombre a; & par conſéquent les nombres c & d doivent être réellement les mêmes que les nombres a & b reſpectivement. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

S'il y a deux fractions égales $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$, *dont la premiére* $\frac{a}{b}$ *eſt réduite à ſes derniers termes; je dis que* a *numérateur de la premiére fraction, meſu-*

mesurera c *numérateur de la seconde, & que* b, *dénominateur de la première, mesurera autant de fois* d *dénominateur de la seconde.*

Car soit *e* la plus grande mesure commune des nombres *c* & *d*; en ce cas l'unité sera la plus grande mesure commune des nombres $\frac{c}{e}$ & $\frac{d}{e}$ par le lemme démontré au commencement de la proposition; par conséquent $\frac{c}{e}$ & $\frac{d}{e}$ seront les derniers termes de la fraction $\frac{c}{d}$; mais la fraction $\frac{c}{d}$ est égale à la fraction $\frac{a}{b}$, qui est déjà réduite à ses derniers termes par la supposition; & par cette proposition les derniers termes de toutes les fractions égales sont les mêmes; donc les nombres $\frac{c}{e}$ & $\frac{d}{e}$ sont les mêmes que les nombres *a* & *b*, & les nombres *c* & *d* les mêmes que les nombres *ea* & *eb* respectivement; mais *a* mesure *ca*, & *b* mesure *eb* autant de fois; donc *a* mesure *c*, & *b* mesure *d* autant de fois. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION II.

194. *S'il y a trois nombres* a, b *&* c, *dont* a *soit un nombre premier à l'égard de* b, *& que* b *soit un multiple de* c; *je dis, que* a *sera un nombre premier par rapport à* c.

Car si *a* & *c* ne sont pas des nombres premiers entre eux, il faut qu'ils ayent quelque mesure commune plus grande que l'unité par la quatriéme définition; que cette prétendue mesure soit *d*; puis donc que *d* mesure *c*, & que *c* mesure son multiple *b*, *d* mesurera aussi *b*; mais *d* mesure aussi *a* comme étant une mesure commune de *a* & de *c*; donc *d* mesure *a* & *b*; donc *a* & *b* ne sauroient être des nombres premiers entre eux, non plus que *a* & *c*; mais *a* & *b* sont des nombres premiers entre eux par la supposition; donc *a* & *c* doivent aussi être des nombres premiers l'un à l'égard de l'autre. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

Quand *c* est égal à l'unité, cette proposition est manifeste par elle-même: car on voit d'abord que les nombres *a* & *c* n'ont d'autre mesure commune que l'unité: si l'on admettoit l'unité au rang des nombres, tout autre nombre seroit premier à son égard, & un de ses multiples. Pour éviter cette confusion, & établir une distinction entre des nombres premiers, & d'autres qui ne sont point tels, *Euclide* a exclu l'unité de sa définition de nombre, aimant mieux la considérer comme un dénominateur commun de tout nombre: ainsi le nombre 3 doit être interprété comme signifiant trois unités, &c.

PROPOSITION 12.

195. *Si deux nombres* a *&* b *ſont tous deux premiers à l'égard d'un troiſiéme nombre* c; *je dis, que leur produit* ab *ſera auſſi un nombre premier à l'égard du troiſiéme nombre* c; *ou (ce qui revient au même) que le produit* ab *& le nombre* c *n'auront d'autre meſure commune que l'unité.*

Si on le nie, que le produit ab & le nombre c ayent quelque meſure commune plus grande que l'unité, par exemple d; puis donc que d meſure tant le produit ab que le nombre c, il meſurera auſſi le nombre c ſeul, & par conſéquent c ſera quelque multiple de d; donc nous avons trois nombres a, c & d, dont a eſt un nombre premier rélativement à c, & c un multiple de d; donc par la derniére propoſition a eſt un nombre premier rélativement à d, & la fraction $\frac{a}{d}$ eſt réduite à ſes derniers ou moindres termes: de plus, puiſque d meſure tant le produit ab que le nombre c, il meſurera ab ſeul, & par conſéquent ab ſera quelque multiple de d; donc la fraction $\frac{ab}{d}$ ſera équivalente à quelque nombre entier; nommez ce nombre entier e; puiſque $\frac{ab}{d} = e$, nous aurons $\frac{a}{d} = \frac{e}{b}$: nous avons donc ici deux fractions égales $\frac{a}{d}$ & $\frac{e}{b}$, dont la premiére $\frac{a}{d}$ eſt réduite à ſes moindres termes; donc d dénominateur de la premiére fraction meſurera b dénominateur de la derniére, par le corollaire de la dixiéme propoſition; mais d meſure c par l'hypothéſe; donc d, nombre plus grand que l'unité, meſure tant b que c; donc ſi le produit ab & le nombre c ne ſont point premiers entre eux, les nombres b & c ne ſauroient l'être non plus; mais les nombres b & c ſont premiers l'un à l'égard de l'autre par l'hypothéſe; donc le produit ab & le nombre c ſont auſſi premiers entre eux. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Si deux nombres a *&* b *ſont premiers à l'égard de deux autres* c *&* d *de façon que les deux nombres* a *&* b *ſoient premiers à l'égard de chacun des nombres* c *&* d; *je dis, que* ab *produit des deux premiers ſera un nombre premier par rapport à* cd *produit des deux derniers.* Car puiſque tant a que b ſont des nombres premiers par rapport à c, le produit ab ſera auſſi premier par rapport à c par cette douziéme propoſition; & par la même raiſon le produit ab ſera auſſi premier à l'égard du nombre d: puis donc que les nombres c & d ſont premiers par rapport au nombre ab, leur produit cd doit auſſi être premier à ab, & ab l'être à cd. *C. Q. F. D.*

Co-

COROLLAIRE 2.

Si dans le corollaire précédent les nombres *a* & *b* ſont ſuppoſés égaux entre eux, comme auſſi les nombres *c* & *d*; & que de plus *a* ſoit un nombre premier à *c*, en ce cas *a* & *b* ſeront des nombres premiers à chacun des nombres *c* & *d*, & par cela même le produit *ab* ſera premier au produit *cd*: mais dans cette ſuppoſition le produit *ab* eſt le même que a^2, & le produit *cd* le même que c^2; donc a^2 ſera un nombre premier à c^2; ce qui ſignifie proprement, que *Si deux nombres* a *&* c *ſont premiers l'un à l'autre, leurs quarrés* aa *&* cc *le ſeront pareillement.*

COROLLAIRE 3.

Donc ſi deux nombres quelconques a *&* c *ſont les plus petits qui expriment leur raiſon, leurs quarrés* aa *&* cc *ſeront les plus petits dans la leur:* car quand *a* ou *c* eſt égal à l'unité, la choſe eſt claire (l'unité ne permettant pas qu'on continue la diviſion;) & quand *a* & *c* ſont des quantités plus grandes que l'unité, *aa* & *cc* ſeront les petits termes qui expriment leur raiſon, par le dernier corollaire.

PROPOSITION 13.

196. *S'il y a trois quantités homogénes* a, b *&* c *en proportion continue, & que le terme moyen ſoit commenſurable aux extrêmes; je dis, que les plus petits nombres qui expriment la raiſon des extrêmes ſeront tous deux des quarrés.*

Puiſque *a* & *b* ſont commenſurables par l'hypothéſe, ſoit leur plus grande commune meſure contenue dans *a* autant de fois qu'il y a d'unités en *d*, & dans *b* autant de fois qu'il y a d'unités en *e*; cela étant *d* & *e* ſeront les plus petits nombres qui expriment la raiſon de *a* à *b*, par la dixiéme propoſition; & puiſque *a* eſt à *b* comme *d* eſt à *e*, ou comme *dd* eſt à *de*, & que *b* eſt pareillement à *c* comme *d* à *e*, ou comme *de* à *ee*, il s'enſuit par égalité de raiſons, que *a* eſt à *c* comme *dd* à *ee*; mais *d* & *e* ſont les plus petits nombres qui expriment la raiſon de *a* à *b*, comme nous l'avons vu; donc *dd* & *ee* ſont les plus petits nombres qui expriment la raiſon de *a* à *c*, par le troiſiéme corollaire de la derniére propoſition; donc les derniers nombres qui expriment la raiſon des extrêmes *a* & *c* ſont l'un & l'autre des nombres quarrés. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION 14.

197. *S'il y a trois quantités homogénes* a, b *&* c *en proportion continue, dont les extrêmes* a *&* c *ſoient commenſurables l'une à l'autre; & que les plus*

petits nombres qui expriment la raiſon de ces extrêmes, ne ſoient pas tous deux des quarrés, je dis que la quantité moyenne b *ſera incommenſurable aux deux extrêmes.*

Il eſt manifeſte que la quantité moyenne ne ſauroit être commenſurable à un des extrêmes & incommenſurable à l'autre; car ſi nous ſuppoſons, par exemple, que *a* & *b* ſont incommenſurables, & que cependant *b* & *c* ſont commenſurables, nous aurions deux quantités incommenſurables *a* & *b* commenſurables l'une & l'autre à une troiſiéme quantité *c*, ce qui par le premier corollaire de la quatriéme propoſition eſt impoſſible; donc la quantité moyenne doit être ou commenſurable ou incommenſurable aux deux extrêmes: pour commenſurable elle ne ſauroit l'être; car en ce cas les plus petits nombres qui expriment la raiſon des extrêmes devroient être des quarrés par la derniére propoſition, ce qui eſt contre l'hypothéſe; donc le terme moyen doit être incommenſurable aux deux extrêmes. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

La ligne a *étant donnée, il ſera facile d'en trouver autant d'autres qu'on voudra, qui lui ſeront incommenſurables; car prenant deux nombres quelconques* d *&* e *qui ſoient les plus petits qui expriment leur raiſon, & pas tous deux des quarrés, faites* c *à* a *comme* d *à* e, *& une moyenne proportionelle entre* a *&* c, *trouvée par la treiziéme propoſition du ſixiéme Livre d'Euclide, ſera incommenſurable à l'une & à l'autre de ces quantités.*

PROPOSITION 15.

198. *S'il y a quelque nombre entier, comme* n, *dont la racine quarrée ne ſauroit être exprimée par quelque autre nombre entier; je dis, que cette racine ne peut non plus être exprimée par une fraction quelconque.*

Car ſuppoſant la choſe poſſible, ſoit la racine quarrée de *n* exprimée par une fraction, laquelle étant réduite à ſes derniers termes exprimables en nombres entiers ſera $\frac{a}{b}$, c'eſt-à-dire, ſoit $\frac{a}{b}=\sqrt{n}$; cela étant nous aurons $\frac{aa}{bb}=\frac{n}{1}$; mais la fraction $\frac{aa}{bb}$ eſt réduite à ſes moindres termes, par le troiſiéme corollaire de la douziéme propoſition, à cauſe que la fraction $\frac{a}{b}$ l'étoit; & la fraction $\frac{n}{1}$ eſt réduite à ſes moindres termes, parce que l'unité n'admet point de diviſion ultérieure; donc nous avons deux fractions égales $\frac{aa}{bb}$ & $\frac{n}{1}$, toutes deux réduites à leurs derniers termes; d'où il ſuit, que ces deux fractions doivent non ſeulement

être

être égales en valeur, mais auſſi dans leurs termes, c'eſt-à-dire, que aa doit être égal à n, & bb à 1; mais aa ne peut être égal à n, à cauſe que a eſt un nombre entier par la ſuppoſition, & que n eſt ſuppoſé ne point admettre de nombre entier pour ſa racine; donc la racine quarrée de n ne ſauroit être exprimée par quelque fraction que ce ſoit. *C. Q. F. D.*

Autrement ainſi. Premiérement n, $\surd n$ & 1, ſont en proportion continue, à cauſe que le quarré du terme moyen eſt égal au produit des extrêmes; en ſecond lieu, les extrêmes n & 1 ſont les plus petits dans leur proportion, l'unité empêchant qu'on ne pourſuive plus loin la réduction; en troiſiéme lieu, un des extrêmes n n'eſt pas un nombre quarré par la ſuppoſition; donc le terme moyen qui eſt $\surd n$ eſt incommenſurable à 1; donc il n'eſt point poſſible d'exprimer par quelque fraction ou par quelque nombre mixte quelconque $\surd n$, à cauſe que tous les nombres mixtes, & toutes les fractions ſont commenſurables à 1, par le troiſiéme corollaire des définitions. *C. Q. F. D.*

Scholie.

Il paroît manifeſtement par cette propoſition, que deux nombres ſourds peuvent être l'un & l'autre incommenſurables à l'unité, & cependant commenſurables entre eux: car $\surd 2$ & $\surd 8$ (en vertu de cette propoſition) ſont tous deux incommenſurables à l'unité, & pourtant commenſurables l'un à l'autre; car puiſque le nombre 2 eſt au nombre 8 comme 1 à 4, $\surd 2$ ſera à la $\surd 8$ comme 1 à 2.

Proposition 16.

199. *S'il y a deux nombres* a *&* b *réduits aux plus ſimples termes de leurs raiſons, & tels que leurs racines quarrées ſoient commenſurables l'une à l'autre; je dis que les nombres* a *&* b *ſont des quarrés.*

Car puiſque la $\surd a$ eſt ſuppoſée commenſurable à $\surd b$, que leur plus grande meſure commune ſoit contenue dans $\surd a$ les fois d, & dans $\surd b$ les fois e; cela étant d & e ſeront les moindres termes dans la raiſon de $\surd a$ à $\surd b$ par la dixiéme propoſition; & puiſque $\surd a$ eſt à $\surd b$ comme d à e, nous aurons a à b comme dd à ee; donc $\frac{a}{b}=\frac{dd}{ee}$ par le quatriéme axiôme: mais la fraction $\frac{a}{b}$ eſt réduite à ſes moindres termes par la ſuppoſition; & nous en diſons autant de la fraction $\frac{dd}{ee}$, à cauſe que la fraction $\frac{d}{e}$ l'étoit; donc $a=dd$, & $b=ee$; donc a & b ſont tous deux des quarrés. *C. Q. F. D.*

Co-

Corollaire.

Donc si a & b *sont les plus simples termes dans leur raison, & pas tous deux des quarrés*, comme 1 & 2, 2 & 3, *&c. leurs racines quarrées seront incommensurables l'une à l'autre.*

Proposition 17.

200. *Si deux quantités incommensurables, comme* 2 *&* $\sqrt{3}$, *sont ajoûtées ensemble, de-sorte que de leur addition résulte une troisiéme quantité* $\overline{2+\sqrt{3}}$; *je dis que cette quantité sera incommensurable à l'une & à l'autre des parties dont elle est composée.*

Je prouverai que le nombre $\overline{2+\sqrt{3}}$ est incommensurable à $\sqrt{3}$.

Car si la chose étoit autrement, tant la quantité $\overline{2+\sqrt{3}}$ que $\sqrt{3}$ auroient quelque mesure commune; que cette mesure soit *m*: puis donc que la grandeur *m* mesure $\overline{2+\sqrt{3}}$ & $\sqrt{3}$, elle mesurera aussi leur différence 2, & par cela même elle mesurera 2 & $\sqrt{3}$; mais 2 & $\sqrt{3}$ sont incommensurables par la supposition; donc le nombre $\overline{2+\sqrt{3}}$ ne sauroit être commensurable à $\sqrt{3}$. *C. Q. F. D.* On démontrera précisément de-même, que la quantité $\overline{2+\sqrt{3}}$ est incommensurable à 2.

Proposition 18.

201. *Le côté & la diagonale d'un quarré sont incommensurables.*

C'est ce qu'on peut inférer de la quinziéme proposition; car par la quarante-septiéme du premier Livre d'Euclide, si le côté d'un quarré est représenté par 1, sa diagonale sera $\sqrt{2}$; mais 1 & $\sqrt{2}$ sont incommensurables par la quinziéme proposition; donc le côté & la diagonale d'un quarré sont incommensurables. *C. Q. F. D.*

La même vérité peut se démontrer indépendamment des propositions précédentes par le secours du lemme suivant.

Lemme.

Si un nombre quarré est pair, sa racine & sa moitié seront paires aussi.

Car une racine impaire comme $2a+1$ donne un quarré impair, comme $4aa+4a+1$; au-lieu qu'une racine paire, telle que $2a$, donne un quarré pair, tel que $4aa$; & sa moitié $2aa$ est pareillement un nombre pair.

Cela étant, si le côté & la diagonale de quelque quarré n'étoient pas incommensurables, il faudroit qu'ils eussent quelque mesure commune: que leur plus grande mesure commune soit contenue dans le côté les fois *a*,

fois a, & dans le diamétre les fois b; ainſi a & b ſeront les plus petits nombres, qui expriment la raiſon du côté du quarré à ſa diagonale; & puiſque le côté eſt à la diagonale comme a eſt à b, le quarré du côté ſera au quarré de la diagonale comme aa à bb; mais le quarré du côté eſt la moitié du quarré de la diagonale, par la quarante-ſeptiéme du premier Livre des Elémens; donc aa eſt la moitié de bb; donc aa & bb ſont deux nombres pairs, bb pour avoir une moitié ſans fraction adhérente, & aa pour être cette moitié, ſuivant le lemme; donc en vertu du même lemme, les racines de ces quarrés pairs, ſavoir a & b, dôivent être des nombres pairs; car ſi quelqu'un d'eux étoit impair, ſon quarré le ſeroit auſſi: mais comme ces nombres ſont les plus petits dans leur proportion, un d'eux au-moins doit être un nombre impair, ſans quoi il y auroit moyen de réduire la proportion à des termes plus ſimples encore; donc ſi le côté & la diagonale d'un quarré n'étoient pas incommenſurables, il ſeroit poſſible qu'un ſeul & même nombre fût pair & impair; mais cela eſt impoſſible; donc ces grandeurs ſont incommenſurables. *C. Q. F. D.*

Obſervations générales ſur la matière de l'Incommenſurabilité.

202. *Scholie* 1. Il paroît par ce qui vient d'être démontré, combien les parties des quantités continues ſont plus ſubtiles que celles des nombres; car quoique la racine quarrée de 2 ne puiſſe pas s'exprimer par un nombre entier ou par une fraction quelconque, nous voyons cependant que ſi l'on déſigne le côté d'un quarré par 1, ſoit que cette unité ſignifie une aune, un pied, un pouce, ou telle autre longueur qu'on voudra, la diagonale, meſurée ſur la même échelle, ſera la racine de 2; il ſeroit même très-facile de conſtruire une échelle qui contiendroit les racines des nombres naturels continués à diſcrétion depuis l'unité; mais nous aurons occaſion de revenir à ce ſujet, Voyez le Scholie de l'Art. 307.

Cette propoſition nous donne auſſi à connoître, que les aires de deux quarrés peuvent être commenſurables dans le tems que leurs quarrés ne le ſont pas; car l'aire d'un quarré eſt à l'aire d'un autre quarré fait ſur la diagonale du premier comme 1 à 2; & cependant, par la derniére propoſition, les côtés des deux quarrés ſont incommenſurables.

Scholie 2. Dans le corollaire de la troiſiéme propoſition il a été prouvé, que pourvu que l'incommenſurabilité appartienne à une ſorte de quantité continue, elle doit appartenir également à toute autre; mais dans la derniére propoſition, & dans le corollaire de la quatorziéme, il eſt démontré que des lignes peuvent être incommenſurables; donc toutes les autres quantités continues peuvent l'être. Je me contenterai de rapporter

ter un seul exemple de l'incommensurabilité dans une autre sorte de quantités, savoir le tems.

Le fameux *Huygens*, dans son admirable Traité du Mouvement des Pendules, a démontré, que les longueurs des pendules, à compter depuis le centre de suspension jusqu'au centre d'oscillation, sont comme les quarrés des tems dans lesquels ils achévent respectivement des vibrations semblables; comme si la longueur d'un pendule étoit de trois pieds mesure du Rhin; & celle d'un autre de deux pieds pareils, le quarré du tems d'une oscillation du premier pendule sera au quarré du tems d'une oscillation semblable du dernier comme 3 à 2; ainsi les tems mêmes seront comme $\sqrt{3}$ à $\sqrt{2}$, & ainsi pourront être représentés par ces deux quantités sourdes. Supposons présentement une chose qui ne s'éloigne guéres de la vérité, savoir, que $\sqrt{3}$ est à $\sqrt{2}$ comme 49 à 40; réduisant cette analogie en équation nous aurons $\sqrt{3}\times 40 = \sqrt{2}\times 49$, ce qui signifie, que quarante vibrations du plus long pendule ne font dans le même tems que quarante-neuf vibrations du plus court; si ceci étoit vrai à la rigueur, & que deux pareils pendules achevassent chacun sa vibration respective dans le même instant, après quarante autres vibrations du pendule le plus long, & quarante-neuf du plus court, leurs deux vibrations seroient de-nouveau terminées au même instant, & ainsi de suite à l'infini. Ce raisonnement est fondé sur la supposition que $\sqrt{3}$ & $\sqrt{2}$ sont comme 49 à 40, & par conséquent que $\sqrt{3}\times 40 = \sqrt{2}\times 49$; mais si nous supposons que ces deux racines sont sourdes, & par conséquent que les tems que ces racines désignent, sont (comme il est vrai) incommensurables, aucun multiple de l'une ne sauroit être égal à quelque multiple de l'autre, par la cinquiéme proposition; & il s'ensuivra de-là, que si ces deux pendules sont lâchés dans le même instant, quel que soit le nombre de leurs vibrations, il n'arrivera jamais que deux de ces vibrations soient achevées précisément dans le même instant.

Scholie 3. Avant de quitter ce sujet, j'observerai encore, que cette doctrine des incommensurables renverse de fond en comble l'hypothése des indivisibles; car s'il y avoit dans la Nature des quantités indivisibles, elles mesureroient toutes les autres, rien ne pouvant être plus petit qu'elles, & par cela même il n'y auroit point d'incommensurables; dont l'existence néanmoins vient d'être démontrée par des argumens au-dessus de toute exception.

PROBLEME I.

203. *Soient* a *&* b *deux quantités incommensurables*, a *la plus grande &* b *la plus petite; & que par la division continuelle de* a *&* b, *suivant la méthode*

thode prescrite pour trouver la plus grande mesure commune, on ait pour quotiens certains nombres revenant toujours dans le même ordre à l'infini: on demande la valeur de la fraction $\frac{a}{b}$ *ou (ce qui est tout un) la raison de* a *à* b *sans aucune approximation, en admettant des nombres sourds dans l'expression de la valeur cherchée.*

SOLUTION.

Que les quotiens qui reviennent dans le même ordre soient, 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. &c. à l'infini, & que les restes de la premiére division, de la seconde & de la troisiéme soient c, d & e respectivement; cela étant le quotient de a divisé par b sera 1, celui de b divisé par c, 2, celui de c divisé par d, 3; après quoi le quotient de d divisé par e sera de nouveau 1, & ainsi de suite: donc une division continuelle commençée depuis d & e, & poussée à l'infini, sera accompagnée des mêmes quotiens, tant en quantité, ordre & nombre, qu'une division continuelle commencée depuis a & b; par conséquent d aura la même raison à e que a à b, par l'Art. 180. Ceci étant posé, qu'on calcule pour a & b une série d'équations pareille à celle de l'Art. 175, & il en résultera:

$$1a - 0b = +a.$$
$$0a - 1b = -b.$$
$$1a - 1b = +c.$$
$$2a - 3b = -d.$$
$$7a - 10b = +e. \text{ \&c.}$$

Nous avons ici $d = 3b - 2a$, & $e = 7a - 10b$; mais il a été prouvé ci-dessus que d est à e comme a à b; donc $3b - 2a$ est à $7a - 10b$ comme a est à b; donc changeant l'analogie en équation, $3bb - 2ab = 7aa - 10ab$, ou $7aa - 8ab = 3bb$: nous n'avons ici qu'une équation pour déterminer les valeurs de deux inconnues a & b, & pouvons par cela même substituer à la place de l'une la quantité qu'il nous plaît; substituons donc à la place de b une quantité qui rende l'équation plus simple, par exemple 7, à cause que 7 est le coëfficient de aa dans l'équation; puis divisant toute l'équation par 7 ou par $b = 7$, nous aurons $aa - 8a = 3b$, ou $aa - 8a = 21$; c'est-là une équation du second degré, laquelle, en complettant le quarré, deviendra $aa - 8a + 16 = 37$; en tirant la racine quarrée de chaque membre de cette équation, il viendra $a - 4 = \sqrt{37}$, & $a = 4 + \sqrt{37}$; donc $\frac{a}{b} = \frac{4 + \sqrt{37}}{7}$ ou (ce qui revient au même) a est à b comme $4 + \sqrt{37}$ est à 7. *C. Q. F. D.*

N. B. 1. Quoique le nombre 37, comme tous les autres nombres,

ait deux racines, j'ai choiſi la racine affirmative, à cauſe que $4-\sqrt{37}$ eſt une quantité négative.

2. Si l'on veut exprimer le numérateur de la fraction $\frac{a}{b}$ par un nombre entier, & le dénominateur par une racine ſourde avec un nombre adhérent, dans l'équation précédente $7aa-8ab=3bb$, il faut faire $a=3$ coëfficient de bb, & enſuite diviſer toute l'équation par a ou 3; ce qui donnera $7a-8b=bb$, c'eſt-à-dire, $bb+8b=21$. Cette équation étant réſolue, on trouve $b=\sqrt{37}-4$; ainſi $\frac{a}{b}=\frac{3}{\sqrt{37}-4}$; ainſi a eſt à b comme 3 à $\sqrt{37}-4$.

3. Pour confirmer ces deux proportions, ſavoir, que a eſt à b comme $\sqrt{37}+4$ eſt à 7, & d'un autre côté, que a eſt à b comme 3 à $\sqrt{37}-4$, nous obſerverons que la racine quarrée de 37 eſt 6.08276253 à peu près, & conſéquemment que $\sqrt{37}+4$ eſt à 7 comme 10.08276253 eſt à 7, ou comme 1008276253 à 700000000. Or ſi par la diviſion continuelle des nombres 1008276253 & 700000000, les quotiens ſe trouvent être 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, la ſérie ne continuera plus de-même en cet endroit, parce que la racine quarrée de 37 donnée ici n'eſt pas exacte: d'un autre côté, il eſt manifeſte que a eſt auſſi à b comme 3 à $\sqrt{37}-4$, c'eſt-à-dire, comme 300000000 à 208276253, puiſque la diviſion continuelle des nombres 300000000 & 208276253, donne cette ſérie de quotiens 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, &c.

4. La ſolution du problême précédent fait voir, que la racine quarrée de 37 ne ſauroit être exprimée par un nombre entier, ni par un nombre entier avec une fraction adhérente, ni par une fraction quelconque; car ſi cela étoit poſſible, alors il y auroit moyen d'exprimer auſſi $4+\sqrt{37}$, & par conſéquent ce nombre ne ſeroit pas incommenſurable au nombre entier 7, comme l'infinité des quotiens prouve qu'il l'eſt. La même remarque eſt applicable à toutes les autres quantités ſourdes trouvées par la méthode employée dans cette ſolution.

5. S'il étoit queſtion de former un théorême qui fournît une ſolution générale du problême précédent, il faudroit conſidérer avec un peu d'attention la ſolution particuliére. Voici la méthode qu'on pourroit découvrir par ce moyen: après une ſérie d'équations formée conformément à l'Art. 175, par le ſecours d'une ſeule circulation des quotiens 1, 2, 3, nous avons trouvé que les deux derniéres équations étoient $2a-3b=-d$, & $7a-10b=+e$; d'où j'infére, que ſi (conformément à l'Art. 179) une ſérie de fractions principales eſt calculée à l'aide des quotiens 1, 2, 3, les deux derniéres fractions de la ſérie ſeront $\frac{7}{10}$ & $\frac{?}{?}$: exa-

minons.

minons préſentement la derniére équation, ſavoir $aa-8a=21$ ou $3b$, & nous verrons que 8 coëfficient de $-a$ dans le ſecond terme a été trouvé en retranchant 2 de 10, c'eſt-à-dire, en retranchant le dénominateur de la pénultiéme fraction du numérateur de la derniére: nous trouverons auſſi que 7 valeur de b vient de 7 dénominateur de la derniére fraction: enfin nous trouverons que 3 coëfficient de b dans le terme $3b$, ou de 7 dans le nombre 21, vient du nombre 3 numérateur de la pénultiéme fraction, multiplié par b ou 7 dénominateur de la derniére: toutes ces conſidérations réunies enſemble nous fourniſſent la ſolution générale que voici.

Par le moyen de la premiére circulation de quotiens, calculez (comme dans l'article cent ſoixante & dix-neuviéme) une ſérie de fractions principales; enſuite, multipliez le numérateur de la pénultiéme fraction par le dénominateur de la derniére, & appellez le produit p; *retranchez le dénominateur de la pénultiéme fraction du numérateur de la derniére, & nommez la différence* d; *cela étant vous aurez* b *égal au dénominateur de la derniére fraction, &* $aa-da=p$.

Exemple 1.

Que les quotiens qui reviennent toujours ſoient 4, 1, 1, 1. 4, 1, 1, 1. &c. à l'infini: une ſérie de fractions principales calculée par le moyen des quotiens 4, 1, 1, 1, eſt $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{9}{1}, \frac{14}{1}$; & le nombre 9 numérateur de la pénultiéme fraction multiplié par 3 dénominateur de la derniére, donne $27=p$; & de plus le nombre 2, dénominateur de la pénultiéme fraction, retranché de 14 numérateur de la derniére, laiſſe $12=d$: faites donc $b=3$ dénominateur de la derniére fraction, & vous aurez $aa-12a=27$: en réſolvant cette équation on trouve $a=6+\sqrt{63}$; donc $\frac{a}{b}=\frac{6+\sqrt{63}}{3}$; mais cette fraction peut s'exprimer plus ſimplement; car $\frac{6}{3}=\frac{2}{1}$, & $\frac{\sqrt{63}}{3}=\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{9}}=\sqrt{\frac{63}{9}}=\sqrt{\frac{7}{1}}$; donc $\frac{a}{b}=\frac{2+\sqrt{7}}{1}$.

Exemple 2.

Que les quotiens ſoient q, q, q, q, q, à l'infini; cela étant une ſérie de fractions calculée par le quotient q ſera $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{q}{1}$, dont les deux derniéres fractions ſont $\frac{1}{0}$ & $\frac{q}{1}$: or 1, numérateur de la pénultiéme fraction, multiplié par 1 dénominateur de la derniére, donne $1=p$; & 0 dénominateur de la pénultiéme fraction, retranché de q numérateur de la derniére, laiſſe $q=d$; faites donc $b=1$, dénominateur de la derniére fraction,

& vous aurez $aa-qa=1$: ſoit $q=2$, & l'équation deviendra $aa-2a=1$; donc $a=1+\sqrt{2}$, & $\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{2}}{1}$; par conſéquent ſi l'on diviſe perpétuellement les quantités $1+\sqrt{2}$ & 1, les quotiens ſeront 2, 2, 2, 2, 2 à l'infini ; mais ſi $\sqrt{2}$ eſt diviſé par 1, tous les quotiens après le premier ſeront les mêmes que quand $1+\sqrt{2}$ étoit diviſé par 1 ; mais dans ce cas le premier quotient ſera 1 & point 2 comme dans l'autre ; donc la diviſion toujours continuée des quantités $\sqrt{2}$ & 1 donnera pour premier quotient 1, & enſuite toujours 2, 2, 2, 2, 2 à l'infini ; or tous ceux qui ont la moindre teinture de Géométrie, ſavent que la diagonale & le côté d'un quarré ſont l'un à l'autre comme $\sqrt{2}$ à 1 ; d'où il ſuit (Voyez la 4ème. obſervation de cet Article) que le côté & la diagonale d'un quarré ſont incommenſurables, & qu'une diviſion toujours continuée de ces quantités donnera d'abord 1, & enſuite toujours 2, 2, 2, 2, 2 à l'infini. De plus, ſoit $q=1$, & nous aurons $b=1$, comme auparavant, & $aa-a=1$: que le plus grand ſegment d'une ligne coupée en extrême & moyenne raiſon ſoit au plus petit ſegment comme a eſt à 1 ; cela étant, puiſque (ſuivant la nature de cette ſection) toute la ligne eſt au plus grand ſegment comme le plus grand ſegment eſt au plus petit, nous avons cette proportion, $a+1$ eſt à a comme a eſt à 1, & cette équation $aa=a+1$, & $aa-a=1$: puis donc que nous retombons dans la même équation, ſoit que nous ſuppoſions $q=1$, ou que nous ſuppoſions que a eſt à 1 ou à b comme le plus grand ſegment de la ligne diviſée en extrême & moyenne raiſon eſt au plus petit, il s'enſuit que a eſt à b dans cette même raiſon ; & par conſéquent qu'une diviſion continuelle de ces ſegmens donnera pour quotiens 1, 1, 1, 1, 1, 1 à l'infini.

Exemple 3.

Que les quotiens ſoient toujours q, r, q, r. q, r. &c. à l'infini : cela étant une ſérie de fractions principales calculée au moyen des quotiens q & r ſera $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$, $\frac{q}{1}$, $\frac{qr+1}{r}$; où q numérateur de la pénultiéme fraction, multiplié par r dénominateur de la derniére donne $qr=p$; & 1 dénominateur de la pénultiéme fraction, retranché de $qr+1$ numérateur de la derniére, laiſſe $qr=d$; faites $b=r$ dénominateur de la derniére fraction, & la valeur de a ſe trouvera déterminée par cette équation, ſavoir $aa-qra=qr$: ſi $q=2$, & $r=1$, nous aurons cette analogie, comme a eſt à b ainſi $1+\sqrt{3}$ eſt à 1 ; donc une diviſion continuelle commencée par $1+\sqrt{3}$ & 1, donnera pour quotiens 2, 1. 2, 1. 2, 1. à l'infini ;

mais

mais dans une diviſion continuelle commencée par la $\sqrt{3}$ & 1, le premier quotient ſera 1, & tous les autres 1, 2. 1, 2. 1, 2. à l'infini. Si $q=1$, & $r=3$, a ſera à b comme $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ eſt à 3, ou comme $3+\sqrt{21}$ à 6.

Si l'on exigeoit de l'irrégularité dans quelques-uns des premiers quotiens, mais qu'après cela le reſte revînt perpétuellement de-même, voici comment il faudroit s'y prendre: *on demande que* n *&* p *ſoient les deux premiers quotiens, & que le reſte ſoit* q, r, s. q, r, s. q, r, s. *&c. à l'infini: il faut commencer d'abord par trouver à l'aide du problême précédent deux quantités* a *&* b *qui donnent à l'infini les quotiens reguliers décrits ci-deſſus ſans aucun autre; puis faire* pa + b = B, *&* nB + a = A, *& les deux quantités* A *&* B *donneront les quotiens requis.* Car puiſque $A=nB+a$, il s'enſuit que ſi l'on diviſe A par B, le quotient ſera n, & que le reſte ſera a: pareillement puiſque $B=pa+b$, il s'enſuit que ſi l'on diviſe B par a, le quotient ſera p, & que le reſte ſera b: la diviſion ſuivante eſt celle de a par b, & ainſi de ſuite; donc ſi cette diviſion eſt continuée à l'infini, le reſte des quotiens ſera $q, r, s. q, r, s. q, r, s.$ *&c.* à l'infini par l'hypothéſe.

PROBLEME 2.

204. *Je dois à quelqu'un un ſchelling, ou un certain nombre de ſchellings, & nous n'avons l'un & l'autre aucune monnoye que des guinées & des louis-d'or; les guinées valant vingt & un ſchellings piéce, & les louis-d'or dix-ſept: la queſtion eſt, comment je dois m'y prendre pour m'acquitter de cette dette.*

SOLUTION.

Par la ſuppoſition cette dette ne ſauroit être payée autrement que d'une de ces trois maniéres; que je paye des guinées, & que je reçoive des louis-d'or, ou que je paye des louis-d'or, & que je reçoive des guinées, ou bien enfin que je paye des guinées & des louis-d'or: il faut donc que cette dette ſoit ou la ſomme ou la différence d'un certain nombre de guinées & d'un certain nombre de louis-d'or, & conſéquemment la dette doit conſiſter en un ſchelling, qui eſt la plus grande meſure commune d'une guinée & d'un louis-d'or, ou dans un certain nombre de ſchellings ſans fractions; car il eſt manifeſte que ce qui meſure deux quantités doit auſſi meſurer, non ſeulement leurs multiples, mais auſſi les ſommes & les différences de ces multiples, comme nous avons déjà eu occaſion de l'obſerver ci-deſſus: & c'eſt-là l'unique limitation dont ce problême ſoit ſuſceptible. Ceci étant donc poſé, je fais $a=21$ & $b=17$,

$b=17$, & de ces deux valeurs de a & de b, je dérive une ſuite d'équations comme dans l'Art. 175, ſavoir

$$\begin{aligned} 1a-0b&=+21.\\ 0a-1b&=-17.\\ a-1b&=+4.\\ 4a-5b&=-1.\\ 13a-16b&=+1. \end{aligned}$$

Les deux derniéres de ces équations réſolvent le problême de la maniére ſuivante.

CAS 1.

Que la dette ſoit d'un ſchelling: cela étant ſi je veux payer en guinées & recevoir des louis-d'or, je choiſis des deux derniéres équations celle dont le terme abſolu eſt affirmatif, ſavoir $13a-16b=+1$, où l'on voit clairement, que ſi je paye treize guinées à mon créancier, & qu'il me rende ſeize louis-d'or, la dette ſera acquittée; car payer treize guinées & recevoir ſeize louis-d'or eſt la même choſe que payer treize guinées moins ſeize louis-d'or, ce qui ſuivant l'équation rapportée ci-deſſus vaut préciſément un ſchelling: d'un autre côté, ſi je voulois payer en louis-d'or, & recevoir des guinées, des deux derniéres équations je prendrois celle dont le terme abſolu eſt négatif, ſavoir $4a-5b=-1$, ou $5b-4a=+1$, où l'on voit, qu'en payant cinq louis-d'or & en recevant quatre guinées, la dette d'un ſchelling ſe trouve payée; & comme ces équations $4a-5b=-1$, & $13a-16b=+1$ ſont les plus ſimples de leur eſpéce par l'Art. 177, les ſolutions déduites de ces équations doivent être les plus ſimples auſſi.

Pour avoir d'autres ſolutions de ce problême, il faut conſidérer, que puiſque a eſt à b comme 21 à 17, nous avons $17a=21b$, ou $17a-21b=0$; & comme la fraction $\frac{21}{17}$ eſt réduite aux plus ſimples termes, l'équation $17a-21b=0$ eſt la plus ſimple de ſon eſpéce: ajoûtez préſentement $17a-21b=0$ à l'équation $13a-16b=1$. à diſcrétion, & de-même ajoûtez l'équation $21b-17a=0$ à l'équation $5b-4a=1$, & vous aurez un nombre infini de ſolutions du problême propoſé, ſoit que le payement ſe faſſe en guinées & le retour en louis-d'or, ou que le payement ſe faſſe en louis-d'or; & le retour en guinées.

CAS 2.

Que la dette ſoit de cinq ſchellings: en ce cas, ſi je voulois payer des guinées & recevoir des louis-d'or, je multiplierois l'équation $13a-16b=1$ par

par 5 nombre qui exprime la dette, & trouverois par ce moyen $65a-80b=5$: pour avoir maintenant la plus ſimple équation de cette eſpéce, c'eſt-à-dire celle dont le terme abſolu eſt $+5$, je ſouſtrais autant de fois que je le puis l'équation $17a-21b=0$ de l'équation $65a-80b=5$; & pour ſuivre la méthode la plus abrégée, je diviſe $65a$ par $17a$, c'eſt-à-dire, 65 par 17, & j'ai pour quotient 3 avec un reſte; d'où j'infére que je puis retrancher l'équation $17a-21b=0$ trois fois de l'équation $65a-80b=5$, & cependant laiſſer le coëfficient de a affirmatif: or $17a-21b=0$ étant multipliés par 3 donnent $51a-63b=0$, & cette quantité retranchée de $65a-80b=5$ laiſſe $14a-17b=5$; ainſi la maniére la plus ſimple d'acquitter la dette en faiſant le payement en guinées, eſt de donner 14 guinées & de recevoir 17 louis-d'or; & ſi de cette derniére équation $14a-17b=5$ on retranche de nouveau $17a-21b=0$, il reſtera $4b-3a=5$, c'eſt-à-dire, la maniére la plus ſimple de faire le payement en louis-d'or.

CAS 3.

Enfin que la dette ſoit de 100 piéces ou de 2000 ſchellings: pour réſoudre ce cas, multipliez l'équation $13a-16b=1$ par 2000, & vous aurez $26000a-32000b=2000$: pour rendre l'équation plus ſimple, diviſez 26000 par 17, ſavoir, le coëfficient de a dans l'équation $26000a-32000b=2000$ par le coëfficient de a dans l'équation $17a-21b=0$, & le quotient ſera 1529 avec un reſte: retranchez donc 1529 fois l'équation $17a-21b=0$, c'eſt-à-dire, l'équation $25993a-32109b=0$ de l'équation $26000a-32000b=2000$, & il vous reſtera l'équation $7a+109b=2000$, ce qui fait voir que ſi je paye 7 guinées & 109 louis-d'or, j'acquitte la dette de cent piéces ſans rien recevoir en retour.

C'eſt-là une des maniéres de faire la ſomme de cent piéces en guinées & en louis-d'or; & l'on trouvera autant d'autres maniéres que l'équation $17a-21b=0$ peut être ajoûtée de fois à l'équation $7a+109b=2000$, ſans détruire abſolument le coëfficient de b, ou en faire une quantité négative: ainſi pour ſavoir combien de fois cela ſe peut, diviſez 109 le coëfficient de b dans l'équation $7a+109b=2000$, par 21, le coëfficient de $-b$ dans l'équation $17a-21b=0$, & le quotient ſera 5 avec un reſte; donc il y a cinq autres maniéres de faire la ſomme de cent piéces en guinées & en louis-d'or, outre celle qui a déjà été trouvée, & par cela même ſix en tout, ſavoir,

7 guinées & 109 louis-d'or,
24 guinées & 88 louis-d'or,
41 guinées & 67 louis-d'or,
58 guinées & 46 louis-d'or,
75 guinées & 25 louis-d'or, &
92 guinées & 4 louis-d'or.

La premiére de ces maniéres réſout le probléme avec le plus petit nombre de guinées, & la derniére avec le plus petit nombre de louis-d'or poſſible, & par cela même peuvent s'appeller les ſolutions extrêmes du problême : mais ſi l'on demandoit les ſolutions extrêmes ſans les intermédiaires, il faudroit ſimplement ajoûter à une des équations extrêmes déjà trouvée, ſavoir, $7a+109b=2000$, 5 fois l'équation $17a-21b=0$, ſavoir, l'équation $85a-105b=0$, à cauſe qu'il y a cinq autres ſolutions de trouvées, & l'on auroit par ce moyen $92a+4b=2000$, qui eſt l'autre équation extrême.

Outre les ſix maniéres de payer la dette ſans échange, il y en a une infinité d'autres de faire le méme payement par voye d'échange, comme on peut s'en convaincre en faiſant une addition & une ſouſtraction continuelle de l'équation $17a-21b=0$. *C. Q. F. D.*

DEFINITION.

205. *Soient* q, r, s, t *des nombres donnés, & que* a, b, c, d, e, f, *forment une ſérie dont on connoît les deux premiers termes* a *&* b, *voici comment il faudra s'y prendre pour déterminer la valeur des autres termes : faites* $qb+a=c$, $rc+b=d$, $sd+c=e$, $te+d=f$; *cela étant la ſérie* a, b, c, d, e, f, *pourra être dite formée de ſes deux premiers termes* a *&* b *par les nombres* q, r, s, t. Ainſi une ſérie formée de 1 & de 0 par les nombres 2, 3, 4, 5, 6, ſera 1, 0, 1, 3, 13, 68, 421; & une ſérie formée de 0 & de 1 par les nombres 3, 4, 5, 6, ſera 0, 1, 3, 13, 68, 421 : d'où il ſuit, que *Si une ſérie eſt formée de* 1 *&* 0 *par quelque ſuite des nombres* 2, 3, 4, 5, 6, *& qu'après avoir mis à part le premier nombre* 2, *on forme une autre ſérie de* 0 *&* 1 *par les nombres reſtans* 3, 4, 5, 6, *cette derniére ſérie ſera la même que la premiére, pourvu que le premier terme* 1 *en ſoit ôté.*

PROBLEME 3.

206. *On demande autant de nombres qu'on voudra, qui ſoient tels, que ſi l'on diviſe un d'eux par deux diviſeurs donnés, dont* a *eſt le plus grand &* b *le plus petit, il y ait deux reſtes donnés* d *&* e *reſpectivement.*

So-

SOLUTION.

Soit g un des nombres qu'on cherche, & l la plus grande mesure commune des deux diviseurs donnés a & b; cela étant, puisque l mesure a, & que a mesure $\overline{g-d}$ par la supposition, il s'ensuit que l doit mesurer $\overline{g-d}$; pareillement, puisque l mesure b, & que b mesure $\overline{g-e}$, l doit mesurer $\overline{g-e}$; ainsi l mesure les deux nombres $\overline{g-d}$ & $\overline{g-e}$; donc si l'on retranche le premier nombre du dernier, l doit mesurer le reste $\overline{d-e}$; par conséquent si ce problême est possible, $\frac{d-e}{l}$ doit être réductible à un nombre entier, affirmatif ou négatif suivant que d se trouve être plus grand ou plus petit que e. Tout ceci étant posé, qu'on assigne les valeurs de a & de b; comme par exemple, soit $a=105$ & $b=40$, & qu'on forme une série d'équations de ces deux valeurs de a & de b suivant l'Art. 175.

Equation 1, $1a-0b=+105$.
2, $0a-1b=-40$.
3, $1a-2b=+25$.
4, $1a-3b=-15$.
5, $2a-5b=+10$.
6, $3a-8b=-5$.
7, $5a-13b=+5$.

Il paroît par les deux dernières de ces équations que 5 est la plus grande mesure commune de a & de b (Voyez Art. 175,) & par conséquent que $\frac{d-e}{5}$ doit être un nombre entier dans tous les cas possibles de ce problême. Prenez maintenant la dernière équation de la série dont le terme absolu est négatif comme $3a-8b=-5$, & vous aurez $3a+5=8b$; multipliez les termes de cette dernière équation par le nombre $\frac{d-e}{5}$, & vous aurez $3a\times\frac{d-e}{5}+5\times\frac{d-e}{5}=8b\times\frac{d-e}{5}$; c'est-à-dire, $3a\times\frac{d-e}{5}+d-e=8b\times\frac{d-e}{5}$; transposez $-e$, & vous aurez $3a\times\frac{d-e}{5}+d=8b\times\frac{d-e}{5}+e$; mais le quotient du nombre $3a\times\frac{d-e}{5}$ divisé par a est $3\times\frac{d-e}{5}$, & il ne reste rien; donc le nombre $3a\times\frac{d-e}{5}+d$ étant divisé par a, il restera d; semblablement si le nombre $8b\times\frac{d-e}{5}+e$ est divisé par b, il restera e: puis donc que $3a\times\frac{d-e}{5}+d=8b\times\frac{d-e}{5}$

$\frac{d-e}{5}+e$, le même nombre $3a\times\frac{d-e}{5}+d$, ou $\frac{3a}{5}\times\overline{d-e}+d$, répondra aux deux conditions du problême; mais $a=105$ par l'hypothèse; donc $\frac{3a}{5}\times\overline{d-e}+d=63\times\overline{d-e}+d$; donc le nombre $63\times\overline{d-e}+d$ satisfera de-même aux deux conditions.

Cette solution étant ainsi trouvée, on pourra en avoir tant d'autres qu'on voudra par une continuelle addition & soustraction de 840, le plus petit multiple commun de a & de b: car comme ce nombre (qu'on trouve par l'Art. 171.) étant séparément divisé par 105 & par 40, donne deux quotiens sans reste, il s'ensuit que si ce multiple commun, ou plusieurs de ces multiples sont ajoûtés à $63\times\overline{d-e}+d$, ou soustraits de cette quantité, les restes, quand la division est faite par a & b, seront parfaitement les mêmes qu'avant l'addition & la soustraction, & ainsi seront toujours d & e. Par ce moyen nous aurons une infinité de nombres tels que nous les avons décrits ci-dessus. *C. Q. F. D.*

Le théorême, qui vient d'être calculé pour les diviseurs 105 & 40, est général, quels que soient les restes d & e, pourvu que $\frac{d-e}{5}$ soit un nombre entier: par exemple, on demande un nombre, qui étant divisé séparément par 105 & par 40, donne respectivement pour restes 39 & 9: ici $d=39$, $e=9$, $d-e=30$, $63\times\overline{d-e}=1890$, $63\times\overline{d-e}+d=1929$; donc 1929 est un nombre qui satisfait aux conditions du problême: mais si l'on demandoit le plus petit nombre possible, qui y satisfît de-même, il faudroit retrancher le nombre 840 (qui est le plus petit multiple commun de 105 & de 40) autant de fois qu'il se pourra, de 1929, c'est-à-dire, il faudroit diviser 1929 par 840, & le reste 249 seroit le plus petit nombre, lequel étant divisé par 105 & par 40, auroit respectivement pour restes 39 & 9. Que ces restes (pour donner un autre exemple) au lieu d'être 39 & 9, soient 9 & 39 par rapport à a & b respectivement; cela étant, $d-e$ sera -30, & $63\times\overline{d-e}=-1890$, & $63\times\overline{d-e}+d=-1890+9=-1881$; divisez -1881 par 840, & le reste sera -201, lequel est le plus petit nombre négatif de cette espéce; mais il nous faut le plus petit nombre affirmatif; c'est pourquoi si au nombre négatif déjà trouvé, savoir -201, on ajoûte le plus petit multiple commun 840, on aura 639 pour le plus petit nombre affirmatif, lequel étant divisé par 105 & par 40, laisse respectivement pour restes 9 & 39.

Si quelqu'un souhaitoit une démonstration synthétique, qui prouvât que le nombre $63\times\overline{d-e}+d$, ou $64d-63e$, étant séparément divisés par 105 & par 40, donnent respectivement pour restes d & e, il suffiroit pour

pour cela qu'il obſervât, que ſi les diviſeurs 105 & 40 avoient été premiers entre eux, la choſe auroit paru clairement par la ſimple diviſion du nombre $64d-63e$ par 105 & par 40; mais comme ces nombres ne ſont point premiers entre eux, il y a d'autres conſidérations à faire que voici. Puiſque $64d-63e$ étant diviſés par 105, le dernier reſte doit être d, j'extermine l'autre quantité $-63e$ de la maniére ſuivante: la plus grande meſure commune de 105 & de 40 eſt 5: donc $\frac{d-e}{5}$ eſt un nombre entier en vertu de ce qui a déjà été prouvé; or $63\times\overline{d-e}=5\times 63\times\frac{d-e}{5}$, ou $315\times\frac{d-e}{5}$ (dont le multiplicateur & le multiplicande ſont également des nombres entiers); & le nombre $315\times\frac{d-e}{5}$ eſt diviſible ſans reſte par 105, à cauſe que le nombre 315 l'eſt; donc $63d-63e$ ſe diviſent par 5, ſans reſte; donc ſi l'on ajoûte $63d-63e$ à un nombre quelconque, ou qu'on l'en retranche, & que la ſomme ou la différence ſoit diviſée par 105, le reſte de cette diviſion ſera le même que ſi une pareille addition ou ſouſtraction n'avoit jamais été faite; retranchez donc $63d-63a$ de $64d$, $63e$, & il reſtera d; par conſéquent $64d-63e$, étant diviſés par 105, auront d pour reſte. Enſuite je diviſe $64d-63e$ par 40, & il reſte $24d-23e$; mais ſi le théorême eſt vrai, le nombre e doit être le dernier reſte: pour m'en convaincre, je retranche l'autre quantité $24d$ du reſte $24d-23e$ de la maniére ſuivante: $24\times\overline{d-e}$, ou $120\times\frac{d-e}{5}$ eſt un nombre diviſible ſans reſte par 40; retranchez donc $24d-24e$ de $24d-23e$, & il reſtera e; donc $64d-63e$ étant diviſés par 40 auront e pour reſte. *C. Q. F. D.*

Paſſons préſentement à la formation d'un théorême général pour deux diviſeurs quelconques a & b, où les reſtes ſoient poſſibles. Dans cette vue examinons la ſolution précédente, par laquelle il a paru que le nombre $\frac{3a}{5}\times\overline{d-e}+d$ ſatisfaiſoit aux conditions du problême. Or ſi l'on veut bien faire attention à la maniére dont cette ſolution a été trouvée, on s'appercevra aiſément que dans cette expreſſion $\frac{3a}{5}\times\overline{d-e}+d$, le nombre 3 étoit le coëfficient de a dans la derniére équation de la ſérie précédente, dont le terme abſolu eſt négatif, & que le nombre 5 étoit la plus grande meſure commune des deux diviſeurs donnés a & b: faites donc $r=3$, $l=5$ comme ci-deſſus, & l'expreſſion $\frac{3a}{5}\times\overline{d-e}+d$ ſera changée en celle-ci, $\frac{ra}{l}\times\overline{d-e}+d$: mais il nous reſte encore à ſurmon-

ter la plus grande difficulté, qui eſt de découvrir la valeur du nombre r ſans calculer toutes les équations dans les ſéries précédentes, c'eſt-à-dire, de trouver le coëfficient de a dans la derniére équation de celles dont les termes abſolus ſont négatifs, ou (ce qui revient au même) de trouver le coëfficient de a dans la derniére équation qui occupe un rang pair dans les ſéries: car un ſimple coup-d'œil jetté ſur ces ſéries ſuffit pour faire voir que tous les rangs pairs ſont remplis par des équations dont les termes abſolus ſont négatifs. Cela étant, il paroît clairement par la nature & par la génération de ces équations, que les coëfficiens de a, depuis la premiére équation juſqu'à la derniére, ſont une ſérie de nombres formée de 1 & de 0 par les quotiens d'une diviſion continuelle des diviſeurs a & b; & le dernier article démontre qu'une pareille ſérie eſt toujours équivalente à une ſérie commençant depuis 0 & 1, & formée par les mêmes quotiens à l'exception du premier; donc en cherchant le nombre r, le premier de ces quotiens peut toujours être mis à quartier, pourvu qu'on commence le calcul depuis 0 & 1. De plus, ſi le nombre des quotiens ſe trouve impair, le dernier quotient nous donnera un coëfficient de a, qui occupe un rang impair, au-lieu que c'eſt dans un rang pair que doit être le dernier coëfficient que nous cherchons; c'eſt pourquoi ſi le nombre des quotiens eſt impair, tant le premier que le dernier doivent être rejettés; mais ſi le nombre en eſt pair, il ne faut que rejetter le premier quotient, & réduire le dernier, c'eſt-à-dire, le diminuer d'une unité, comme on fait toujours en calculant la derniére équation, ſoit qu'elle occupe un rang pair ou impair, (Voyez Art. 175), & l'équation, que nous cherchons préſentement, ſera, en ce cas, la derniére de la ſérie. Cela étant, ſi l'on forme une ſérie de nombres depuis 0 & r par le ſecours des quotiens en queſtion, le dernier terme de la ſérie ſera r, & le nombre $\frac{ra}{l} \times \overline{d-e} + d$, qui ſatisfait aux conditions du problême, ſera connu.

Si l'on demande ce qu'il faut faire, quand (en trouvant la plus grande meſure commune l) le nombre des quotiens eſt pair, & le dernier quotient $= 1$, l'unité ne pouvant être réduite; ma réponſe eſt, qu'un pareil cas ne ſauroit jamais avoir lieu.

EXEMPLE I.

Soit $a = 105$, $b = 40$, & par conſéquent $l = 5$, comme dans le problême précédent; & les quotiens d'une diviſion continuelle de a & de b ſeront 2, 1, 1, 1, 2; laiſſez-là le premier & le dernier, à cauſe de leur rang impair, & des quotiens qui reſtent 1, 1, 1, formez de 0 & de 1 la

ſérie

série suivante 0, 1, 1, 2, 3, & r sera le dernier terme 3; donc $\frac{ra}{l} \times \overline{d-e} + d$, sera $\frac{3a}{5} \times \overline{d-e} + d = 63 \times \overline{d-e} + d$.

N. B. Aussi longtems que les diviseurs a & b sont en même raison l'un à l'égard de l'autre, l'expression du nombre cherché savoir $\frac{ra}{l} \times \overline{d-e} + d$ sera la même, que les diviseurs soient ce qu'ils voudront; car les nombres $\frac{a}{l}$ & $\frac{b}{l}$ étant les derniers dans leur proportion, doivent toujours être les mêmes, ce qui est vrai pareillement des quotiens dont le nombre r est dérivé: ainsi toute la différence consistera simplement dans les différentes restrictions auxquelles les restes d & e pourront être sujets; car si ce problême est possible $\frac{d-e}{l}$ doit toujours être un nombre entier, comme on l'a vu ci-dessus: par exemple, si au-lieu de prendre pour diviseurs 105 & 40, nous avions pris 21 & 8, les plus petits dans leur proportion, le nombre $63 \times \overline{d-e} + d$ n'auroit pas laissé de satisfaire aux conditions du problême; & en ce cas les restes d & e auroient pu être faits deux nombres entiers quelconques, puisque $\frac{d-e}{1}$ est toujours un nombre entier.

EXEMPLE 2.

Que les diviseurs donnés a & b soient 840 & 36, dont la plus grande mesure commune l est 12, & les quotiens, au moyen desquels cette mesure se trouve, 23 & 3, occupant l'un & l'autre des rangs pairs; ainsi laissez-là 23, & réduisez l'autre quotient 3 à 2, & la série formée de 0 & de 1 sera 0, 1, 2; donc en ce cas $r=2$, & $\frac{ra}{l} \times \overline{d-e} + d$ sera $140 \times \overline{d-e} + d = 141d - 140e$, qui est un nombre tel que l'exige le problême, comme il y a moyen de le démontrer synthétiquement de la manière suivante. D'abord j'extermine $-140e$, après avoir observé que $140d - 140e$ ou $140 \times \overline{d-e}$ ou $1680 \times \frac{d-e}{12}$ est un nombre divisible par 840; donc $140d - 140e$ peuvent être retranchés de $141d - 140e$ sans affecter le reste; cette soustraction étant faite, il restera d: voici comment je m'y prends ensuite pour exterminer d; $141d - 141e$, ou $141 \times \overline{d-e}$, ou $1692 \times \frac{d-e}{12}$ est un nombre divisible par 36, & par cela même $141d - 141e$ peuvent être retranchés de $141d - 140e$ sans affecter le reste; ainsi faites cette soustraction, & vous aurez pour reste e.

EXEM-

EXEMPLE 3.

Faites $a=9$, $b=7$; par conſéquent $l=1$, & les quotiens trouvés en cherchant la valeur de l ſeront 1, 3, 2, nombre impair; laiſſez-là le premier & le dernier de ces quotiens, ne faiſant uſage que de celui du milieu, qui eſt 3, & la ſérie ſera 0, 1, 3; donc $r=3$, & $\frac{ra}{l} \times \overline{d-e} + d = 27 \times \overline{d-e} + d = 28d - 27e$; & comme les diviſeurs 9 & 7 ſont des nombres premiers entre eux, la démonſtration ſynthétique ſera très-facile; car ſi l'on diviſe $28d$ par 9 le reſte ſera d, & ſi $27e$ ſont diviſés par 9, le reſte ſera 0; donc la diviſion de $28d-27e$ ne laiſſe pour reſte que d: de plus, ſi l'on diviſe $28d$ par 7, il ne reſtera rien, & ſi $-27e$, c'eſt-à-dire, ſi $-28e+e$ ſont diviſés par 7, le reſte ſera e; par conſéquent $28d-27e$ diviſés par 7 donneront pour reſte e; & c'eſt ce qui arrivera toujours tant que les nombres d & e ſeront premiers entre eux; c'eſt-à-dire, que la vérité de la règle donnée ſe manifeſte par une ſimple diviſion ſans autre opération, les reſtes en ce cas n'étant aſſujettis à aucune reſtriction.

EXEMPLE 4.

Soit $a=30$, $b=10$, & par conſéquent $l=10$, & il n'y aura qu'un ſeul quotient d'une diviſion perpétuelle de 30 & de 10, ſavoir 3: nombre, qui doit être rejetté pour deux raiſons; car il eſt non ſeulement le premier quotient, mais auſſi le dernier, le nombre des quotiens étant impair; ainſi il n'y a pas moyen d'ajoûter aux deux premiers termes 0 & 1 de la ſérie d'autres termes; parce qu'il n'y a point de quotiens par leſquels quelques autres termes puiſſent être engendrés; donc en ce cas, le dernier terme 1 doit être conſidéré comme le dernier terme de la ſérie. Ici donc $r=1$, & $\frac{ra}{l} \times \overline{d-e} + d = 3 \times \overline{d-e} + d = 4d - 3e$, ce que je démontre ainſi: le nombre $3d-3e$ ou $30 \times \frac{d-e}{10}$ eſt un multiple de 30; ainſi retranchez $3d-3e$ de $4d-3e$, & il reſtera d: d'un autre côté $4d-4e$ ou $40 \times \frac{d-e}{10}$ eſt un multiple de 10; retranchez donc $4d-4e$ de $4d-3e$, & il reſtera e.

EXEMPLE 5.

Soit $a=13$, $b=7$, & par conſéquent $l=1$; de plus ſoit $e=0$; & les quotiens d'une continuelle diviſion commencée par 13 & 7 ſeront 1, 1, 6; rejettez le premier & le dernier de ces quotiens à cauſe qu'ils occupent des

des rangs impairs, & le quotient reſtant ſera 1, & la ſérie même 0, 1, 1; donc $r=1$, & $\frac{ra}{l}\times\overline{d-e}+d=14d$, ce qui ſatisfera aux conditions du problême; car $14d$ étant diviſés par 13, il reſtera d, & ſi l'on diviſe $14d$ par 7, il ne reſtera rien.

EXEMPLE 6.

Suppoſons que l'année préſente de notre Ere ſoit mille ſept cens trente & neuf, & qu'il y a eu, il n'y a pas tout-à-fait deux ſiécles une année, dans laquelle le cycle ſolaire étoit huit, & le cycle lunaire dix: on demande quelle étoit cette année.

N. B. Si à quelque année de notre Ere on ajoûte 9, & que la ſomme ſoit diviſée par 28, le reſte, ou 28, s'il ne reſte rien, eſt ce qu'on appelle le cycle ſolaire pour cette année-là; & ſi l'on ajoûte 1 à quelque année de notre Ere, & que la ſomme ſoit diviſée par 19, le reſte, ou 19, s'il ne reſte rien, eſt le cycle lunaire: il ſuit de-là que ſi quelque année de notre Ere eſt diviſée ſéparément par 28 & par 19, & que les reſtes ſoient d & e reſpectivement, $d+9$, ou $d+9-28$ ſera le cycle ſolaire, & $e+1$ ou $e+1-19$ ſera le cycle lunaire pour cette année-là: or dans le cas, que nous avons ſuppoſé, $d+9$ ne ſauroit être égal à 8, parce que d ſeroit alors une quantité négative; faites donc $d+9-28=8$, & vous aurez $d=27$; outre cela, faites $e+1=10$, & vous aurez $e=9$; ainſi la queſtion ſe trouve réduite à ceci; *Quel eſt le nombre, lequel étant ſéparément diviſé par vingt & huit & par dix-neuf, aura reſpectivement pour reſtes vingt & ſept & neuf?*

Ici $a=28$, $b=19$, $l=1$, $d=27$, $e=9$, & les quotiens d'une diviſion continuelle commencée par 28 & 19, ſont 1, 2 & 9, en nombre impair; ainſi retranchez le premier & le dernier de ces quotiens, & avec le quotient 2 qui reſte formez la ſérie 0, 1, 2; donc $r=2$, & $\frac{ra}{l}\times\overline{d-e}+d=56\times\overline{d-e}+d$ ou $57\times\overline{d-e}+e$, ce qui donne une formule générale pour trouver l'année de notre Ere qui répond aux deux cycles donnés: ſubſtituez préſentement à d & à e leur valeur, c'eſt-à-dire, faites $d=27$ & $e=9$, & vous aurez $56\times\overline{d-e}+d=1035$, nombre qui eſt trop petit pour ſatisfaire aux conditions du problême, & qu'il faut aggrandir de la maniére ſuivante: le plus petit multiple commun de 28 & de 19 eſt 532; d'où il ſuit qu'après une révolution de 532 ans, les deux cycles ſe retrouvent les mêmes qu'ils étoient 532 ans auparavant: ainſi ajoûtez une révolution périodique de 532 ans à 1035, nombre trouvé ci-deſſus, & la ſomme 1567 ſera le vrai nombre de l'année cherchée, com-

me étant entre les limites marquées ci-deſſus: car $1567+9$, ou 1576 étant diviſés par 28, il reſte 8 pour le cycle ſolaire; & $1567+1$, ou 1568 étant diviſés par 19, il reſte 10 pour le cycle lunaire.

Probleme 4.

207. *On demande des nombres à diſcrétion, qui ayent cette propriété, ſavoir, que ſi quelqu'un d'eux eſt diviſé ſéparément par trois diviſeurs donnés* a, b *&* c, *dont* a *eſt ſuppoſé le plus grand &* c *le plus petit; les reſtes ſoient trois nombres donnés* d, e *&* f *reſpectivement.*

Solution.

Déſignez par A *le plus petit multiple commun de* a *&* b; *puis trouvez (par le dernier problême) deux nombres* g *&* h *de telle nature, que* g *étant diviſé par* a *&* b *ait* d *&* e *pour reſtes, & que* h *étant diviſé par* A *&* c *ait pour reſtes* g *&* f; *je dis, cela étant, que* h *eſt un des nombres qui ſatisfera aux conditions: Et quand un pareil nombre eſt trouvé, on peut en avoir autant d'autres qu'on voudra, par une addition ou une ſouſtraction continuelle du plus petit multiple commun des trois diviſeurs* a, b *&* c, *trouvé par l'Art.* 172.

La démonſtration de cette ſolution eſt facile; car puiſque par la ſuppoſition a meſure A, & que A meſure $\overline{b-g}$, a meſure $\overline{b-g}$; mais a meſure auſſi $g-d$; donc a meſure également $\overline{b-g}$ & $\overline{g-d}$, & par conſéquent leur ſomme $\overline{b-d}$: pareillement, puiſque b meſure A, & que A meſure $\overline{b-g}$, b meſure $\overline{b-g}$; mais b meſure auſſi $\overline{g-e}$; donc b meſure $\overline{b-e}$; donc puiſque a meſure $\overline{b-d}$, & que b meſure $\overline{b-e}$, il ſuit, que b étant ſéparément diviſé par a & par b, les reſtes ſeront d & e reſpectivement: mais ſi b eſt diviſé par c, le reſte eſt f par l'hypothéſe; donc b eſt un nombre tel, qu'étant diviſé par les trois diviſeurs donnés a, b & c, on aura les trois reſtes donnés d, e & f reſpectivement. *C. Q. F. D.*

Exemple 1.

On demande un nombre, qui, étant diviſé ſéparément par 105, par 40 & par 36, ait pour reſtes d, e & f reſpectivement.

Avant que d'entreprendre la ſolution de ce problême, ou de quelque autre problême de cette nature, nous devons examiner s'ils ne ſont point ſujets à quelque reſtriction, afin de pouvoir juger ſi ces ſortes de problêmes ſont poſſibles ou non: entreprenons ici cet examen, & nous trouverons que ſi le problême eſt poſſible, les reſtes d, e & f ſeront tels, que $\frac{d-e}{5}$, $\frac{d-f}{3}$, & $\frac{e-f}{4}$ devront néceſſairement être tous des nombres.

bres entiers: c'eſt ce qui paroît manifeſtement par la ſolution du problême précédent; car le nombre 5 eſt la plus grande meſure commune de a & de b, le nombre 3 celle de a & de c, & le nombre 4 celle de b & de c: voyons donc ſi à l'aide de ces ſuppoſitions nous pouvons conſtruire & démontrer une formule générale pour les diviſeurs donnés ſans avoir recours à quelque autre moyen. Premiérement donc nous devons trouver un nombre qui, étant ſéparément diviſé par les deux premiers diviſeurs 105 & 40, ait pour reſtes d & e; or on ne ſauroit douter qu'un pareil nombre ne puiſſe être déſigné par $\overline{64d-63e}$, comme dans le premier exemple du problême précédent; appellez ce nombre g: cela étant, comme le plus petit multiple commun des deux premiers diviſeurs 105 & 40 eſt 840, nous devons trouver un autre nombre qui, étant diviſé par 840 & par le troiſiéme diviſeur 36, ait pour reſtes g & f: un pareil nombre eſt ſans-contredit $141g-140f$, comme dans le ſecond exemple du même problême; faites donc $64d-63e=g$, & $141g-140f=h$, & la grandeur h ſera le nombre requis dans le problême.

S'il falloit, ſans avoir recours à g, exprimer la valeur de h uniquement à l'aide des reſtes d, e & f, rien ne ſeroit plus facile: car puiſque $g=64d-63e$, nous aurons $141g-140f=9024d-8883e-140f=h$; diviſez le nombre $9024d-8883e-140f$ par 2520, (lequel étant le plus petit multiple commun de tous les trois diviſeurs, ne ſauroit affecter les reſtes rélativement à ces diviſeurs,) & vous aurez pour reſte une plus petite valeur de h, égale à $1464d-1323e-140f$; ajoûtez à cette valeur $2520e+2520f$ pour rendre tous les termes affirmatifs, & vous aurez $h=1464d+1197e+2380f$, qui eſt la moindre valeur de h qu'on puiſſe exprimer en ces termes généraux, juſqu'à ce qu'on ait déſigné le reſtes d, e & f par des nombres déterminés.

Les démonſtrations ſynthétiques de ces formules ont quelque choſe de très-curieux; & c'eſt ce qui m'a engagé à choiſir cet exemple, comme étant très-propre à faciliter l'intelligence des formules en queſtion. Il s'agit donc de prouver, que le nombre h trouvé ci-deſſus, ſavoir, $1464d+1197e+2380f$, eſt tel qu'étant ſéparément diviſé par 105, par 40 & par 36, il aura pour reſtes d, e & f. Pour le démontrer, je diviſe premiérement h par 105, & trouve que le reſte eſt $99d+42e+70f$; mais afin de rendre ce reſte plus ſimple, & d'eſſayer ſi le dernier reſte de cette diviſion ſera d, j'efface les deux autres quantités $42e$ & $70f$ à l'aide de ces deux reſtrictions, dans leſquelles le dernier reſte d ſe trouve mêlé, ſavoir, en ſuppoſant que $\frac{d-e}{5}$ & $\frac{d-f}{3}$ ſont des nombres entiers. Je dis donc: le nom-

bre $42d-42e$, ou $42\times\overline{d-e}$, ou $210\times\frac{d-e}{5}$, eſt diviſible par 105 ſans reſte; donc on peut ajoûter $42d-42e$ à $99d+42e+70f$ ſans affecter les reſtes ſuivans; faites cette addition, & la ſomme ſera $141d+70f$: outre cela, le nombre $70d-70f$, ou $210\times\frac{d-f}{3}$, eſt diviſible par 105, & ainſi on peut ajoûter $70d-70f$ à $141d+70f$, & la ſomme ſera $211d$, laquelle étant diviſée par 105 il reſtera d; donc b eſt un nombre tel, qu'étant diviſé par 105, il aura pour reſte d. Je diviſe enſuite le nombre b, ou $1464d+1197e+2380f$, par le diviſeur ſuivant 40, & trouve que le reſte eſt $24d+37e+20f$, au-lieu que le dernier reſte doit être e; c'eſt pourquoi j'extermine les deux quantités $24d$ & $20f$ par le moyen de deux reſtrictions, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant que $\frac{d-e}{5}$ & $\frac{e-f}{4}$ ſont des nombres entiers, ce qui me met en état d'exterminer d par la premiére de ces ſuppoſitions, & f par la ſeconde: car le nombre $24d-24e$, ou $120\times\frac{d-e}{5}$, eſt diviſible par 40; donc $24d-24e$ peuvent être ſouſtraits de $24d+37e+20f$, & le reſte ſera $61e+20f$: de plus, $20e-20f$, ou $80\times\frac{e-f}{4}$ eſt diviſible par 40; donc $20e-20f$ peuvent être ajoûtés à $61e+20f$, & la ſomme ſera $81e$, laquelle étant diviſée par 40 aura pour reſte e. Enfin je diviſe le nombre $1464d+1197e+2380f$ par 36, & le reſte eſt $24d+9e+4f$; mais le dernier reſte doit être f; c'eſt pourquoi j'extermine $24d+9e$, en ſuppoſant que $\frac{d-f}{3}$ & $\frac{e-f}{4}$ ſont des nombres entiers: raiſonnant donc comme ci-deſſus, je dis, le nombre $24d-24f$, ou $72\times\frac{d-f}{3}$, eſt diviſible par 36; donc on peut ſouſtraire $24d-24f$ de $24d+9e+4f$, & il reſtera $9e+28f$: de plus, le nombre $9e-9f$, ou $36\times\frac{e-f}{4}$, eſt diviſible par 36; donc on peut ſouſtraire $9e-9f$ de $9e+28f$, & il reſtera $37f$, leſquels étant diviſés par 36 laiſſent pour reſte f; donc le nombre $1464d+1197e+2380f$ eſt tel qu'étant diviſé par 105, par 40 & par 36, il aura pour reſtes d, e & f reſpectivement. *C. Q. F. D.*

N. B. Si les diviſeurs avoient été 60, 45 & 36, l'exemple auroit été auſſi bon, & les opérations plus ſimples.

EXEMPLE 2.

Que les diviſeurs ſoient 9, 8 & 6: cela étant, comme les nombres 9 & 8 ſont premiers entre eux, les reſtrictions ſeront réduites à ces deux-ci,

ci, ſavoir, que $\frac{d-f}{3}$ & $\frac{e-f}{2}$ doivent être l'un & l'autre des nombres entiers. Cette ſuppoſition étant admiſe, voici la formule: faites $64d-63e=g$, & $13g-12f=h$, & h déſignera un nombre tel qu'on le demande: ôtez g de cette formule, & vous aurez $832d-819e-12f=h$; diviſez par 72 (le plus petit multiple commun des trois diviſeurs donnés) pour rendre l'expreſſion plus ſimple, & puis ajoûtez $72e+72f$ afin de n'avoir que des quantités affirmatives, & vous aurez $40d+45e+60f$ pour la plus petite valeur de h dans le cas préſent.

Si l'on vouloit démontrer ce théorême ſynthétiquement, il ſaudroit diviſer le nombre $40d+45e+60f$ par le premier diviſeur 9, & l'on auroit pour reſte $4d+6f$; mais comme d doit être le dernier reſte, il eſt néceſſaire d'ôter $6f$ à l'aide de la reſtriction qui ſuppoſe $\frac{d-f}{3}$ un nombre entier, ce qui ſe fera ainſi: le nombre $6d-6f$, ou $18\times\frac{d-f}{3}$ eſt diviſible par 9; donc $6d-6f$ peuvent être ajoûtés à $4d+6f$, & la ſomme ſera $10d$, laquelle étant diviſée par 9 laiſſe d. Je paſſe après cela au diviſeur ſuivant 8, diviſant $40d+45e+60f$ par 8, & le reſte eſt $5e+4f$; mais e doit être le dernier reſte: ainſi $4f$ doivent être ôtés à l'aide de la ſuppoſition que $\frac{e-f}{2}$ eſt un nombre entier. Je dis donc: le nombre $4e-4f$, ou $8\times\frac{e-f}{2}$ eſt diviſible par 8; donc $4e-4f$ peuvent être ajoûtés à $5e+4f$, & la ſomme ſera $9e$, leſquels étant diviſés par 8 laiſſent pour reſte e. Enfin, je diviſe $40d+45e+60f$ par le dernier diviſeur 6, & le reſte eſt $4d+3e$: or ces deux quantités (f devant être le dernier reſte) ſeront exterminées ainſi: le nombre $4d-4f$, ou $12\times\frac{d-f}{3}$, eſt diviſible par 6; donc $4d-4f$ peuvent être retranchés de $4d+3e$, & il reſtera $3e+4f$; mais le nombre $3e-3f$, ou $6\times\frac{e-f}{2}$, eſt auſſi diviſible par 6; donc $3e-3f$ peuvent être retranchés de $3e+4f$, & il reſtera $7f$, leſquels étant diviſés par 6 laiſſeront pour reſte f. *C. Q. F. D.*

EXEMPLE 3.

Que les diviſeurs ſoient 6, 5 & 4, & les reſtes ne ſeront alors ſujets qu'à une ſeule reſtriction, qui eſt que $\frac{d-f}{3}$ doit être un nombre entier. Nous aurons en ce cas la formule ſuivante $25d-24e=g$, & $16g-15f=h$; g étant exterminé, il vient $400d-384e-15f=h$; diviſez par 60

(le plus petit multiple commun des trois diviſeurs donnés) & ajoûtez au reſte $60e + 60f$ pour rendre tous les termes affirmatifs, & il viendra $40d + 36e + 45f = b$. Pour être convaincu de la juſteſſe de cette opération, on n'a qu'à diviſer $40d + 36e + 45f$ par le premier diviſeur 6, & le reſte ſera $4d + 3f$; mais le nombre $3d - 3f$, ou $6 \times \frac{d-f}{2}$; eſt diviſible par 6; donc $3d - 3f$ peuvent être ajoûtés à $4d + 3f$, & la ſomme ſera $7d$, laquelle étant diviſée par 6 laiſſe pour reſte d. Si l'on continue enſuite à diviſer $40d + 36e + 45f$ par les deux autres diviſeurs 5 & 4 ſéparément, les reſtes ſeront reſpectivement e & f, comme on peut le voir par une ſimple diviſion.

Il paroît par ces exemples, & par la nature des opérations mêmes, qu'on n'a jamais beſoin d'autres reſtrictions que celles qu'on déduit de la nature des diviſeurs au commencement du problême; & que quand quelque reſtriction pareille ne ſauroit s'en déduire, il n'en faut aucune, les reſtes ſe trouvant par une ſimple diviſion; c'eſt ce qui paroîtra par l'exemple ſuivant.

EXEMPLE 4.

On demande en quelle année de notre Ere le cycle du Soleil a été huit, le cycle de la Lune dix, & le cycle d'Indiction dix.

Il eſt bon de ſe ſouvenir ici, que ſi à quelque année de notre Ere on ajoûte 3, & qu'on diviſe la ſomme par 15, le reſte, ou 15 s'il ne reſte rien, s'appelle le cycle d'Indiction pour cette année-là: il ſuit de-là, comme auſſi des définitions des deux autres cycles déjà données dans le dernier exemple de l'Article précédent, que ſi l'on diviſe quelque année de notre Ere par 28, par 19 & par 15, & que les reſtes ſoient d, e & f reſpectivement, $d+9$, $e+1$ & $f+3$, ſeront les cycles reſpectifs du Soleil, de la Lune & d'Indiction; mais s'il arrivoit que ces nombres fuſſent plus grands que 28, 19 & 15, en ce cas $d+9-28$, $e+1-19$, & $f+3-15$ ſeroient les cycles reſpectifs: ainſi nous avons trois équations pour déterminer d, e & f, ſavoir, $d+9-28=8$, $e+1=10$, & $f+3=10$; donc $d=27$, $e=9$, & $f=7$; de-ſorte qu'il s'agit ſimplement de *trouver un nombre, lequel étant diviſé par* 28, 19 & 15, *ait pour reſtes* 27, 9 & 7; nous continuerons cependant à appeller ces reſtes d, e & f, juſqu'à ce que nous ayons conſtruit une formule générale pour les nombres 28, 19 & 15, laquelle ne ſauroit être aſſujettie à aucune reſtriction, à cauſe que les nombres 28 & 19 ſont premiers entre eux, & pareillement tous deux premiers au troiſiéme nombre 15. Ici donc $g = 57d - 56e$, & $b = 1065g - 1064f = 60705d = 59640e - 1064f$; diviſez ce nombre par 7980 (le plus petit multiple commun des trois diviſeurs donnés)

donnés) & le reſte ſera $4845d - 3780e - 1064f$; ajoûtez $7980e + 7980f$ pour que toutes les quantités ſoient poſitives, & vous aurez $4845d + 4200e + 6916f$ le plus petit nombre de cette formule qui réponde aux conditions, & par le moyen duquel on peut auſſi trouver une année quelconque de notre Ere, dont les trois cycles, & par cela même d, e & f ſoient donnés, ou, ce qui revient au même, la place que cette année occupe dans la Période Julienne. Comme par exemple, à la place de d, e & f ſubſtituez leurs valeurs trouvées ci-deſſus, ſavoir, 27, 9 & 7, & vous aurez $4845d + 4200e + 6916f = 130815 + 37800 + 48412 = 217027$; lequel nombre étant diviſé par 7980 laiſſe 1567 pour l'année de notre Ere qu'il s'agit de trouver; ſi l'on ajoûte ſéparément à cette année 9, 1 & 3, & qu'on diviſe les ſommes par 28, 19 & 15, les reſtes ſeront 8, 10, & 10, c'eſt-à-dire, les trois cycles propoſés.

La Période Julienne eſt une révolution de 7980 *ans, dont le commencement précéde la création du Monde, & qui n'eſt pas écoulée encore: ſon caractére diſtinctif eſt, que ſi le nombre qui exprime quelque année de cette Période eſt diviſé par* 28, 19 *&* 15, *les reſtes ſeront les trois cycles du Soleil, de la Lune & d'Indiction pour cette année-là: ainſi trouver la place que l'année en queſtion occupe dans la Période Julienne, n'eſt autre choſe que déterminer un nombre, lequel étant diviſé par* 28, *par* 19, *&par* 15, *aura les trois cycles* 8, 10 *&* 10 *pour reſtes.* Faites donc $d=8$, $e=10$, & $f=10$, & vous aurez $4845d + 4200e + 6916f = 143920$: nombre, qui étant diviſé par 7980 laiſſe 6280; donc l'année qu'on cherche eſt la 6280ème de la Période Julienne, laquelle répond à la 1567ème de notre Ere. Obſervons à cette occaſion en paſſant, que *ſi à quelque année de notre Ere on ajoûte* 4713, *la ſomme ſera l'année correſpondante de la Période Julienne*: la raiſon de ceci eſt, que la différence entre 1567 & 6280 eſt 4713.

SCHOLIE.

Je compte qu'à l'aide de ce qui a été dit dans les deux derniers problêmes, & particuliérement dans celui-ci, l'apprentif Algébriſte ſe trouvera en état de réſoudre des cas plus compliqués, c'eſt-à-dire, où il y aura plus de diviſeurs & plus de reſtes donnés, & par conſéquent plus de reſtrictions néceſſaires; & je ne doute nullement qu'il ne puiſſe adapter ces reſtrictions à des démonſtrations ſynthétiques pour tous les cas.

Ces deux derniers problêmes ſont très-curieux, & m'autoriſent par cela même à eſpérer qu'on me pardonnera de m'y être ſi longtems arrêté. Cependant j'ai ômis pluſieurs obſervations qui y ont rapport, & cela uniquement par la crainte d'ennuyer la plupart de mes Lecteurs.

PRO-

Probleme 5.

208. *A deux nombres donnés* a *&* b, *dont* a *eſt le plus grand, trouver deux multiples dont la différence ſoit un nombre donné quelconque diviſible par la plus grande meſure commune de* a *&* b.

Solution.

Que d repréſente en général la différence des multiples cherchés; que $a=13$, $b=7$, & leur plus petit multiple commun ſera 91 par l'Art. 171. Ceci étant ſuppoſé, trouvez par le troiſiéme problême un nombre lequel étant diviſé par a ait pour reſte d, & étant diviſé par b n'ait aucun reſte; un pareil nombre ſera $14d$, comme il paroît par le cinquiéme exemple de ce problême; donc $13d$ & $14d$ ſont deux multiples de a & de b reſpectivement, qui ſatisferont aux conditions du problême. De plus, comme le nombre 91, & par conſéquent celui de $91d$, eſt un multiple commun tant de a que de b, ſi la grandeur $13d$, qui eſt un multiple de a, eſt retranchée de $91d$, auſſi multiple de a, le reſte $78d$ doit auſſi être un multiple de a par l'Art. 169; & ſi l'on ſouſtrait $14d$, qui eſt un multiple de b, de $91d$, autre multiple de b, le reſte $77d$ ſera auſſi un multiple de b; donc $78d$ & $77d$ ſont deux autres multiples de a & de b reſpectivement, & réſoudront également bien le problême; les deux premiers multiples le réſolvent, quand on veut que le multiple de a ſoit plus petit que celui de b, au-lieu qu'il faut faire uſage des deux derniers, ſi l'on veut que le multiple de a ſoit plus grand que celui de b; mais dès que la choſe eſt indifférente, on employe avec le même ſuccès les uns & les autres. Que ſi l'on vouloit réduire les multiples dans les deux cas indiqués aux plus ſimples de leur genre, c'eſt-à-dire, ſi dans les deux cas nous voulions trouver les plus petits multiples de a & de b dont la différence fût d, les plus petits multiples dans les deux cas, c'eſt-à-dire, $13d$ & $77d$ devroient être ſéparément diviſés par le plus petit multiple commun de a & de b, c'eſt-à-dire, par 91: ſuppoſons la choſe faite, & que les reſtes ſoient m & n reſpectivement: je dis cela étant, que m ſera le plus petit multiple de a qui ajoûté à d puiſſe former un multiple de b, & que n ſera le plus petit multiple de b qui ajoûté à d puiſſe former un multiple de a.

Premiérement, il eſt clair que le reſte m eſt un multiple de a, puiſque le diviſeur 91, & le dividende $13d$ le ſont. En ſecond lieu, la quantité $m+d$ eſt un multiple de b; car ſi le nombre 91, étant retranché de $13d$ autant de fois qu'il eſt poſſible, laiſſe pour reſte m, ce nombre retranché le même nombre de fois de $14d$ laiſſera pour reſte $\overline{m+d}$; & cette

te quantité $\overline{m+d}$ doit être un multiple de b, à cauſe que 91 & $14d$ le ſont. Enfin, il paroît par la nature de la diviſion, & par l'Art. 173, que les multiples m & $\overline{m+d}$ doivent être les plus petits en leur genre; car le reſte m, ſi la diviſion eſt bien faite, ne ſauroit jamais être plus grand que le diviſeur, qui étoit le plus petit multiple commun de a & de b, ni même égal à ce diviſeur, à moins qu'on n'ait voulu abſolument qu'il y eût un reſte; donc les multiples m & $\overline{m+d}$ ſont les plus petits en leur genre dans le premier cas: & par la même raiſon les multiples n & $\overline{n+d}$ ſeront les plus petits en leur genre dans le dernier cas. Ainſi nous avons trouvé non ſeulement deux ſortes de multiples, qui réſolvent également le problême; mais auſſi les plus petits multiples de chaque ſorte. *C. Q. F.* D.

N. B. 1°. Si m, ou n, ou tous deux, ſont égaux à rien, leurs places doivent être remplies par le plus petit multiple commun de a & de b. C'eſt ce qui ne peut jamais avoir lieu, à moins que b ou a, ou tous deux ne meſurent d: ſi b meſure d, & par conſéquent $13d$, en ce cas la grandeur $13d$ ſera un multiple de b; mais cette même grandeur eſt auſſi un multiple de a par la conſtruction; nous avons donc le nombre $13d$ pour multiple commun de a & de b, & comme tel, ce nombre eſt diviſible ſans reſte par 91, le plus petit multiple commun de a & de b; donc en ce cas le reſte m, ſi on ne ſubſtitue aucune grandeur à ſa place, ſera égal à rien: pareillement, ſi a meſure d, & par conſéquent $77d$, le nombre $77d$ ſera un multiple commun de a & de b, & la grandeur n égale à rien; donc ſi b & a meſurent d, les valeurs de m & n ſeront $=0$.

2°. Si au-lieu des nombres 13 & 7 nous avions employé pour la ſolution de ce problême, d'autres nombres qui euſſent entre eux la même raiſon, comme 39 & 21, dont la plus grande meſure commune eſt 3, la formule adaptée à ces nombres auroit été la même que la précédente, c'eſt-à-dire, les multiples de 39 & de 21 auroient été exprimés par $13d$ & par $14d$ dans le premier cas, & par $78d$ & $77d$ dans le dernier; mais la démonſtration ſynthétique auroit été tant ſoit peu différente; car en ce cas $\frac{d}{3}$ auroit dû être un nombre entier, & il auroit fallu argumenter ainſi: la grandeur $13d$ ou $\frac{39d}{3}$ eſt un multiple de 39, & le nombre $14d$, ou $\frac{42d}{3}$, eſt un multiple de 21, & ainſi ces multiples ſatisferont à la condition du problême: de plus $78d$ & $77d$, ou $\frac{234d}{3}$ & $\frac{231d}{3}$ ſont les

multiples de 39 & de 21 reſpectivement, à cauſe que les nombres 234 & 231 ſont tels.

Voici un exemple de la ſolution que nous venons de donner. On demande deux multiples de 13 & de 7 dont la différence ſoit 500. Ici $13d$ ou 6500 étant diviſés par 91 laiſſent pour reſte 39; ainſi $m=39$: de plus, $77d$ ou 38500 diviſés par 91 laiſſent pour reſte 7; ainſi $n=7$; donc le nombre 39 eſt le plus petit multiple de 13, qui avec 500 faſſe de 539 un multiple de 7; & d'un autre côté, le nombre 7 eſt le plus petit multiple de 7, qui avec 500 faſſe de 507 un multiple de 13.

Probleme 6.

209. *Qu'il y ait deux nombres donnés comme* a *&* b, *dont le plus petit multiple commun ſoit* c, *& outre cela un troiſiéme nombre comme* d, *qui ſoit diviſible par la plus grande meſure commune de* a *&* b; *on demande de trouver, s'il eſt poſſible, deux multiples de* a *&* b, *dont la ſomme ſoit ce nombre donné* d, *ou (ce qui revient au même) on demande de partager le nombre donné* d *en deux parties telles, que l'une des parties ſoit un multiple de* a, *& l'autre un multiple de* b.

Solution.

Par le moyen du dernier problême trouvez m le plus petit multiple de a, qui étant augmenté de d puiſſe faire un multiple de b; & retranchant m de c le plus petit multiple commun de a & de b, nommez le reſte r; ou ſi m, avant qu'on faſſe la ſubſtitution indiquée ci-deſſus, eſt égal à rien, faites $r=c$; en ce cas, ſi r eſt plus grand que d ou égal à d, le problême ne ſera ſuſceptible d'aucune ſolution; mais ſi r eſt plus petit que d, je dis qu'il ſera le plus petit multiple de a, & $\overline{d-r}$ le plus grand multiple de b qui ſatisfaſſent au problême: & cette premiére ſolution étant trouvée, ſi le problême en admet davantage, il ſera facile de les avoir par une addition & une ſouſtraction continuelles du plus petit multiple commun c, comme $\overline{r+c}$ & $\overline{d-r-c}$, $\overline{r+2c}$ & $\overline{d-r-2c}$, $\overline{r+3c}$ & $\overline{d-r-3c}$, &c.: c'eſt pourquoi ſi $\overline{d-r}$ dans la premiére ſolution eſt diviſé par c, de-ſorte qu'il ait quelque reſte comme s, le quotient qui marque combien de fois c peut être ſouſtrait de $\overline{d-r}$, fait voir auſſi combien de ſolutions le problême admettra après la premiére; & par cela même ce quotient augmenté de l'unité exprimera le nombre total des ſolutions; enfin je dis que le nombre s ſera le plus petit multiple de b, & $\overline{d-s}$ le plus grand multiple de a, qui réſoudront le problême de cette façon-là; de-ſorte que les nombres r & $\overline{d-r}$, comme auſſi $\overline{d-s}$ & s peuvent s'appeller les ſolutions extrêmes;

mes; excepté quand le problême n'admet qu'une seule solution, dans laquelle ces extrêmes se réuniſſent en ce cas.

DEMONSTRATION.

1. Puiſque par la conſtruction c & m ſont multiples de a, leur différence $\overline{c-m}$ ou r ſera un multiple de a par l'Article 169; & puiſque c & $\overline{m+d}$ ſont multiples de b, leur différence $\overline{m-c+d}$ ou $\overline{d-r}$ ſera un multiple de b.

2. Quand $\overline{d-r}$ a été diviſé par c, le reſte étoit s; donc c meſure $\overline{d-r-s}$: puis donc que b meſure c, & que c meſure $\overline{d-r-s}$, b meſure $\overline{d-r-s}$; mais b meſure $\overline{d-r}$, comme nous l'avons prouvé ci-deſſus; donc b meſure tant $\overline{d-r}$ que $\overline{d-r-s}$, & par conſéquent leur différence s; donc s eſt un multiple de b: de plus, puiſque a meſure c, & que c meſure $\overline{d-r-s}$, a meſure $\overline{d-r-s}$; mais a meſure r, comme on l'a vu ci-deſſus; donc a meſure tant r que $\overline{d-r-s}$, & par conſéquent leur ſomme $\overline{d-s}$; donc $\overline{d-s}$ eſt un multiple de a.

3. Nous devons démontrer en dernier lieu, que r & $\overline{d-r}$, comme auſſi $\overline{d-s}$ & s ſont des ſolutions extrêmes: & d'abord, s'il y avoit moyen de trouver à ce problême quelque ſolution, dans laquelle il y eût un plus petit multiple de a que r, on ne pourroit parvenir à cette ſolution qu'en retranchant le plus petit multiple commun c de r, & en l'ajoûtant à $\overline{d-r}$, & les multiples ſeroient alors $\overline{r-c}$ & $\overline{d-r+c}$; mais r ou $\overline{c-m}$ ne peut jamais être plus grand que c, & par conſéquent $\overline{r-c}$ doit être une quantité $=0$, ou négative, (deux cas exclus du problême); donc r eſt néceſſairement le plus petit multiple de a, & $\overline{d-r}$ le plus grand multiple de b qui puiſſent réſoudre le problême: & par un raiſonnement tout pareil on peut démontrer que s eſt le plus petit multiple de b, & $\overline{d-s}$ le plus grand multiple de a qui puiſſent réſoudre le problême.

Exemple pour la ſolution précédente.

On demande de partager le nombre 500 en deux parties telles, qu'une partie ſoit un multiple de 13, & l'autre un multiple de 7. Ici $a=13$, $b=7$, $c=91$, & $d=500$, comme dans le dernier problême; & puiſque m y a été trouvé égal à 39, nous aurons $\overline{c-m}$ ou $r=52$, & $\overline{d-r}=448$; donc 52 & 448 ſont les premiers nombres qui puiſſent réſoudre ce problême, le premier étant un multiple de 13, & le dernier de 7: diviſez

448 par 91 & le quotient ſera 4, avec un reſte de 84; par conſéquent le nombre 416, qui eſt un multiple de 13, & celui de 84, qui eſt un multiple de 7, ſont les derniers nombres qui puiſſent réſoudre le problême. Les ſolutions ſont au nombre de cinq, & étant rangées comme il faut ſeront dans l'ordre ſuivant, tous les nombres de la premiére colomne étant autant de multiples de 13, & tous ceux de la ſeconde autant de multiples de 7.

1. 52 & 448,
2. 143 & 357,
3. 234 & 266,
4. 325 & 175,
5. 416 & 84.

LEMME 12.

THEOREME.

210. *Que* $\frac{a}{b}$ *exprime une fraction réduite à ſes moindres termes, & que cette fraction ſoit multipliée par quelque nombre entier* d, *de-ſorte que le produit* $\frac{ad}{b}$ *puiſſe être auſſi un nombre entier: je dis qu'en ce cas le multiplicateur* d *doit être ou égal à* b, *ou quelque multiple de ce dénominateur.*

Car puiſque par la ſuppoſition, la fraction $\frac{ad}{b}$ eſt équivalente à quelque nombre entier, que ce nombre ſoit c; ainſi nous aurons $c = \frac{ad}{b}$, & $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$; donc la fraction $\frac{c}{d}$, doit ou être la même que la fraction $\frac{a}{b}$, ou réductible à cette fraction, comme à ſes moindres termes, par la plus grande meſure commune de c & de d, puiſque $\frac{a}{b}$ eſt ſuppoſé réduit à ſes moindres termes: ſi $\frac{c}{d}$ eſt la même fraction que $\frac{a}{b}$, d doit être la même grandeur que b, qui eſt un cas du lemme; ſi $\frac{c}{d}$ eſt égal à $\frac{a}{b}$, quoique exprimé par d'autres nombres, que e ſoit la plus grande meſure commune de c & de d; cela étant $\frac{c}{e}$ ſera $= a$ & $\frac{d}{e} = b$, & $d = eb$, auquel cas d eſt un multiple de b. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

J'infére de-là, que ſi $\frac{a}{b}$ *exprime quelque fraction réduite à ſes moindres termes, le dénominateur* b *ſera le plus petit nombre par lequel cette fraction puiſſe être multipliée pour la réduire à un nombre entier.*

PRO-

Problème 7.

211. *Soient* a, b, c, d, e, &c. *un nombre d'aiguilles ſemblables à celles d'une Montre, qui tournent toutes uniformement ſur le même centre, & qui ſe meuvent toutes dans le même ſens; & que les mêmes lettres* a, b, c, d, e, &c. *repréſentent auſſi leurs tems périodiques reſpectifs, ou des nombres proportionels à ces tems: Quel ſera le période ſynodique de tout le ſyſtême, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant que toutes ces aiguilles partent du même point comme* s, *en quel tems ſe retrouveront-elles toutes enſemble pour la première fois, ſoit que cette conjonction arrive au point* s, *ou dans quelque autre endroit du cercle, où ces mouvemens ſe font?*

N. B. Dire que des deux aiguilles *a* & *b*, *a* devance *b* d'un cercle & demi, ou de deux cercles & demi, ou de trois cercles & demi, c'eſt dire en d'autres termes que *a* devance *b* d'un demi-cercle; & dire que *a* devance *b* d'un cercle, ou de deux cercles, ou de trois cercles, eſt la même choſe que ſi l'on diſoit que les aiguilles *a* & *b* coïncident: *Et toutes les fois que quelque diſtance angulaire de ce genre eſt exprimée par un nombre mixte, ou par une fraction improprement ainſi nommée, la réduire* (phraſe qui reviendra fréquemment dans la ſolution ſuivante) *ſignifie deux choſes, premiérement retrancher le nombre entier adhérent à la fraction, & puis réduire la fraction proprement dite qui reſte à ſes moindres termes:* par exemple, la diſtance $3\frac{4}{6}$ après la réduction devient $\frac{4}{6}$; car c'eſt la même choſe de dire que *a* devance *b* de trois cercles & de quatre ſixiémes d'un cercle, que de dire que *a* eſt deux tiers de cercle plus avant que *b*, ou un tiers de cercle en arriére. Ce langage étant ainſi expliqué, voici la ſolution.

Solution.

1°. Soit *p* le période ſynodique des deux premiéres aiguilles *a* & *b*: cela étant pour déterminer la diſtance où l'aiguille *a* ſe trouve du point *s* à la fin du tems *p*, dites, ſi dans le tems *a* l'aiguille fait une révolution, combien de révolutions & de parties de révolution fera-t-elle dans le tems *p*? & la réponſe eſt $\frac{p}{a}$; donc la diſtance où l'aiguille *a* ſe trouve du point *s* au bout du tems *p* eſt $\frac{p}{a}$; & par la même raiſon la diſtance où l'aiguille *b* ſe trouve du point *s* eſt $\frac{p}{b}$; donc la différence de ces deux fractions, ſavoir $\frac{p}{a} - \frac{p}{b}$ marque de combien l'aiguille *a* a devancé l'aiguille *b* durant le tems *p*; mais depuis que les deux aiguilles *a* & *b* ſont parties du point *s*, & ſe ſont ſéparées l'une de l'autre, elles ne peuvent

jamais ſe rejoindre, à moins que l'une n'ait devancé l'autre d'un cercle entier; donc ſi p eſt le période ſynodique des deux aiguilles, nous aurons $\frac{p}{a} - \frac{p}{b} = 1$, & $p = \frac{ab}{b-a}$: le tout dans la ſuppoſition que l'aiguille a eſt celle qui ſe meut avec le plus de viteſſe; mais ſi c'eſt b qui avance le plus vite, nous aurons $\frac{p}{b} - \frac{p}{a} = 1$, & $p = \frac{ab}{a-b}$; en général, p eſt le produit des deux nombres a & b diviſés par leur différence. Et ſi p déſigne le tems au bout duquel les deux aiguilles a & b ſe rejoignent pour la premiére fois, au bout du tems $2p$ elles ſe rejoindront pour la ſeconde fois, & au bout du tems $3p$ pour la troiſiéme fois, & ainſi de ſuite.

2°. Au bout du tems p, la diſtance où l'aiguille a, & par cela même les aiguilles a & b ſe trouvent du point s ſera $\frac{p}{a}$, comme auparavant; & au bout de ce même tems la diſtance où l'aiguille c ſe trouve du même point s ſera $\frac{p}{c}$; réduiſez donc ces deux diſtances $\frac{p}{a}$ & $\frac{p}{c}$, & puis prenant leur différence, réduiſez cette différence à ſes plus ſimples termes $\frac{n}{q}$; & alors la diſtance où l'aiguille c eſt des deux aiguilles réunies a & b au bout du tems p, ſera $\frac{n}{q}$, & au bout du tems $2p$, $\frac{2n}{q}$, & au bout du tems $3p$, $\frac{3n}{q}$, &c. & par conſéquent au bout du tems pq la diſtance où l'aiguille c ſera des deux aiguilles réunies a & b ſera n; mais n eſt un nombre entier, & déſigne un nombre entier de cercles ou de révolutions; donc au bout du tems pq l'aiguille c coïncidera avec les deux autres aiguilles a & b; & il paroît clairement par le dernier Article, que c'eſt pour la premiére fois que les aiguilles a, b & c ſe trouvent réunies depuis leur départ de s, le dénominateur q étant le plus petit nombre par lequel la fraction $\frac{n}{q}$ puiſſe être multipliée pour en faire un nombre entier; donc le tems pq eſt le période ſynodique des trois premiéres aiguilles a, b & c.

3°. Au bout du tems pq, la diſtance où l'aiguille a, & par conſéquent les trois aiguilles a, b & c ſe trouvent du point fixe s, eſt $\frac{pq}{n}$; & la diſtance où l'aiguille d ſe trouve de ce même point, eſt $\frac{pq}{d}$; ainſi réduiſant les diſtances $\frac{pq}{a}$ & $\frac{pq}{d}$, que leur différence après la réduction ſoit une fraction, qui réduite à ſes moindres termes ait pour dénominateur r, & le tems pqr ſera le période ſynodique des quatre premiéres aiguilles a, b, c & d.

4°. Au

4°. Au bout du tems pqr la distance où a se trouve de s sera $\frac{pqr}{a}$, & la distance qui sépare e de s sera $\frac{pqr}{e}$; & si ces distances sont réduites, & que leur différence soit aussi réduite à son plus petit dénominateur s, le tems $pqrs$ sera le période synodique des cinq aiguilles a, b, c, d, e: & ainsi de suite. Ce que nous venons de dire, énoncé en forme de règles revient proprement à ceci.

1°. *Multipliez l'un par l'autre les deux tems périodiques* a *&* b, *& puis divisant leur produit par leur différence, appellez le quotient* p, *soit que ce soit un nombre entier, ou une fraction.*

2°. *Réduisez les deux distances* $\frac{p}{a}$ *&* $\frac{p}{c}$, *comme aussi leur différence à leur plus petit dénominateur* q.

3°. *Réduisez les distances* $\frac{pq}{a}$ *&* $\frac{pq}{d}$, *comme aussi leur différence à leur plus petit dénominateur* r.

4°. *Réduisez les distances* $\frac{pqr}{a}$ *&* $\frac{pqr}{e}$, *comme aussi leur différence à leur plus petit dénominateur* s, *&c. Je dis, cela étant, que* p *sera le période synodique des deux premières aiguilles,* pq *celui des trois premières,* pqr *celui des quatre premières,* pqrs *celui des cinq premières, &c.*

N. B. Il n'importe nullement, rélativement à la conclusion, quel ordre on juge à propos de suivre en comparant ensemble les tems périodiques des aiguilles.

EXEMPLE.

Soit $a=3$, $b=7$, $c=10$, $d=12$, $e=15$.

SOLUTION.

1°. $p=\frac{21}{4}$; donc $\frac{p}{a}$ est $\frac{7}{4}$, & étant réduit $\frac{3}{4}$; $\frac{p}{c}$ est $\frac{21}{40}$, & la différence entre $\frac{3}{4}$ & $\frac{21}{40}$ est $\frac{9}{40}$; donc $q=40$.

2°. Donc $pq=\frac{21}{4}\times 40=210$; donc $\frac{pq}{a}$ est 70, & étant réduit devient 0; $\frac{pq}{d}$ est $\frac{210}{12}$, & étant réduit $\frac{1}{2}$, & la différence entre 0 & $\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{2}$: donc r est 2.

3°. Donc $pqr=420$; donc $\frac{pqr}{a}$ est 140, & étant réduit devient 0; $\frac{pqr}{e}$ est 28, & étant réduit devient 0, & la différence entre 0 & 0 est 0,

ou

ou $\frac{1}{1}$; donc s eſt 1. De-ſorte que le période ſynodique des deux premiéres aiguilles eſt $\frac{1}{1}$, celui des trois premiéres 210, celui des quatre premiéres 420, & celui des cinq premiéres 420; ce qui fait voir que les aiguilles d & e ſe ſont retrouvées au même point, préciſément dans l'inſtant que les trois premiéres a, b & c s'y retrouvoient auſſi.

Si l'aiguille b ſe mouvoit dans un ſens contraire à celui de a, alors l'équation qui détermine p ne ſeroit point $\frac{p}{a}-\frac{p}{b}=1$ comme auparavant, mais $\frac{p}{a}+\frac{p}{b}=1$; ainſi p ſe trouvera égal à $\frac{ab}{a+b}$; car les aiguilles a & b doivent être conſidérées comme ſituées dans des ſens contraires rélativement au point s, auquel cas la ſomme de leurs diſtances de ce point déſignera la diſtance où elles ſont l'une de l'autre: de plus, ſi c ſe meut dans un ſens contraire à celui de a, les diſtances $\frac{p}{a}$ & $\frac{p}{c}$ devront être réduites comme auparavant; mais alors il faut que ce ſoit leur ſomme, & pas leur différence, qui étant réduite à ſes moindres termes donne le dénominateur q; & ainſi de ſuite.

Problème 8.

212. *Qu'il y ait trois quantités inconnues* x, y *&* z, *dont les rélations ſoient exprimées par les deux équations ſuivantes,*

$$x+2y+3z=20, \text{ \& }$$
$$4x+5y+6z=47:$$

On demande les valeurs de x, y *&* z *en nombres entiers & affirmatifs.*

Solution.

1ére. Eq. $x+2y+3z=20$.

2de. Eq. $4x+5y+6z=47$.

Retranchez la ſeconde équation de la premiére multipliée par quatre, & vous aurez, $3y+6z=33$; donc

3éme. Eq. $y=11-2z$.

Retranchez cinq fois la prémiére équation de deux fois la ſeconde, & vous aurez $3x-3z=-6$, & pour

4éme. Eq. $x=z-2$.

Nous trouvons ainſi les valeurs de x & y rélativement à z, dont il n'y a pas moyen de déterminer la valeur, à cauſe qu'il y a trois grandeurs inconnues & ſeulement deux équations: & l'on verra clairement que ce ſont-là les véritables valeurs de x & de y, ſi l'on ſubſtitue $z-2$ à la place de x dans la premiére équation, & $11-2z$ à la place de y dans la ſeconde; car en vertu de cette ſuppoſition nous aurons dans la premiére

re équation $x+2y+3z=z-2+22-4z+3z=20$, & dans la ſeconde équation nous aurons $4x+5y+6z=4z-8+55-10z+6z=47$. Or par rapport aux valeurs de x, de y & de z, il paroît clairement par la troiſiéme équation & par la quatriéme, que quelque nombre entier qu'on ſubſtitue à la place de z, x & y doivent être des nombres entiers; car ſi z eſt un nombre entier, non ſeulement $z-2$ ou x ſera un nombre entier, mais auſſi $11-2z$ ou y; donc ſi le problême n'étoit ſujet qu'à cette ſeule limitation, ſavoir, que x, y & z fuſſent des nombres entiers, le nombre des ſolutions ſeroit infini; mais outre cette premiére reſtriction, il eſt dit de plus, que les grandeurs, dont il s'agit, doivent être affirmatives; & pour cette raiſon, ſi nous voulons avoir le nombre des ſolutions rélatives aux deux reſtrictions réunies enſemble, il faut conſidérer de nouveau les valeurs de x & de y dans les deux derniéres équations: or puiſque dans la quatriéme équation $x=z-2$, il eſt clair que ſi la grandeur x eſt affirmative, la grandeur z doit ſurpaſſer 2: outre cela, puiſque dans la troiſiéme équation $y=11-2z$, ſi la grandeur y eſt affirmative, $2z$ doivent être plus petits que 11, & z plus petit que $5\frac{1}{2}$; d'où il s'enſuit, à plus forte raiſon, que z doit être plus petit que 6; donc, afin que x & y ſoient affirmatifs auſſi bien que z, la valeur de z doit ſe trouver entre ces deux limites, ſavoir, 2 & 6; donc pour que les trois quantités x, y & z ſoient affirmatives, il n'y a que trois nombres qu'on puiſſe ſubſtituer à la place de z, ſavoir les nombres 3, 4 & 5; ſi bien que par la derniére limitation du problême, le nombre infini de ſolutions dont il ſeroit ſuſceptible, ſe réduit préſentement à trois, qu'on détermine ainſi: puiſque quelqu'un des trois nombres 3, 4 & 5 peut être mis à la place de z, que z ſoit 3; cela étant, nous aurons $z-2$ ou $x=1$, & $11-2z$ ou $y=5$; de-ſorte que les nombres x, y & z ſeront 1, 5 & 3 reſpectivement, & ſatisferont aux conditions des deux équations primitives; car dans cette ſuppoſition $x+2y+3z=1+10+9=20$, & $4x+5y+6z=4+25+18=27$. Soit $z=4$, nous aurons $z-2$ ou $x=2$, $11-2z$ ou $y=3$, & les nombres ſeront 2, 3 & 4, qui ſatisferont encore aux mêmes conditions; car en ce cas $x+2y+3z=2+6+12=20$, & $4x+5y+6z=8+15+24=47$. Que z ſoit $=5$; cela étant $z-2$ ou $x=3$, $11-2z$ ou $y=1$, & les nombres ſeront 3, 1 & 5; nous aurons dérechef dans cette ſuppoſition $x+2y+3z=3+2+15=20$, & $4x+5y+6z=12+5+30=47$.

x	y	z.
1	5	3.
2	3	4.
3	1	5.

LEMME 13.

PROBLEME.

213. *Soient* a, b & c *trois nombres fixes ou déterminés, dont* a & b *soient premiers entre eux; & que* x & y *soient deux nombres entiers variables ou indéterminés, dont la rélation soit conſtamment exprimée par l'équation* $ax \pm by = c$; *quelles ſeront les valeurs les plus proches de* x & *de* y *exprimées en nombres entiers, dont la rélation puiſſe auſſi être exprimée par la même équation?*

CAS 1.

Soit l'équation $ax - by = c$, & que $x + d$ & $y + e$ déſignent les nouvelles valeurs de x & de y; cela étant, puiſque le rapport qu'ont entre elles ces deux valeurs, doit être exprimé par la même équation, qui a exprimé la rélation entre les valeurs précédentes, l'équation ſera $ax + ad - by - be = c$; mais $ax - by = c$ par l'hypothéſe; donc $ad - be = 0$, & $be = ad$, & $\frac{e}{d} = \frac{a}{b}$; donc ſi e & d ſont deux nombres en même raiſon que a & b, les valeurs $x + d$ & $y + e$ auront entre elles le même rapport que x & y: mais pour trouver les valeurs les plus proches de x & de y, e & d doivent non ſeulement être en même raiſon que a & b, mais auſſi réduits à leurs moindres termes: puis donc que les deux fraction $\frac{a}{b}$ & $\frac{e}{d}$ ſont égales en valeur, & toutes deux réduites à leurs moindres termes, elles doivent auſſi être égales en termes, c'eſt-à-dire, e doit être égal à a, & d à b; ainſi les valeurs les plus proches de x & de y dans la même rélation, ſont $x + b$ & $y + a$, ou $x - b$ & $y - a$.

CAS 2.

Que l'équation ſoit $ax + by = c$, & que $x + d$ & $y + e$ ſoient les valeurs les plus proches de x & de y dans la même rélation, & l'équation ſera $ax + ad + by + be = c$; mais $ax + by = c$ par l'hypothéſe; donc $ad + be = 0$; donc $be = -ad$, & $\frac{e}{d} = -\frac{a}{b}$; donc ſi e & d ſont réduits à leurs moindres termes, comme ils doivent l'être, il faut que e ſoit égal à $-a$ & d à b, ou que e ſoit égal à $+a$ & d à $-b$; ainſi les deux valeurs les plus proches de x & de y dans la même rélation, ſeront $x + b$ & $y - a$, ou $x - b$ & $y + a$.

CO-

COROLLAIRE.

Il ſuit de-là, que ſi les valeurs de x *ſont priſes en progreſſion arithmétique, dont la différence commune ſoit* b *coëfficient de* y, *les valeurs reſpectives de* y *formeront auſſi une progreſſion arithmétique, dont la différence commune ſera* a *coëfficient de* x: *& ſi l'équation eſt* $ax-by$ &c., *les deux équations croîtront ou décroîtront à la fois; mais ſi l'équation eſt* $ax+by$ &c., *& que les valeurs de* x *forment une progreſſion croiſſante, celles de* y *formeront une progreſſion décroiſſante, & réciproquement.*

PROBLEME 9.

214. *On demande de partager cent en trois parties, comme* x, y *&* z, *de telle ſorte que* $9x+15y+20z$ *faſſent quinze cens.*

SOLUTION.

1ére. Eq. $x+y+z=100.$
2de. Eq. $9x+15y+20z=1500.$

Retranchez neuf fois la premiére équation de la ſeconde, & vous aurez $6y+11z=600$; donc

3éme. Eq. $y=100-\frac{11z}{6}$.

Retranchez la ſeconde équation de quinze fois la premiére, & vous aurez $6x-5z=0$; donc

4éme. Eq. $x=\frac{5z}{6}$.

Et ſi l'on ſubſtitue ces valeurs de x & de y trouvées dans les deux derniéres équations à la place de x & de y dans les deux premiéres, elles ſatisferont aux conditions du problême.

Rélativement aux valeurs de x & de y, ſavoir, $x=\frac{5z}{6}$, & $y=100-\frac{11z}{6}$, il eſt clair que ſi l'on met pour z quelque nombre diviſible par 6 ſans reſte, c'eſt-à-dire, quelque terme de cette progreſſion arithmétique 6, 12, 18, 24, &c. à l'infini, la grandeur x ſe trouvera un nombre entier & affirmatif; mais comme $y=100-\frac{11z}{6}$, il eſt manifeſte que y ne ſauroit être affirmatif, à moins que $\frac{11z}{6}$ ne ſoient plus petits que 100, c'eſt-à-dire, à moins que $11z$ ne ſoient plus petits que 600, ou z plus petit que $54\frac{6}{11}$; donc il ne faut jamais ſuppoſer z égal à un nombre plus grand que 54; mais on peut ſuppoſer z égal à quelque multiple de 6 depuis 6 juſqu'à 54 incluſivement. Or comme l'équation exprimant le rapport de gran-

deur entre x & z eſt $6x-5z=0$, il s'enſuit du dernier article, que ſi les valeurs de z ſont priſes dans une progreſſion arithmétique croiſſante dont la commune différence ſoit 6, les valeurs correſpondantes de x formeront une progreſſion arithmétique croiſſante dont la différence commune ſera 5: outre cela, puiſque l'équation exprimant la rélation entre y & z étoit $6y+11z=600$, il s'enſuit que ſi les valeurs de z vont en augmentant ſuivant une progreſſion arithmétique dont la différence ſoit 6, les valeurs de y ſe trouveront dans une progreſſion arithmétique dont la différence commune ſera 11. Faites $z=6$, & $100-\frac{11z}{6}$ ou y ſeront égaux à 89, & $\frac{5z}{6}$ ou x ſeront égaux à 5, & les trois nombres trouvés 5, 89 & 6, ſatisferont aux conditions du problême.

Pour ce qui eſt des autres ſolutions (car il y en a neuf en tout) elles ſe trouvent aiſément à l'aide des obſervations faites ci-deſſus, & ſont toutes rangées par ordre dans la table ſuivante:

x	y	z.
5	89	6.
10	78	12.
15	67	18.
20	56	24.
25	45	30.
30	34	36.
35	23	42.
40	12	48.
45	1	54.

PROBLEME 10.

215. *On demande de partager le nombre de vingt & quatre en trois parties* x, y & z, *qui ſoient telles, que* $x+8y+12z$ *faſſent deux cens & un, &c.*

SOLUTION.

1ére. Eq. $x+y+z=24$.
2de. Eq. $x+8y+12z=201$.

Retranchez la premiére équation de la ſeconde, & vous aurez $7y+11z=177$; donc

3éme. Eq. $y=\frac{177-11z}{7}$.

Retranchez la ſeconde équation de huit fois la premiére, & vous aurez $7x-4z=-9$; donc

4éme.

4ème. Eq. $x=\frac{4z-9}{7}$.

Il paroît par la troiſiéme équation & par la quatriéme, que pour rendre x & y des nombres entiers auſſi bien que z, il faut ſubſtituer à la place de z un nombre qui rende non ſeulement $\frac{177-11z}{7}$, mais auſſi $\frac{4z-9}{7}$ un nombre entier: or ſi les deux fractions $\frac{177}{7}$ & $\frac{9}{7}$ avoient été des nombres entiers, ce problême auroit pu ſe réſoudre comme le précédent; mais comme cela n'eſt pas, nous devons nous y prendre d'une autre maniére: mais avant que d'aller plus loin, recherchons ſi ces deux conditions, ſavoir, que tant $\frac{177-11z}{7}$ que $\frac{4z-9}{7}$ ſont des nombres entiers, ſe trouvent réellement avoir lieu; faute de quoi le problême ſeroit impoſſible: diviſez donc $4z-9$ par 7, ce qui dans le cas préſent n'eſt autre choſe que ſouſtraire 7 de $4z-9$, & le reſte ſera $4z-2$; diviſez auſſi $177-11z$ par 7, & le reſte ſera $2-4z$: ainſi nous n'avons plus à examiner s'il eſt poſſible que $\frac{4z-2}{7}$ & $\frac{2-4z}{7}$ ſoient tous deux des nombres entiers; & cette ſuppoſition eſt ſi éloignée de toute impoſſibilité, qu'une de ſes parties implique néceſſairement l'autre, ces deux nombres étant le même nombre pris affirmativement & négativement: ainſi il faut qu'ils ſoient tous deux affirmatifs, ou qu'aucun d'eux ne le ſoit. Voyons préſentement quel eſt le plus petit nombre qui étant mis pour z faſſe de $\frac{4z-2}{7}$ un nombre entier; pour cet effet, que le dénominateur 7 ſoit égal à a, & le nombre 4 coëfficient de z dans le numérateur égal à b, & de ces valeurs de a & de b formez une ſuite d'équations comme dans l'Art. 175; ce qui vous donnera:

$$1a-0b=+7.$$
$$0a-1b=-4.$$
$$a-b=+3.$$
$$a-2b=-1.$$
$$3a-5b=+1.$$

Des deux derniéres équations prenez celle dont le terme abſolu eſt négatif, ſavoir, $a-2b=-1$, à cauſe que -2, partie numérique du numérateur $4z-2$, eſt une quantité négative; & puis multipliant l'équation $a-2b=-1$ par 2, c'eſt-à-dire par cette même partie numérique priſe affirmativement, vous aurez $2a-4b=-2$, la plus ſimple équation de ſa ſorte: faites 4, coëfficient de $-b$ dans cette derniére équation, $=z$, & remettant à la place de a & de b leurs valeurs, ſavoir, 7 & 4, l'é-

quation ſera changée en celle-ci $14-4z=-2$, & vous aurez $\frac{4z-2}{7}=2$, nombre entier; donc ſi le nombre entier 4 eſt mis pour z, les deux autres parties x & y ſeront auſſi des nombres entiers, & l'on aura x ou $\frac{4z-9}{7}=1$, & y ou $\frac{177-11z}{7}=19$: ainſi les parties x, y & z ſeront 1, 19 & 4 reſpectivement. Pour ſavoir maintenant ſuivant quelles progreſſions les valeurs de x, y & z varieront, puiſque $7x-4z=-9$, il faut conſidérer, qu'en vertu de l'Art. 213, ſi les valeurs de z augmentent continuellement de 7, les valeurs de x augmenteront continuellement de 4: d'un autre côté, il ſuit de l'équation $7y+11z=177$, que ſi les valeurs de z augmentent continuellement de 7, celles de y diminueront continuellement de 11; donc puiſque la premiére valeur de x eſt 1, ſes différentes valeurs ſeront 1, 5, 9, 13, *&c.*; les différentes valeurs de y ſeront 19, 8, -3, -14, *&c.* & enfin celle de z ſeront 4, 11, 18, 25, *&c.* ce qui fait voir que ce problême n'eſt ſuſceptible que de deux ſolutions, à cauſe qu'à la troiſiéme y devient une quantité négative: nous avons donc ici $x=1$, $y=19$, $z=4$; ou $x=5$, $y=8$, & $z=11$.

Probleme II.

216. *Suppoſons que quelqu'un achette quarante oiſeaux de trois différentes ſortes, ſavoir, des perdrix, des alouettes & des cailles, pour quatre-vingt-dix-huit ſous, & qu'il paye trois ſous piéce pour les perdrix, un demi ſou piéce pour les alouettes, & quatre ſous piéce pour les cailles: on demande combien il a eu d'oiſeaux de chaque ſorte.*

Solution.

Appellez le nombre des perdrix x, celui de alouettes y, & celui des cailles z; cela étant $3x$, $\frac{y}{2}$, & $4z$ exprimeront le nombre des ſous donnés pour chaque ſorte, & le problême, exprimé d'une maniére abſtraite, ſera: *Si* $x+y+z=40$, *&* $3x+\frac{y}{2}+4z=98$, *ou* $6x+y+8z=196$; *quelles ſont les valeurs de* x, y *&* z?

1ere. Eq. $x+y+z=40$.

2de. Eq. $6x+y+8z=196$.

Retranchez la ſeconde équation de ſix fois la premiére, & vous aurez $5y-2z=44$. Donc

3éme. Eq. $y=\frac{2z+44}{5}$.

Retranchez la premiére équation de la ſeconde, & vous aurez $5x+7z=156$; donc

4éme. Eq. $x=\frac{156-7z}{5}$; donc $\frac{2z+44}{5}$ & $\frac{156-7z}{5}$.

doi-

doivent être l'un & l'autre des nombres entiers: choſe dont je démontre la poſſibilité ainſi: diviſez $156-7z$ par 5, & le reſte ſera $1-2z$; diviſez $2z+44$ par 5, & le reſte ſera $2z+4$: ce reſte, ſi l'on en retranche encore une fois 5, deviendra $2z-1$: comparant donc les deux reſtes $2z-1$ & $1-2z$, la queſtion ſe trouvera réduite à ceci, ſavoir, ſi $\frac{2z-1}{5}$ étant un nombre entier $\frac{1-2z}{5}$ peut l'être auſſi; & la réponſe ſera, que ſi le premier eſt un nombre entier, le dernier doit l'être auſſi, puiſqu'il n'eſt que la quantité négative de l'autre; c'eſt pourquoi $\frac{2z+44}{5}$ étant un nombre entier, le nombre $\frac{156-7z}{5}$ doit l'être auſſi. Ceci ne pouvant plus être révoqué en doute, reprenons préſentement un des reſtes, ſavoir, $2z-1$, & tâchons de trouver le plus petit nombre, qui étant ſubſtitué à la place de z faſſe de $\frac{2z-1}{5}$ un nombre entier; & c'eſt ce qu'il y a moyen de faire préciſément, comme dans le dernier problême; mais comme le dénominateur 5 eſt un très-petit nombre, j'aime mieux tenter la choſe par eſſai (le nombre de ces eſſais ne pouvant aller qu'à quatre tout au plus,) c'eſt-à-dire, je fais z égal à 1, 2, 3 & 4 ſucceſſivement, & j'eſſaye dans quel de ces cas $\frac{2z-1}{5}$ ſera un nombre entier: par ce moyen je trouve, que z étant égal à 3, $\frac{2z-1}{5}=1$.

N. B. Le nombre des eſſais doit toujours être plus petit d'une unité que le dénominateur.

Puis donc que z eſt égal à 3, nous aurons y ou $\frac{2z+44}{5}=10$, & x ou $\frac{156-7z}{5}=27$; par conſéquent, ſi vingt & ſept perdrix, dix alouettes, & trois cailles ont été achetées, on aura eu quarante oiſeaux pour quatre-vingts dix-huit ſous, comme l'exigeoit le problême.

Par rapport aux autres ſolutions, puiſque l'équation pour x & z étoit $5x+7z=156$, & que l'équation pour y & z étoit $5y-2z=44$, il s'enſuit de l'Art. 213, que les valeurs ſucceſſives de z doivent aller en augmentant par une addition continuelle de 5, celles de y par une addition continuelle de 2, & que celles de x doivent aller en diminuant par une ſouſtraction continuelle de 7; ce qui nous donne les ſolutions ſuivantes.

x	y	z.
27	10	3.
20	12	8.
13	14	13.
6	16	18.

Le

Le nombre des ſolutions eſt bornée ici à 4; car ſi on en vouloit une cinquiéme, la valeur de x ſe trouveroit être $=-1$, & celle de $z=-2$.

Dans ma ſolution de ce problême j'ai laiſſé la valeur de la derniére quantité z indéterminée; mais j'aurois pu également laiſſer indéterminée la quantité y, & la ſolution même auroit été tant ſoit peu plus aiſée: j'y ſerois parvenu de la même maniére que dans le pénultiéme problême, ſavoir, en retranchant la ſeconde équation de ſix fois la premiére, ce qui m'auroit donné $5y-2z=44$; ainſi $z=\frac{5y}{2}-22$; donc ſi z eſt affirmatif, le nombre $\frac{5y}{2}$ doit être plus grand que 22, & $5y$ ſurpaſſer 44, & y être plus grand que $8\frac{4}{5}$; par conſéquent ſi z eſt affirmatif, y doit être plus grand que 8: je ſouſtrais enſuite la ſeconde équation de huit fois la premiére, & j'ai $2x+7y=124$, & $x=62-\frac{7y}{2}$; donc le nombre $\frac{7y}{2}$ doit être plus petit que 62, & $7y$ moindre que 124, & y plus petit que $7\frac{3}{7}$; donc ſi x eſt affirmatif, y doit être plus petit que 18; donc toutes les valeurs de y doivent ſe trouver entre 8 & 18: mais $7y$ dans l'expreſſion de x, & $\frac{5y}{2}$ dans l'expreſſion de z, font voir que $\frac{y}{2}$ doit être un nombre entier, ou (ce qui revient au même) que y doit être un nombre pair; donc tous les nombres pairs entre 8 & 18 peuvent être mis pour y, ſavoir, 10, 12, 14, 16: ſoit $y=10$, & nous aurons x ou $62-\frac{7y}{2}=27$, & z ou $\frac{5y}{2}-22=3$. On peut trouver de cette façon toutes les autres valeurs de x & de z, telles qu'elles ſont dans la précédente table.

PROBLEME. 12.

217. *Suppoſons que quelqu'un veuille acheter vingt oiſeaux pour vingt ſous, ſavoir, des canards à deux ſous piéce, des perdrix à un demi ſou piéce, & des oyes à trois ſous piéce: combien aura-t-il d'oiſeaux de chaque ſorte?*

SOLUTION.

Déſignez par x, y & z le nombre des canards, des perdrix & des oyes reſpectivement, & ainſi par $2x$, $\frac{y}{2}$ & $3z$ le prix de chaque ſorte exprimé en ſous, & vous aurez ces deux équations fondamentales; $x+y+z=20$, & $2x+\frac{y}{2}+3z=20$, ou $4x+y+6z=40$.

1ére. Eq. $x+y+z=20$.
2de. Eq. $4x+y+6z=40$.

Ex-

Exterminez z en retranchant la ſeconde équation de ſix fois la premiére, & vous aurez $2x+5y=80$, & pour

3éme. Eq. $x=40-\frac{5y}{2}$.

Donc la grandeur $\frac{5y}{2}$ doit être plus petite que 40, & $5y$ moindres que 80, & y plus petit que 16. Exterminez enſuite x en retranchant la ſeconde équation de quatre fois la premiére, & vous aurez $3y-2z=40$, & une

4éme. Eq. $z=\frac{3y}{2}-20$; donc $\frac{3y}{2}$ ſont plus grands que 20, & $3y$ plus grands que 40, & y plus grand que 13, & plus petit que 16: mais $\frac{5y}{2}$ dans la troiſiéme équation, & $\frac{3y}{2}$ dans la quatriéme, font voir que y doit être un nombre pair; & il n'y a qu'un ſeul nombre pair entre 13 & 16, ſavoir 14; donc y eſt 14, & le problême n'admet qu'une ſeule ſolution; par conſéquent x ou $40-\frac{5y}{2}$ doit être 5, & z ou $\frac{3y}{2}-20$ eſt 1, c'eſt-à-dire, qu'il doit y avoir eu cinq canards, quatorze perdrix & une oye.

Bachet, dans ſon Commentaire ſur la quarante & uniéme propoſition du quatriéme Livre de *Diophante*, cite l'Epigramme ſuivante, où ce problême ſe trouve exprimé.

Ut tot emantur aves, bis denis utere nummis;
Perdix, anſer, anas empta vocetur avis:
Sit ſimplex obolus pretium perdicis, ematur
Sex obolis anſer, biſque duobus anas.
Ut tua procedat in lucem quæſtio, mentem
Conſule; ſic loquitur pectoris arca mihi:
Sint anates tres atque duæ, ſimplex erit anſer,
Accipe perdices quatuor atque decem.

PROBLEME 13.

218. *Vingt perſonnes, conſiſtant en hommes, femmes, & enfans, payent vingt ſchellings pour un repas, les hommes donnant quatre ſchellings par tête, les femmes ſix ſous par tête, & les enfans trois ſous par tête: combien y avoit il d'hommes, combien de femmes, & combien d'enfans?*

SOLUTION.

Mettez x, y & z pour le nombre des hommes, des femmes & des enfans reſpectivement, & par conſequent $4x+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}$ pour le nombre

des ſchellings qu'ils ont payé; & cette derniére condition nous fournira l'équation ſuivante, $4x + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 20$: multipliez toute l'équation par 4, pour la dégager de ſes fractions, & vous aurez $16x + 2y + z = 80$; & les équations ſeront:

1re. Eq. $x + y + z = 20.$
2de. Eq. $16x + 2y + z = 80.$

Exterminez z en retranchant la premiére équation de la ſeconde, & vous aurez $15x + y = 60$; c'eſt-à-dire pour

3éme. Eq. $y = 60 - 15x.$

Il ſuit de cette équation que $15x$ ſont plus petits que 60, & par cela même x plus petit que 4. Exterminez y en retranchant deux fois la premiére équation de la ſeconde, & vous aurez $14x - z = 40$; done

4éme. Eq. $z = 14x - 40.$

Donc $14x$ ſont plus grands que 40, & x eſt plus grand que 2; donc x doit ſe trouver entre 2 & 4. Or comme les valeurs de y & de z ont été exprimées dans la troiſiéme équation auſſi bien que dans la quatriéme ſans fractions, il faut que quelque nombre entier qu'on mette pour x, y & z, l'opération donnera des nombres entiers; mais ils ne ſeront pas affirmatifs, à moins que x ne ſoit un nombre entier entre 2 & 4; donc x doit être 3, & le problême n'admet qu'une ſeule ſolution; donc y ou $60 - 15x$ ſera 15, & z ou $14x - 40$ ſera 2: de-ſorte qu'il y avoit 3 hommes, 15 femmes, & 2 enfans.

PROBLEME 14.

219. *Quarante & une perſonnes, conſiſtant en hommes, femmes & enfans, payent quarante ſchellings pour un repas, les hommes donnant quatre ſchellings par tête, les femmes trois ſchellings par tête, & les enfans quatre ſous par tête: combien y avoit-il d'hommes, combien de femmes, & combien d'enfans?*

SOLUTION.

Mettez x, y & z pour le nombre des hommes, des femmes, & des enfans reſpectivement, & par conſéquent $4x + 3y + \frac{z}{3}$ pour le nombre des ſchellings qu'ils ont payé, & vous aurez $4x + 3y + \frac{z}{3} = 40$, ou $12x + 9y + z = 120$. Ainſi

1ére. Eq. $x + y + z = 41.$
2de. Eq. $12x + 9y + z = 120.$

Re-

Retranchez la ſeconde équation de douze fois la premiére, & vous aurez $3y+11z=372$, & pour

$$3^{\text{éme.}}\ \text{Eq.}\quad y=124-\frac{11z}{3}.$$

Donc $\frac{11z}{3}$ ſont plus petits que 124, & $11z$ plus petits que 372, & z plus petit que 34. Retranchez neuf fois la premiére équation de la ſeconde, & vous aurez $3x-8z=-249$; & pour

$$4^{\text{éme.}}\ \text{Eq.}\quad x=\frac{8z}{3}-83.$$

Par conſéquent $\frac{8z}{3}$ doivent être plus grands que 83, & $8z$ plus grands que 249, & z plus grand que 31. Il ſuit de-là, comme auſſi de la troiſiéme équation & de la quatriéme, que ſi x & y ſont des nombres entiers & affirmatifs, z doit être quelque multiple de 3 ſitué entre 31 & 34; mais il n'y a qu'un ſeul multiple pareil, qui eſt 33; donc le problême n'admet qu'une ſolution, & $z=33$; donc x ou $\frac{8z}{3}-83=5$, & y ou $124-\frac{11z}{3}=3$; de-ſorte qu'il y avoit 5 hommes, 3 femmes, & 33 enfans.

PROBLEME 15.

220. *On demande de partager trente en trois nombres entiers* x, y *&* z, *qui ſoient tels, que* $2x+9y+15z$ *faſſent quatre cens & dix-neuf.*

SOLUTION.

$$1^{\text{ére.}}\ \text{Eq.}\quad x+y+z=30.$$
$$2^{\text{de.}}\ \text{Eq.}\quad 2x+9y+15z=419.$$

Retranchez deux fois la premiére équation de la ſeconde, & vous aurez $7y+13z=359$; & pour

$$3^{\text{éme.}}\ \text{Eq.}\quad y=\frac{359-13z}{7}.$$

Donc z doit être plus petit que 28, ou (ce qui revient au même) z ne ſauroit être quelque nombre entier plus grand que 27. Retranchez la ſeconde équation de neuf fois la premiére, & vous aurez $7x-6z=-149$. Ce qui nous donne une

$$4^{\text{éme.}}\ \text{Eq.}\quad x=\frac{6z-149}{7}.$$

Donc z ne ſauroit être un nombre entier au-deſſous de 25. Il eſt clair par la troiſiéme équation & par la quatriéme, que $\frac{359-13z}{7}$ & $\frac{6z-149}{7}$ doivent être l'un & l'autre des nombres entiers: choſe dont la poſſibilité

peut ſe démontrer par la même méthode que nous avons ſuivie dans le dixiéme problême & dans l'onziéme: mais pour varier je m'y prendrai à-préſent d'une autre façon, & argumenterai ainſi: $\frac{359-13z}{7}$ & $\frac{6z-149}{7}$ étant ajoûtés enſemble font $\frac{210-7z}{7}$, qu'on peut réduire à un nombre entier; donc ſi $\frac{6z-149}{7}$ eſt un nombre entier, l'autre $\frac{359-13z}{7}$ doit être tel auſſi; car ſans cela leur ſomme ne pourroit pas former un nombre entier. Pour déterminer la valeur de z; je dis, toute valeur de z qui ſera de $\frac{6z-142}{7}$ un nombre entier, le ſera pareillement de $\frac{6z-2}{7}$, parce que $6z-149$ étant diviſés par 7, il reſte $6z-2$; mais 5 eſt un nombre qui étant ſubſtitué à la place de z fait de $\frac{6z-2}{7}$ un nombre entier; donc ſi l'on ſuppoſe $z=5$, x & y ſeront des nombres entiers, mais pas tous deux affirmatifs; car pour qu'ils fuſſent tous deux affirmatifs, il faudroit que z ne fût pas un nombre entier au-deſſous de 25 ou au-deſſus de 27: cependant ayant trouvé la plus petite valeur de z, qui rend x & y des nombres entiers, ſavoir 5; & remarquant, tant par l'une que par l'autre des équations $7x-6z=-149$, & $7y+13z=359$, que toutes les autres valeurs de z doivent être déterminées à l'aide d'une addition continuelle du nombre 7, je commence une progreſſion depuis 5, & je la continue par une addition réitérée du nombre 7, juſqu'à ce que j'arrive à un terme ſitué entre les deux limites de z, (ce qui eſt toujours poſſible quand le problême l'eſt). J'aurai donc 5, 12, 19, 26: or comme ce dernier nombre ſe trouve entre les deux limites de z, ſavoir 24 & 28, j'en infére que ſi je fais z égal à 26, x & y ſeront l'un & l'autre des nombres entiers & affirmatifs; donc $z=26$, x ou $\frac{6z-149}{7}=1$, & y ou $\frac{359-13z}{7}=3$: ainſi les nombres cherchés ſont 1, 3 & 26, & ſatisferont auſſi aux conditions du problême, qui n'admet que cette unique ſolution.

x	y	z
-17	42	5.
-11	29	12.
-5	16	19.
1	3	26.
7	-10	33.

PROBLEME 16.

Qui eſt un problême général.

221. *Trouver, s'il eſt poſſible, trois nombres, tous entiers & affirmatifs, dont la ſomme eſt non ſeulement donnée, mais auſſi la ſomme de leurs produits, après qu'ils auront été multipliés ſéparément par trois multiplicateurs donnés.*

SOLUTION.

Soient x, y & z les trois nombres cherchés, & que x déſigne le nombre qui a le plus grand multiplicateur, & z celui qui a le plus petit multiplicateur, ou un multiplicateur négatif ſi quelqu'un d'eux eſt tel, ou s'il y a deux multiplicateurs négatifs, que z déſigne le nombre qui a le plus grand multiplicateur négatif; après quoi déſignant par y le terme moyen, vous aurez deux équations, une dont le terme abſolu eſt la ſomme donnée des trois nombres cherchés, & une autre dont le terme abſolu eſt la ſomme donnée des produits. Voici comment vous pourrez exterminer z par le ſecours de ces deux équations: multipliez la premiére équation par le coëfficient de z dans la ſeconde, & puis retranchant ce produit de la ſeconde équation, vous formerez une troiſiéme équation, qui ſera $Ax + By = C$: diviſez cette équation entiére par la plus grande meſure commune de A & de B, & qu'il en réſulte $ax + by = c$; cela étant, je déduirai de cette équation, & de la maniére dont elle a été formée, les obſervations ſuivantes.

1°. Si les opérations, telles que nous les avons indiquées, ont été bien faites, les nombres a & b ſeront toujours entiers, affirmatifs, & premiers l'un à l'autre, & a toujours plus grand que b.

2°. Si les nombres x & y ſont entiers & affirmatifs, le nombre $\overline{ax + by}$ ou c ſera néceſſairement tel auſſi; quoique la propoſition inverſe ne ſoit pas vraie pour cela, ſavoir, que ſi c eſt un nombre entier & affirmatif, x & y le ſoient auſſi.

3°. Si une des valeurs de y eſt connue, les valeurs correſpondantes de x & de z le ſeront facilement, en faiſant $x = \frac{c - by}{a}$ & $z = s - x - y$, mettant s pour la ſomme donnée des trois nombres cherchés: d'où il ſuit, que ſi x & y ſont des nombres entiers, z doit néceſſairement l'être auſſi.

4°. Si la plus petite valeur de y eſt connue, & que le problême ſoit ſuſceptible de plus d'une ſolution, nous pourrons avoir autant d'autres valeurs ſucceſſives de y qu'il ſera néceſſaire, par une addition continuelle du nombre a; ainſi les valeurs correſpondantes de x formeront une

progreſſion arithmétique décroiſſante, dont la différence commune eſt $\overline{a-b}$. Les deux premiéres parties de cette aſſertion ſont prouvées par l'Art. 213, & voici comment je démontre la derniére: ſi les valeurs de y croiſſent de la quantité a, & que celles de x décroiſſent de la quantité b, les différentes valeurs de la ſomme $\overline{x+y}$, conſidérée comme un ſeul nombre, croîtront de la quantité $\overline{a-b}$; mais comme la ſomme $\overline{x+y}$ va en croiſſant, la troiſiéme quantité z doit aller en décroiſſant, à cauſe que dans le problême la ſomme totale $\overline{x+y+z}$ eſt toujours la même; donc les valeurs ſucceſſives de z formeront une progreſſion arithmétique décroiſſante, dont la différence commune ſera $\overline{a-b}$.

5°. Il ſuit de cette derniére obſervation, que l'accroiſſement de y eſt le décroiſſement de x & de z, & réciproquement, de-ſorte que quand y eſt le plus petit en ſon genre pour réſoudre le problême, x & z ſont les plus grands dans le leur; & ſi alors ils ſont tous deux affirmatifs, le problême ſera réſolu; mais ſi l'un des deux eſt négatif, ou qu'ils ſoient tels tous deux, le problême ſera impoſſible.

Tâchons préſentement de trouver deux nombres entiers tels, qu'étant ſubſtitués à la place de x & de y, ils faſſent $ax+by=c$; ce qui peut s'effectuer de la maniére ſuivante: des quotiens d'une diviſion continuelle de a & de b, formez une ſuite d'équations ſuivant l'Art. 175; & comme les nombres primitifs a & b ſont premiers l'un à l'autre, le terme abſolu des deux derniéres équations ſera ± 1; prenez l'équation où il y aura -1, c'eſt-à-dire, prenez la derniére équation qui occupe un endroit pair, & elle ſera $ae-bd=-1$; changez les ſignes, & vous aurez $-ae+bd=+1$; multipliez les deux membres de l'équation par c, & vous aurez $-ace+bcd=c$: faites $-ce=x$ & $+cd=y$, & vous aurez deux nombres entiers x & y, dont la propriété ſera telle, que $ax+by$ ſera égal à c: mais comme la grandeur x eſt ici négative, il faut eſſayer d'en faire (s'il eſt poſſible) une quantité affirmative, en abaiſſant la valeur de y autant qu'il ſe pourra, c'eſt-à-dire, en retranchant le nombre a de cd auſſi ſouvent qu'il y aura moyen de le faire; c'eſt-à-dire, en diviſant cd par a; car en ce cas, le reſte, s'il y en a, ou le diviſeur a, s'il n'y a point de reſte, exprimera la plus petite valeur de y; & ſi par ce moyen les quantités x & z ſe trouvent affirmatives, le problême ſera ſuſceptible d'une ou de pluſieurs ſolutions en nombres affirmatifs; mais ſi la grandeur x reſte toujours négative, ou s'il ſe trouve que le nombre z ſoit négatif, il n'y aura pas moyen d'élever ces valeurs négatives ſans abaiſſer la valeur de y, qui eſt déjà auſſi baſſe qu'il

eſt

eſt poſſible, & par conſéquent en ce cas le problême ne ſauroit avoir aucune ſolution affirmative.

Pour ce qui eſt du nombre d, puiſqu'il eſt le coëfficient de b dans la derniére équation qui occupe un endroit pair, & que ce coëfficient & les autres ſont les termes d'une ſérie commencée depuis o & 1, & continuée par les quotiens d'une diviſion continuelle de a & de b, il eſt évident que ſi une pareille diviſion ſe fait actuellement, & que le nombre des quotiens ſoit pair, la derniére donnera une unité, par la raiſon indiquée dans l'Art. 175; mais ſi le nombre des quotiens eſt impair, le dernier doit être rejetté, comme menant à une fauſſe équation; & ſi à l'aide du reſte des quotiens on calcule alors une ſérie depuis o & 1, le dernier terme de la ſérie ſera d; donc dans la pratique le nombre d peut être calculé au moyen de cette ſérie ſeulement, ſans ſe mettre en peine des autres parties des équations où ces termes ſe trouvent mêlés.

Exemple 1.

Que les équations ſoient,

1°. $x+y+z=s$.

2°. $10x+5y+2z=r$.

Si l'on retranche deux fois la premiére équation de la ſeconde, on aura $8x+3y=r-2s$; & comme 8 & 3 ſont des nombres premiers l'un à l'autre, l'équation ne ſauroit être réduite à de plus ſimples termes; c'eſt pourquoi $a=8$, $b=3$, $c=r-2s$, & $d=3$; car les quotiens d'une diviſion continuelle depuis 8 & 3 ſeront 2, 1, 2. Ces quotiens étant en nombre impair, le dernier doit être rejetté, & il faut avec les quotiens qui reſtent, ſavoir 2 & 1, former la ſérie o, 1, 2, 3, ce qui donnera $d=3$, & $cd=3c$; par ce moyen on pourra adapter aux multiplicateurs 10, 5 & 2 la règle ſuivante: faites $r-2s=c$; diviſez $3c$ par 8, & le reſte ſera y; ainſi $x=\frac{c-3y}{8}$, & $z=s-x-y$. Par exemple, ſoit $s=20$ & $r=53$, c'eſt-à-dire, qu'il ſoit queſtion de partager le nombre 20 en trois parties telles, que dix fois la premiére partie, cinq fois la ſeconde, & deux fois la troiſiéme, faſſent enſemble 53: ici $r-2s$ ou $c=13$, & $3c=39$, lequel nombre étant diviſé par 8 laiſſe pour reſte 7; donc en ce cas $y=7$, $\frac{13-3y}{8}$ ou $x=-1$, & $s-x-y$ ou $z=14$: de-ſorte que les nombres cherchés ſont $-1, +7$ & $+14$; donc ce problême ne peut être réſolu en nombres affirmatifs, mais bien en d'autres; car -1 multiplié par $+10, +7\times5, +14\times2$, c'eſt-à-dire, $-10+35+28=53$.

De

De plus, ſuppoſant que les multiplicateurs 10, 5, & 2 reſtent, & que s eſt toujours $=20$, que r ſoit $=170$, & vous aurez $c=67$, $3c=201$, $y=1$, $x=8$, & $z=11$: ſi bien que les nombres, qui réſolvent le problême, ſont $8\times10+1\times5+11\times2$, c'eſt-à-dire, $80+5+22=107$; mais ce problême admet encore deux ſolutions affirmatives, qui ſuivant la quatriéme obſervation ſont 5, 9 & 6; 2, 17 & 1.

Exemple 2.

On demande de partager le nombre donné s en trois parties de telle ſorte, que trois fois une des parties, un tiers de la ſeconde, & un cinquiéme de la derniére forment de-nouveau le nombre s.

Ici les équations ſont $x+y+z=s$, & $3x+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=s$; mais pour faciliter l'uſage de cette derniére équation, je la dégage de ſes fractions, en multipliant par 15 tous les termes qui la compoſent, ce qui produit $45x+5y+3z=15s$. Nous avons donc deux équations fondamentales,

$$1^{\circ}.\quad x+y+z=s.$$
$$2^{\circ}.\quad 45x+5y+3z=15s.$$

Retranchez trois fois la premiére équation de la ſeconde, & vous aurez $42x+2y=12s$; diviſez toute l'équation par 2, à cauſe que 2 eſt la plus grande meſure commune de 42 & de 2, & vous aurez $21x+1y=6s$. Ici donc $a=21$, $b=1$, $c=6s$, & $d=1$; car l'unique quotient de a diviſé par b, ayant été rejetté à cauſe qu'il eſt ſeul, il ne reſtera aucun quotient pour continuer la ſérie depuis 0 & 1; donc en ce cas 1 dernier terme de la ſérie doit être pris pour d; par conſéquent le dividende cd ſera $6s$, & nous aurons la régle ſuivante particuliérement adaptée à ce problême: diviſez $6s$ par 21, & le reſte ſera y; donc $x=\frac{6s-y}{21}$, & $z=s-x-y$. Comme par exemple, on demande de partager 100 en trois parties telles, que trois fois la premiére partie, un tiers de la ſeconde, & un cinquiéme de la troiſiéme faſſent enſemble le même nombre de 100: ici $6s=600$, qui étant diviſés par 21 laiſſent 12 pour y; donc $x=28$ & $z=60$: de-ſorte que les nombres 28, 12 & 60 réſoudront le problême; car $28\times3+\frac{12}{3}+\frac{60}{5}$, c'eſt-à-dire, $84+4+12=100$. La quatriéme obſervation fournit auſſi deux autres ſolutions affirmatives de ce problême, ſavoir, 27, 33, 40, & 26, 54, 20; & c'eſt-là tout; car une autre opération réduiroit z à rien.

Exemple 3.

Que la ſomme des produits ſoit toujours égale à la ſomme des nombres, & qu'il y ait pour multiplicateurs 3, 1 & $-\frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire, ſoient $3x+y$ —

$-\frac{z}{3}=s$, ou $9x+3y-z=3s$, & les équations ſeront préſentement.

1ére. $x+y+z=s$.
2de. $9x+3y-z=3s$.

Multipliez la premiére équation par -1, & puis retranchez-la de la ſeconde, ou (ce qui revient au méme) ajoûtez la premiére équation à la ſeconde, & vous aurez $10x+4y=4s$; diviſez le tout par 2 (la plus grande meſure commune de 4 & de 10) & vous aurez $5x+2y=2s$; donc en ce cas $a=5$, $b=2$, & $c=2s$. Or les quotiens d'une diviſion continuelle depuis 5 & 2 ſont 2 & 2; déſignez-les par 2 & 1, & ſervez-vous-en pour calculer la ſérie 0, 1, 2, 3, vous aurez $d=3$, & la règle pour les multiplicateurs 3, 1 & $-\frac{1}{2}$, quand la ſomme des produits doit être égale à la ſomme des nombres, ſera telle : diviſez $6s$ par 5, & le reſte ſera y; puis faites $\frac{2s-2y}{5}=x$, & $s-x-y=z$. Comme par exemple, ſoit $s=20$; alors $6s=120$, leſquels étant diviſés par 5, il y aura pour reſte rien ou 5; c'eſt pourquoi en ce cas $y=5$, $x=6$, & $z=9$, & les nombres rangés en ordre ſont 6, 5 & 9. Ces nombres ſatisfont aux conditions du problême; car premiérement $6+5+9=20$, & en ſecond lieu $18+5-3=20$. Mais en conſéquence de la quatriéme obſervation, ce problême admet encore deux autres ſolutions, qui ſont 4, 10 & 6; & 2, 15 & 3.

N. B. 1°. Dans la règle, qui vient d'être énoncée, nous avons ſuppoſé que y étoit le reſte de $6s$ diviſés par 5; mais nous aurions pu négliger $5s$, & avoir fait de y le reſte de $1s$ diviſé par 5; & la même réduction peut ſe faire dans tous les autres cas où le coëfficient de s eſt plus grand que le diviſeur.

2°. Les problêmes 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, & une infinité d'autres du même genre, ne ſont que des cas particuliers de ce problême; mais ſi l'on veut leur appliquer cette ſolution par maniére d'exemples, il faut avoir ſoin de les déſigner conformément aux directions données au commencement de cette ſolution.

Du Quarré Magique.

PROBLEME 17.

222. *Qu'il y ait quelque quarré impair tel que* 49, *dont la racine quarrée eſt* 7; *& que quelque figure quarrée ſoit diviſée en* 49 *petits quarrés, ſavoir en* 7 *rangs de cellules, & chaque rang en* 7 *cellules: On demande de diſtribuer dans ces cellules tous les nombres naturels depuis* 1 *juſqu'à* 49 *incluſivement, de-ſorte*

que la ſomme de tous les nombres dans chaque rang, ſoit qu'on les prenne horizontalement, perpendiculairement, ou en diagonale, ſoit la même. Toute figure conſtruite de cette façon s'appelle communément un quarré magique.

SOLUTION.

Comme 7 eſt le côté du quarré propoſé, que les ſept premiers nombres, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ſoient déſignés par les ſept premiéres lettres de l'Alphabet a, b, c, d, e, f, g reſpectivement, & que ces lettres ſoient répétées ſept fois dans le même ordre, en ſept rangs diſtincts, placés exactement l'un au-deſſous de l'autre; & qu'il n'y ait d'autre différence entre les rangs que celle-ci, ſavoir, que chaque rang inférieur commence par le ſecond terme de celui qui eſt immédiatement au-deſſus: ainſi le premier rang ſera a, b, c, d, e, f, g; le ſecond b, c, d, e, f, g, a; le troiſiéme c, d, e, f, g, a, b; &c. Le quarré conſtruit de cette façon porte le nom de primitif, à cauſe qu'on en dérive la conſtruction du quarré magique, que nous allons conſidérer à-préſent.

Figure 1.

a	b	c	d	e	f	g
b	c	d	e	f	g	a
c	d	e	f	g	a	b
d	e	f	g	a	b	c
e	f	g	a	b	c	d
f	g	a	b	c	d	e
g	a	b	c	d	e	f

Qu'on faſſe donc un autre quarré diviſé en 49 cellules, comme dans la ſeconde figure, que j'appellerai quarré magique par voye d'anticipation, & que les cellules en ſoient remplies par le moyen du quarré primitif, de la maniére ſuivante.

Figure 2.

$7d+a$	$7e+e$	$7f+f$	$7g+g-49$	$7a+a$	$7b+b$	$7c+c$
$7e+e$	$7f+d$	$7g+g-49$	$7a+f$	$7b+g$	$7c+a$	$7d+b$
$7f+b$	$7g+c-49$	$7a+d$	$7b+e$	$7c+f$	$7d+g$	$7e+a$
$7g+e-49$	$7a+b$	$7b+c$	$7c+d$	$7d+e$	$7e+f$	$7f+g$
$7a+g$	$7b+a$	$7c+b$	$7d+c$	$7e+d$	$7f+e$	$7g+f-49$
$7b+f$	$7c+g$	$7d+a$	$7e+b$	$7f+c$	$7g+d-49$	$7a+e$
$7c+d$	$7d+f$	$7e+g$	$7f+a$	$7g+b-49$	$7a+c$	$7b+d$

Premiérement, commençant par le premier rang horizontal du quarré primitif, que tous les nombres de ce rang ſoient multipliés ſucceſſivement par 7 côté du quarré propoſé, en allant de la gauche à la droite; & aux différens produits de cette multiplication ajoûtez de ſuite les nombres du ſeptiéme & plus bas rang horizontal, & vous aurez les nombres $\overline{7a+g}$, $\overline{7b+a}$, $\overline{7c+b}$, $\overline{7d+c}$, $\overline{7e+d}$, $\overline{7f+e}$, $\overline{7g+f-49}$, leſquels nombres doivent être placés dans le rang horizontal immédiatement au-deſſous de celui du milieu en allant de la gauche à la droite: mais ici (comme on peut le voir dans la figure) il faut retrancher 49 de tout nom-

bre

bre plus grand que 49 ; car ſi l'on admettoit quelque nombre plus grand que 49 dans ce quarré, quelque nombre plus petit que 49 manqueroit de place, ce que la nature du problême ne permet pas.

2°. Ayant rempli ce rang du quarré magique, que votre multiplication deſcende, & que votre addition monte dans le quarré primitif, deſorte que le rang qui doit être multiplié, & celui où l'addition doit ſe faire, puiſſent toujours être également éloignés du rang du milieu, c'eſt-à-dire, multipliez tous les nombres dans le ſecond rang du quarré primitif par 7, & ajoûtez à chaque produit un nombre correſpondant dans le ſixiéme rang, & vous aurez les nombres $\overline{7b+f}$, $\overline{7c+g}$, $\overline{7d+a}$ &c., pour remplir le ſixiéme rang du quarré magique.

3°. De-même, ſept fois le troiſiéme rang réuni avec le cinquiéme, donnera le ſeptiéme rang du quarré magique.

4°. Nous voici parvenus au rang du milieu du quarré primitif, dans lequel le rang à multiplier & le rang à ajoûter ſe rencontrent ; c'eſt pourquoi ce rang, ſans le ſecours d'aucun autre, fournira des nombres pour le premier rang du quarré magique, ſavoir, $\overline{7d+d}$, $\overline{7e+e}$, $\overline{7f+f}$, &c.

Figure 1.

a	b	c	d	e	f	g
b	c	d	e	f	g	a
c	d	e	f	g	a	b
d	e	f	g	a	b	c
e	f	g	a	b	c	d
f	g	a	b	c	d	e
g	a	b	c	d	e	f

5°. Pareillement, ſept fois le cinquiéme rang du quarré primitif avec le troiſiéme, ſept fois le ſixiéme avec le ſecond, & ſept fois le ſeptiéme avec le premier, fourniront des nombres pour le ſecond, pour le troiſiéme, & pour le quatriéme des rangs horizontaux du quarré magique. Et par ce moyen toute la figure ſera fournie, au-moins en lettres : ainſi il ne me reſte qu'à démontrer que cette figure a toutes les propriétes d'un quarré magique.

Figure 2.

7d+d	7e+e	7f+f	7g+g−49	7a+a	7b+b	7c+c
7e+c	7f+d	7g+e−49	7a+f	7b+g	7c+a	7d+b
7f+b	7g+c−49	7a+d	7b+e	7c+f	7d+g	7e+a
7g+a−49	7a+b	7b+c	7c+d	7d+e	7e+f	7f+g
7a+g	7b+a	7c+b	7d+c	7e+d	7f+e	7g+f−49
7b+f	7c+g	7d+a	7e+b	7f+c	7g+d−49	7a+e
7c+e	7d+f	7e+g	7f+a	7g+f−49	7a+c	7b+d

Démontrons premiérement, qu'elle contient tous les nombre naturels depuis 1 juſqu'à 49 incluſivement : car quiconque ſuivra le nombre 7g

dans tous les rangs horizontaux, trouvera la grandeur $\overline{7g-49}$ combinée avec toutes les lettres a, b, c, d, e, f, g, quoique dans un ordre différent de celui où ces lettres ſont placées ici. Les grandeurs a, b, c, d, &c. déſignent, comme il a été dit, tous les nombres naturels depuis 1 juſqu'à 7 incluſivement: celui qui ſuivra de-même $7a$, trouvera, après avoir mis ces grandeurs en ordre, les nombres $\overline{7a+a}$, $\overline{7a+b}$, $\overline{7a+c}$, $\overline{7a+d}$, $\overline{7a+e}$, $\overline{7a+f}$, $\overline{7a+g}$, ſérie qui contient tous les nombres depuis 8 juſqu'à 14: il trouvera de-même tous les termes de la ſérie $\overline{7b+a}$, $\overline{7b+b}$, $\overline{7b+c}$, $\overline{7b+d}$, $\overline{7b+e}$, $\overline{7b+f}$, $\overline{7b+g}$, qui comprend tous les nombres depuis 15 juſqu'à 21, & ainſi de ſuite juſqu'à $\overline{7f+g}=49$. De plus, il eſt manifeſte que la ſomme de tous les rangs horizontaux & perpendiculaires ſera la même: car quiconque examinera ces rangs avec tant ſoit peu d'attention, ne pourra que s'appercevoir, que les mêmes lettres ſont multipliées & ajoûtées dans chacun des mêmes rangs, l'ordre dans lequel elles ſont rangées formant la ſeule différence; de-ſorte que toutes les ſommes doivent être la même. Conſidérons enfin les deux rangs qui forment les diagonales: en examinant celle qui deſcend de la gauche à la droite, depuis $\overline{7d+d}$ juſqu'à $\overline{7b+d}$, nous trouverons que les nombres de cette diagonale ſont $\overline{7d+d}$, $\overline{7f+d}$, $\overline{7a+d}$, $\overline{7c+d}$, $\overline{7e+d}$, $\overline{7g+d-49}$, $\overline{7b+d}$; mais $\overline{7d+7f+7a+7c+7e+7g+7b}=\overline{7a+7b+7c+7d+7e+7f+g}$; donc la ſomme du premier rang en diagonale ſera la même que la ſomme de ces nombres $\overline{7a+d}$, $\overline{7b+d}$, $\overline{7c+d}$, $\overline{7d+d}$, $\overline{7e+d}$, $\overline{7f+d}$, $\overline{7g+d-49}$; mais d eſt le terme moyen de la progreſſion a, b, c, d, e, f, g, & par conſéquent la ſomme de cette progreſſion eſt la même que ſi tous les termes en étoient des d, c'eſt-à-dire, la ſomme de cette progreſſion ſera $7d$; ſi donc au-lieu d'ajoûter ſept fois d, comme ci-deſſus, nous ajoûtons les termes de la progreſſion a, b, c, d, e, f, g, ce qui ne produit aucun changement dans la ſomme totale, nous aurons la ſomme du premier rang en diagonale équivalente à la ſomme des nombres $\overline{7a+a}$, $\overline{7b+b}$, $\overline{7c+c}$, $\overline{7d+d}$, $\overline{7e+e}$, $\overline{7f+f}$, $\overline{7g+g-49}$, qui eſt la même que la ſomme du premier rang horizontal, & par conſéquent de chacun des autres rangs: dans l'autre rang en diagonale qui monte de la gauche à la droite, depuis $7c+e$ juſqu'à $7c+c$, nous trouvons le nombre $7c$ répété ſept fois, & uni ſéparément à toutes les lettres a, b, c, d, e, f, g, quoique dans un autre ordre; mais $e=d-1$; donc $7c=7d-7=\overline{a+b+c+d+e+f+g-7}$; ainſi $7c$ répé-

répétés ſept fois ſont égaux à $7a+7b+7c+7d+7e+7f+7g-49$; donc la ſomme de ce rang en diagonale ſera la même que ſi l'ordre & la valeur de ces termes étoient $7a+a$, $7b+b$, $7c+c$, $7d+d$, $7e+e$, $7f+f$, $7g+g-49$, c'eſt-à-dire, la ſomme de ce rang en diagonale ſera la même que celle de tout le reſte. *C. Q. F. D.*

Juſqu'ici nous avons rempli notre quarré magique de lettres, afin d'en faire mieux concevoir la nature & la conſtruction; mais ſi nous voulions remplir notre quarré de nombres, comme le problême le demande, nous devrions commencer par faire un quarré primitif en nombres, comme dans la fig. 3. où le rang ſupérieur eſt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; le ſecond 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1; le troiſiéme 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, &c.; & ſi par le ſecours de ce quarré nous conſtruiſons un quarré magique ſuivant les directions indiquées ci-deſſus, nous aurons dans la quatriéme figure un quarré tel que le problême l'exige.

Figure 3.

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
3	4	5	6	7	1	2
4	5	6	7	1	2	3
5	6	7	1	2	3	4
6	7	1	2	3	4	5
7	1	2	3	4	5	6

Figure 4.

32	40	48	7	*8	16	24
38	46	5	13	21	*22	30
44	3	11	19	27	35	*36
*1	9	17	25	33	41	49
14	*15	23	31	39	47	6
20	28	*29	37	45	4	12
26	34	42	*43	2	10	18

8

Quiconque examinera attentivement la conſtruction de ce quarré magique, & la diſpoſition des nombres qui le compoſent, pourra aiſément en déduire les conſéquences ſuivantes.

1°. Quel que ſoit le côté du quarré, l'unité ſe trouvera toujours dans la premiére cellule du rang horizontal du milieu à la gauche: car $7g+a-49=1$; & ſi nous prenons 7 ou g pour le côté du quarré, & que nous faſſions ce nombre $=r$, cette cellule ſe trouvera toujours remplie par $rr+a-rr=1$.

2°. Si les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 dans le quarré primitif avoient été continués à l'infini, les nombres dans chaque rang horizontal du quarré magique, excepté celui où 49 eſt précédé d'un ſigne négatif, auroient été en croiſſant de la gauche à la droite en une progreſſion arithmétique, dont la différence commune ſeroit 8 $(r+1)$: car dans le premier rang par exemple, (& la même raiſon a lieu par rapport à tout le reſte,) les produits $7d$, $7e$, $7f$, $7g$, &c. forment une progreſſion arithmétique croiſſante dont la différence commune eſt 7; & les parties à ajoûter, ſavoir, d, e,

d, e, f, g, &c. forment une autre progreſſion arithmétique croiſſante dont la différence eſt 1; donc les deux progreſſions ajoûtées enſemble, ſavoir, $7d+d$, $7e+e$, $7f+f$, $7g+g$ &c. formeront une progreſſion dont la différence commune ſera 8.

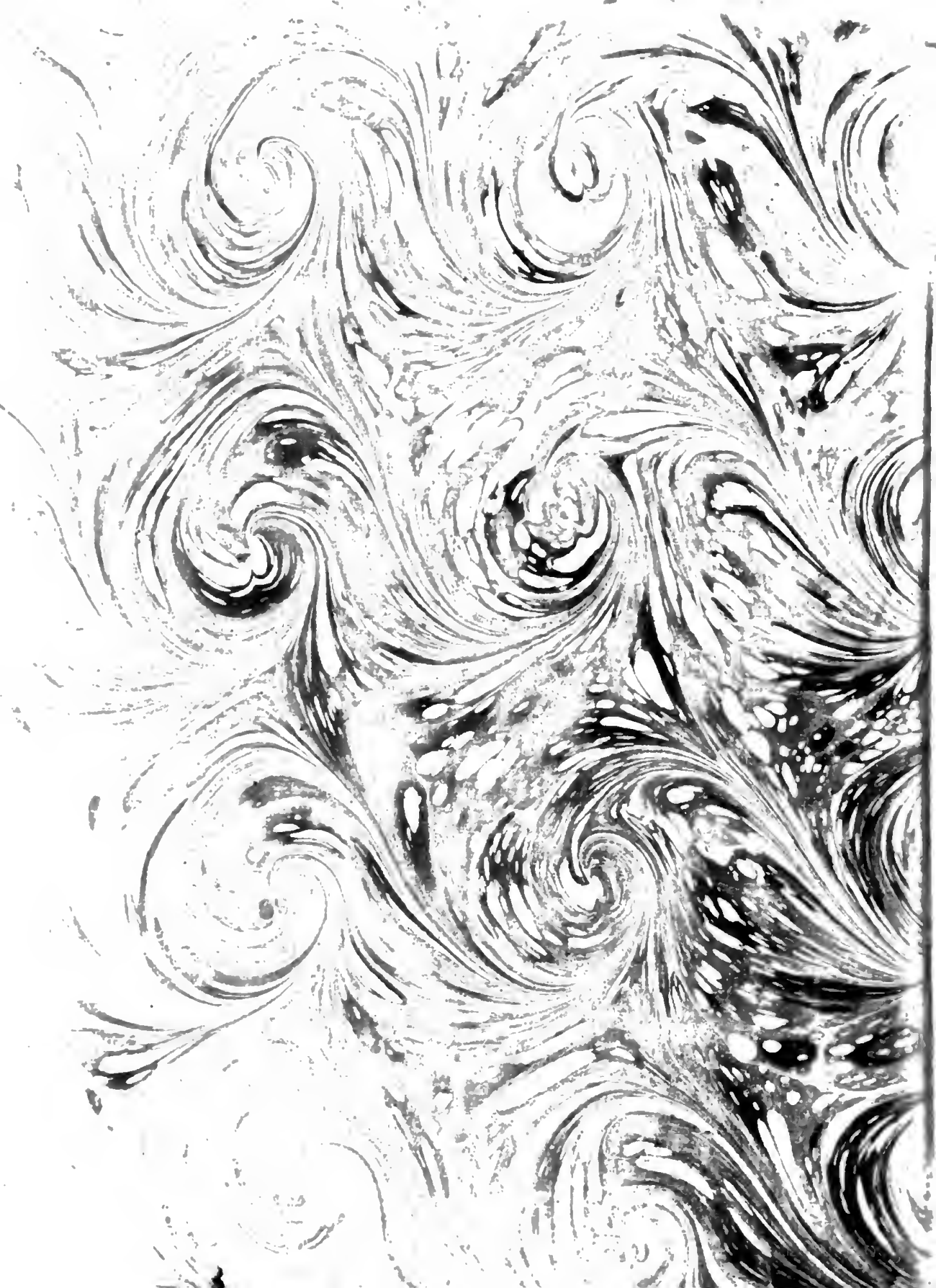
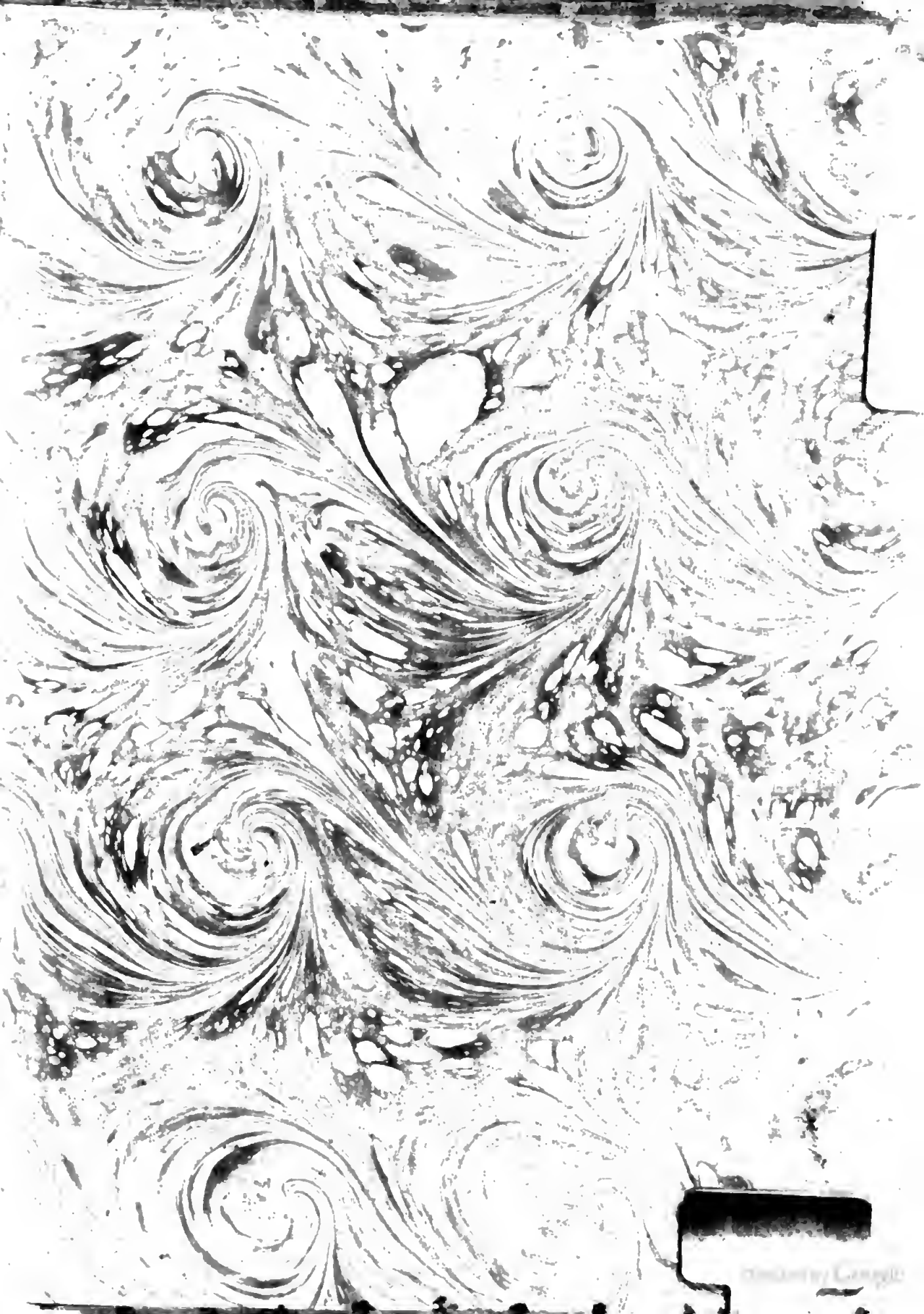
3°. Mais comme les nombres dans le quarré primitif ne ſont continués que juſqu'au nombre de 7 inclusivement, qui eſt ſuivi après cela par 1, c'eſt-à-dire, par la lettre a, cela produit un terme irrégulier par-tout où le nombre a eſt ajoûté: j'appelle ce terme irrégulier, à cauſe qu'il ne ſurpaſſe le terme qui le précéde immédiatement que d'une unité, au-lieu que ſuivant la loi de cette progreſſion il devroit le ſurpaſſer de 8. Il y aura dans chaque rang horizontal un ſeul de ces termes irréguliers, qui ſont tous marqués dans la quatriéme figure, en commençant par l'unité dans l'ordre ſuivant, 1, 15, 29, 43, 8, 22, 36, & forment une progreſſion arithmétique dont la différence commune eſt 14 (21).

4°. De ce qui vient d'être dit dans les trois corollaires précédens, & particuliérement de la conſidération des endroits qu'occupent les termes irréguliers, dont nous venons de donner la ſuite, on peut déduire une nouvelle méthode de conſtruire un quarré magique avec bien plus de facilité, puiſqu'on peut s'y paſſer d'un quarré primitif. Voici en quoi conſiſte cette méthode: Formez une progreſſion arithmétique qui commence par l'unité, dont la différence commune ſoit 21, & le nombre des termes 7. Placez le premier terme de cette progreſſion, qui, dans le cas préſent, ſera 1, 15, 29, 43, 8, 22, 36, dans la premiére cellule du rang horizontal du milieu, à la gauche du quarré magique dont on veut tenter la conſtruction; puis deſcendant de-là en diagonale vers la droite, rempliſſez les cellules que vous traverſerez d'autant d'autres termes de la progreſſion précédente que vous pourrez: ces termes dans le cas préſent ſont 15, 29, 43; ſi ce mouvement par la diagonale étoit continué, le terme ſuivant 8 tomberoit hors du quarré au deſſous du cinquiéme rang perpendiculaire à compter de la gauche: ainſi placez ce terme dans la cellule ſupérieure de ce cinquiéme rang perpendiculaire, & puis deſcendant de nouveau par la diagonale vers la droite, vous trouverez place pour les deux termes qui reſtent encore, ſavoir, 22 & 36. Ayant ainſi aſſigné leurs cellules aux termes irréguliers, toutes les autres cellules ſeront aiſément remplies: ſuppoſons que je veuille remplir le premier rang horizontal, je vois quel en eſt le terme irrégulier, ſavoir 8: je commence par ce terme 8 une progreſſion arithmétique, dont la différence commune eſt 8, & avançant dans ce rang vers la droite, j'inſére autant d'autres termes de cette progreſſion que je puis, leſquels termes dans le cas préſent ſont 16 & 24; puis obſervant que je ne ſaurois aller plus loin, je continue

nue le reſte de la progreſſion en commençant à l'autre bout du même rang horizontal, écrivant, de la gauche à la droite, les nombres 32, 40, 48 & 7; par-là le premier rang ſera rempli, & les autres rangs pourront l'être en ſuivant la même méthode.

5°. Puisque dans un quarré magique, la ſomme de chaque rang eſt la même, ſi quelqu'un avoit la curioſité de connoître cette ſomme, ſans conſtruire la figure, il pourroit raiſonner ainſi: que le nombre 7 ſoit le côté du quarré; cela étant il eſt clair que dans ce quarré ſeront contenus tous les nombres naturels depuis 1 juſqu'à 49 incluſivement, leſquels dans leur ordre naturel forment une progreſſion arithmétique, dont le plus petit terme eſt 1 & le plus grand 49, & le nombre des termes 49; ajoûtez enſemble le plus grand terme & le plus petit, & la ſomme ſera 50, dont la moitié eſt 25; donc 25 eſt une moyenne arithmétique entre les extrêmes 1 & 49; & le nombre 49 fois 25 ſera la ſomme de toute la progreſſion par l'Art. 124; par conſéquent la ſomme de tous les nombres dans le quarré entier, ou la ſomme des nombres dans tous les ſept rangs horizontaux, ou dans tous les ſept rangs perpendiculaires, eſt 49 fois 25; donc la ſomme des nombres dans quelqu'un des rangs eſt 7 fois 25, ou 175; & le même raiſonnement eſt applicable à tout autre cas, ſi le côté du quarré eſt un nombre impair. La ſomme de tous les nombres dans un rang quelconque eſt $\frac{r^2+1}{2} \times r$; d'où j'infére, que ſi $\frac{r^2+1}{2}$ eſt fait égal à m, c'eſt-à-dire, ſi m eſt une moyenne arithmétique entre les extrêmes 1 & r^2, la ſomme de chaque rang ſera la même que ſi les cellules en étoient toutes remplies du même nombre m.

Il y a pluſieurs autres méthodes de conſtruire des quarrés magiques, tant impairs que pairs, & bien d'autres propriétés ſurprenantes rélatives à ces quarrés, que je paſſerai toutes ſous ſilence, à cauſe que cette matiére, quoique curieuſe & agréable en elle-même, n'eſt pourtant après tout d'aucun uſage dans les autres parties des Mathématiques. Ceux qui ſouhaiteront d'en ſavoir davantage ſur les quarrés magiques, pourront conſulter les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences pour les années 1705 & 1710, où ils trouveront ce ſujet presque épuiſé par les ſavans & célébres Mathématiciens *De la Hire* & *Sauveur*.

FIN DU TOME PREMIER.

Biblioteca Nazionale NAPOLI